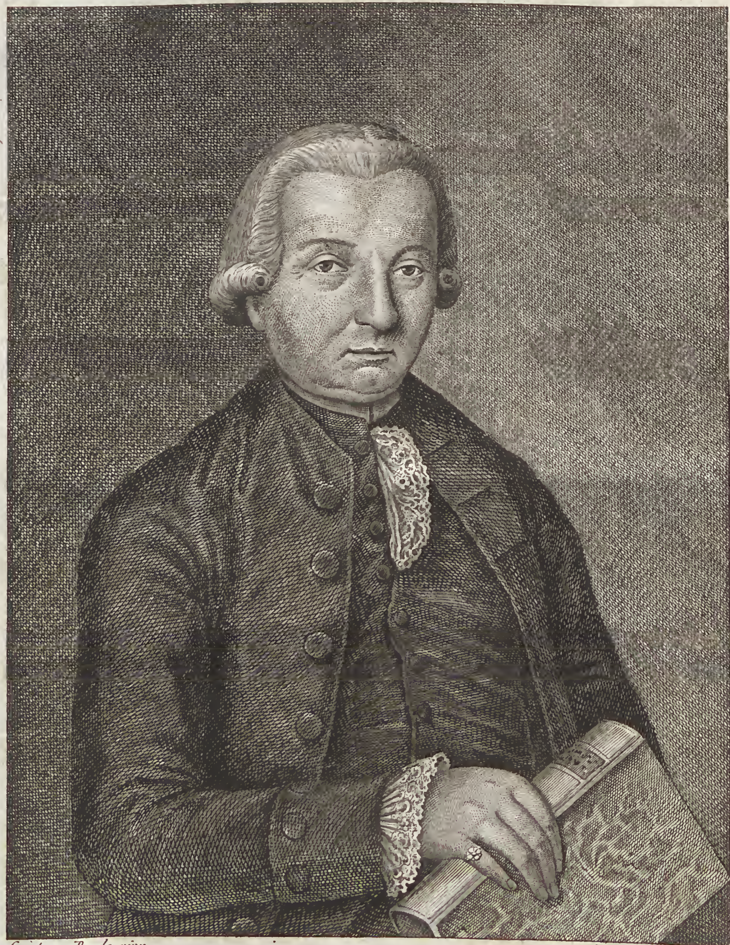






*Cajetanus Prada pinx.* *Baratti et Sandi sculp.*

JOANNI BAPTISTÆ NICOLAI

ANALYSTÆ

CLIENS AC TYRO

M.L.L.P.

# NOVA
# ANALYSEOS ELEMENTA

AUCTORE

JOANNE BAPTISTA NICOLAI

EJUSDEM SCIENTIÆ P. P.

ET ACADEMICO PATAVINO,

BONONIENSIS AC TAURINENSIS

ACADEMIÆ SOCIO.

TOMUS I.

PARS ALTERA.






PATAVII TYPIS SEMINARII, MDCCXCIII.

PROSTAT VENETIIS APUD THOMAM BETTINELLI

*SUPERIORUM PERMISSU.*

Nec manus nuda, nec intellectus sibi permissus multum valet: instrumentis & auxiliis res perficitur, quibus opus est non minus ad intellectum, quam ad manum. Atque ut instrumenta manus motum aut cient, aut regunt; ita & instrumenta mentis intellectui aut suggerunt, aut cavent.

*Bac. Nov. Org. Aphoris. II.*

# TRIUMVIRIS LITTERARIIS

## SENATORIBUS AMPLISSIMIS

JACOBO NANI EQUITI
PETRO ZENO
PAULO BEMBO

VINCENTIUS CHIMINELLO.

*HUjusce Novæ Analyseos celeberrimo Auctore e vivis tam intempestive erepto, ejusdem honestissimis Fratribus nihil potius fuit, quam ut tanti conatus Analytici Typographo posterius consignati quod adhuc erat excudendum*

*pro secundo hoc volumine e prælo exiret. Iidem itaque curam hanc mihi, quicum optimus Auctor de ideis suis inter loquendum plura communicaverat, committere voluerunt. Laborem hunc, dulcissimi memor amici, recusare non potui, curamque intermissæ editionis sedulo suscepi. Silentio autem præterire non debeo, adjutorem me habuisse D. Abbatem Cornuda Taurisanum juvenem ingenio præditum singulari, præstantemque discipulum immortalis Auctoris, quem ipse in eodem labore assidue ab initio adjuverat. Modo tandem cum editio Operis absoluta sit, nihil supererat nisi ut Vobis, prout debeo, Senatores Amplissimi, Rei Litterariæ Præsides, qui erga Auctorem, & in editionem hanc ipsam munifici fuistis, ipsius nomine & volumen hoc secundum quasi posthumum offerrem, ac nuncuparem, meque ipsum eximio Patrocinio Vestro commendarem.*

*XIII. Calendas Decembris Anni 1793.*

# JOANNIS BAPTISTÆ NICOLAI

## BREVIS VITÆ NOTITIA.

JOANNES BAPTISTA NICOLAI *natus est honesta Familia Venetiis die 30. Martii an. 1726.*

*Cum puer Patrem amisisset, fratrum quatuor & quinque sororum corona stipatus, ab Avo ac patruis educatus utcumque fuit, ac primis litterarum rudimentis imbutus. Sed educationem suam agnoscebat præcipue ab Avunculo, viro spectatæ virtutis,* FRANCISCO CIMEGOTTI, *Archipræsbytero in Castro Franco, oppido nobilissimo & amœnissimo Agri Tarvisini, qui sororis filium optima indole præditum agnoscens, tamquam suum domo excepit ac retinuit.*

*Anno itaque 1739. eum collocandum curavit in Seminario Episcopali Tarvisino, patruis stipendium suppeditantibus. In Seminario moratus est annis quatuor, & humaniores litteras excoluit, & addidicit ita, ut pure nitideque latine scriberet nedum italice prout ex scriptis ejus apparet.*

*Anno 1743. revocatus est ab Avunculo domum, ut in disciplina celeberrimi Comitis* JACOBI RICCATI *traderetur. Cum jam occasione feriarum autumnalium cognita ei fuisset optima adolescen-* tis

*tis indoles, exceptus fuit ab humanissimo viro tamquam filius; eique analyseos arcana aperuit, nec non interiora physicæ, domestica cum propriis Filiis & communi exercitatione, tradidit. Quinque annos in hisce studiis impendit Nicolaus, eo progressu, ut Riccati dignus auditor & haberetur & esset.*

*Anno* 1748. *cum jam* 22. *annos complevisset, accepit oblatam sibi Scholam Civicam, ut juventutem ejusdem Oppidi Grammaticam ac Rhetoricam doceret: biennio tantum functus est hoc munere.*

*Anno enim* 1750. *ob famam peritiæ ejus in philosophicis ac mathematicis disciplinis, ab Episcopo Tarvisino, PAULO JUSTINIANO, illustri Præsule, vocatus est ad easdem docendas in Seminario Illo, & hanc scholam rexit annis ferme octo, creatis alumnis pluribus, qui adhuc in Provincia Tarvisina semina scientiæ, amorem & honorem mathematum egregie tuentur.*

*Anno* 1658. *Episcopus idem æquus meritorum æstimator, contulit ei Beneficium Archipræsbyterale Padernelli; quam Ecclesiam rexit Nicolaus, tamquam pater & verus pastor, usque ad exitum vitæ.*

*Ejus interim peritia otiosa esse non poterat. Nam anno uno alterove coactus fuit a Præsule suo Scholam eandem philosophiæ obire in Seminario; & anno* 1772. *ab* EXCELLENTISSIMIS *REFORMATORIBUS Gymnasii Patavini accitus fuit ad Cathedram Analyseos in illa Universitate gerendam; quo in munere expectationi, quam fecerat, abunde satisfecit.*

*Omitto hic non unam destinationem Publicam illi mandatam ad machinas judicandas, flumina dirigenda, Agros describendos, ac similia obeunda ad mathematicam rem pertinentia; quæ cum aliis illi fuere communia. Ediderat etiam ab initio Dissertationes non-*

*nul-*

*nullas analyticas* (*) . *Singulare facinus ab eo susceptum fuit analyseos universæ instauratio. Inciderat in hanc cogitationem, occasione cujusdam controversiæ exortæ circa solutionem casus* Cardanici, *quam solutionem desperatam, non nisi ex præjudicio methodi communis esse defendebat; idque demonstrandum suscepit apposita dissertatione* ( *Patavii* 1783 , 4.° ) . *Cum vero refragatores aliquot nactus esset, incitatus est atque eo progressus, ut analysim totam instaurandam esse statueret; Tum opus hoc tam vastum magno animi ardore aggredi cœpit. Ostendit, in veteri analysi nævos ac nodos non paucos circa* quantitates negativas & imaginarias, *qui longe lateque fusi, per analysim universam grassarentur, ingenuis hominibus non diffitentibus. Occasione vero data, vidit, atque explicavit mysteria* Logarithmorum quantitatum negativarum, *generationem novam* quarundam curvarum, latentes æquationum Radices, Exponentialium Theoriam, *atque subtilia alia nova ac minime expectata; eo demum progressus est, ut duo hæc tam magna volumina ( quibus etiam pro Coronide tertium addere meditabatur) componeret, in quibus magni Analystæ vim nemo justus æstimator non agnoscit.*

*Interim labor tam improbus, septenis vel octonis annis tanto fervore exantlatus, hominem, licet robustum, fregit ita, ut oneri demum cedere, & immature occumbere debuerit.*

*Donatus erat Nicolaus a natura prompto atque acutissimo in-*

ge-

---

( * ) *Degli Elastri di massa finita; D'un Pendolo oscillante in un fluido*. Padova 1772. 4.°; alia præterea cernere est in Voluminibus Academiæ Patavinæ.

*genio, judicio acerrimo, indole vero suavissima, prudentia quadam singulari, quas virtutes ornabat moribus puris & integerrimis, temperie quadam in tota vitæ ratione, modestia, munditia etiam, ut gratus & acceptus omnium ordinum hominibus evaderet. Ita ejus immatura mors exstitit mœror quidam publicus, sed præcipue Universitatis & Academiæ Patavinæ, quibus magnum erat ornamentum.*

Multis ille bonis flebilis occidit, nulli flebilior quam mihi.

*Inter cæteros Proceres qui Nicolaum deamabant, erat* clarissima Corneliorum Familia, *quæ cum in Castro Franco in eximia illa villa* del Paradiso *rusticari solita esset, adolescentulum ibi cum Avunculo degentem cognoverat quasique adoptaverat. Erant Cornelii Fratres plures æqualis fere cum illo ætatis; JOANNES postea S. ECCLESIÆ CARDINALIS, MARCUS, Episcopus Vicentinus, ANTONIUS, ANDREAS, JULIUS, postea Senatores; omnes Nicolao tamquam altero fratre ac domestico utebantur. Quare ANDREAS ex tot fratribus unicus superstes, qui Nicolaum peculiari quodam amore prosequebatur, eumque quoties Patavium veniebat invisere secumque habere consueverat, hoc anno* 1793. *cum* Schloedum *Terram illam lanificio celebrem in collibus Vicentinis una cum Conjunge, Matrona lectissima, MARIA FUSCARENA, proficisceretur ad potandas acidulas Recobarii aquas, quæ Nicolao ipsi non semel profuerant, cum illum languescentem cerneret, secum pertraxit. Ibi sane aquas illas bibere cœpit, sed eo successu, ut statim intermittere coactus fuerit. Nimia repletione & sanguinis*

&

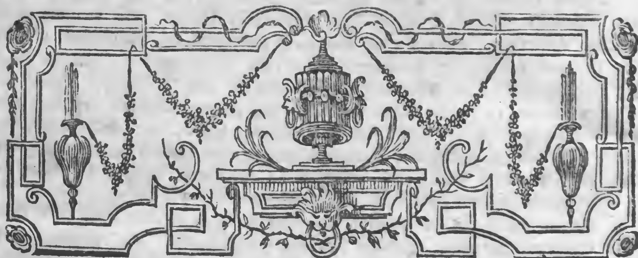
*& humorum omnium laborabat. Cumque dies aliquot ægre transegisset, demum die* 10. *Julii febre correptus fuit cum sopore mentis (stasis nempe in cerebro facta erat), & virium omnium prostratione. Difficile dictu est, quam sollicitam quam anxiam quam liberalem quam amicam curam ad medicos medicamina omnia humana adminicula paranda susceperit nobilissimus Cornelius: egit omnia quæ pro Fratre pro Nato pro seipso agere potuisset; sed frustra; extinctus enim est die* 15. *ejusdem mensis.*



*Cornelius etiam post mortem amici memoriæ consulere voluit; sepulcro condito, atque inscriptione hac posita a Cl. Sibiliato confecta.*

JOANNI BAPTISTÆ NICOLAI VENETO
PADERNELLI ARCHIPRÆSBITERO
IN PATAVINO LYCEO
ANALYSEOS P. P.
VIRO INTEGERRIMO AC SUAVISSIMO
INGENII ACUMINE SCRIPTIS EDITIS
NOVA ET MAGNA MOLIENTI
ANDREAS JULIUS CORNELIUS
AMICO DESIDERATISSIMO
QUI VALETUDINI CURANDÆ RECOBARIIS AQUIS
SCHLOEDUM AB IPSO PERDUCTUS
ANNUM AGENS LXVII.
MORBO INOPINATO PERIIT
IDIBUS JULIIS CIϽIϽCCXCIII.

*Hæc mœrens optimo super amico dictabat* JOSEPH THOALDO *die 26. Decembris 1793.*



# PRÆFATIO.

§. 1. 
QUÆ in prima hujusce Operis parte NOVA in lucem protulimus ANALYSEOS ELEMENTA ad penitiora, & quæ ex ipsa quantitatis natura intimius dimanant principia eruenda, sensim & quasi insperato eo nos duxerunt, ut antequam ad ulteriora pergamus, in hisce e prima sua origine derivandis, & in lucem proferendis, nos cogant diutius immorari. Non sum nescius quosdam, & quidem non infimæ notæ Analystas, qui vetera cum hisce meis diligenter conferentes, cum hæc quæ jam prostant falsitatis insimulare nequeant, nimium operis & laboris in primis Analyseos notionibus, & in simplicioribus æquationibus explicandis me frustra in P. I. insumpsisse dictitant; cum videant me in hac etiam II. T. I. Parte in hisce argumentis tractandis denuo versari, non se continere posse, quin statim in ipso titulo exprobrent, me magno conatu nihil admodum rem ipsam promovere, ac Lectorum, si qui erunt, nimium abuti patientia: Adolescentes vero natura & Provectiorum exemplo a labore ad desidiam proclives, quibus magna facili dispendio consequi posse vana spe ( ut est nostrorum temporum conditio ) jactantur, ab hisce meis perlegendis, ac meditandis deterreri, cum intelligant, quæ brevi tempore, ac unius, si Diis placet, horæ spatio facile eos assequi posse jam proponebantur, non nisi magno molimine a mea Methodo exhiberi.

§. 2. Verum qui & sua & præteritorum temporum experientia edoctus probe cognoscit quam lente admodum, & quanto cum labore ab illo, in quo profunde abduntur, puteo veritates hominibus fas sit in apertum pro-

ferre; dolebit quidem de naturæ humanæ infirmitate, at non renuet ad hæc iterum animum diligenter attendere, dummodo secum ipse reputet Scientiam hanc difficilem, quippe quæ quicquid quantum est universim complectitur, non nisi pedetentim ac magno conatu ab impedimentis, quibus implicatur, liberari posse, ac solidioribus fundamentis rite ædificari. Quod nisi fiat (ut omittam veritates abstractas ipsas per se exquirendas, quibus Analyseos instauratione ditari possumus) Scientiam hanc, cui uni veluti fundamento Mechanices facultates quicquid incrementi habent acceptum referre debent, difficultatibus undique impeditam ad tot adhuc ignota Physices mysteria explicanda frustra applicare conabimur.

§. 3. Neque putes me de hujusce Scientiæ ad geometrica applicatæ imbecillitate calumniosas nunc primum fundere querimonias. De hujusce enim infirmitate Recentiores fere omnes magni nominis, qui in hac excolenda ætatem triverunt, conquesti sæpe sunt: ac fateri non dubitarunt, difficultates prorsus inexsuperabiles, quæ in mechanicis tractandis, in quibus tota fere hominum Physices continetur, occurrunt, Algebræ imperfectioni tribuendas esse, quas quisque superare, longiusque Mechanicam frustra promovere tentabit, nisi ad meliorem atque aptiorem formam, instrumentum hoc, quo ipsa necessario utitur, restaurare prius cogitaverit. Nam ut cæteros missos faciam, unum hic sufficiat amplissimum sane celeberrimi Euleri testimonium proferre in sua *Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis*: Berolini anno 1730, qui §. 1. sic initium sumit. „ In motu Corporum ac præ„ cipue fluidorum plurima occurrunt phænomena, quæ per Theoriam non„ dum explicari possunt. Etsi enim principia Mechanicæ, a quibus omnes „ motus determinationes pendent, satis cognita atque ad quosvis casus ac„ commodata videntur, ut eorum ope motus immutationes formulis analyticis „ includi queant; tamen sæpenumero ipsa Analysis his formulis evolvendis „ impar deprehenditur. His igitur casibus non tam Mechanica, ad quam „ motuum investigatio proprie pertinet, imperfectionis est accusanda, quam „ Analysis cujus munus in resolvendis æquationibus, ad quas reliquæ Ma„ theseos partes perduxerint, versatur. Sic quamquam Geometræ post in„ ventum calculum infinitorum nimium studii in Analysi excolenda multis „ collocasse videntur; tamen frequenter a principiis mechanicis ad ejusmo„ di æquationes differentiales deducimur, quarum resolutio antequam Ana„ lysis multa adhuc majora cœperit incrementa, frustra tentatur: Quam„ obrem eorum labor qui omnem operam in promovendis Analyseos finibus „ impendunt, non solum non est reprehendendus, sed etiam quam maxi„ me laudandus „. Et cum Analyseos *munus in resolvendis æquationibus, ad quas reliquæ Matheseos partes* perducunt, versari satis aperte profiteatur celeberrimus Auctor, huic resolvendarum æquationum methodo non satis perfectæ hæc, quam queritur, impotentia tribuenda est.

§. 4. Quam quidem cum recentissimus Auctor nuperrime fato functus suo ipse periculo cognoverit, atque artificia omnia hactenus cognita prorsus

im-

imparia ad malum hoc tollendum, vel saltem minuendum expertus fuerit, nec meliora reponere posset, in eam hujusce Artis restaurandæ desperationem est adductus, ut publice in sua Præfatione præmittenda ad Algebram, quam mors immatura frustrata est, hisce verbis conqueratur. „ At aliam „ Algebræ partem inveni tam arctis limitibus perstringi, ut licet summorum Mathematicorum ingenium diu exercuerit, fere omnis tamen ex Algebra posset tolli. Cum enim deprehendissem Cardani methodum pro „ æquationibus tertii gradus resolvendis funditus deficere, nihil in hacce re „ posteriores Analystas amplius obtinuisse, constructiones geometricas ad „ graphicam delineationem potius, quam ad Problematum solutionem conducere, calculi ulterius promovendi spem omnem deesse; censui Algebram omnem ultra æquationum quadraticarum, aliarumque inde pendentium resolutionem minime pertingere, non nisi approximationum methodos in æquationibus aliis altiorum ordinum superesse „. Vide igitur quam in arctum eam præcipuam, aut melius unam Algebræ partem, quam nunc habemus, ex qua fructus uberrimi in alias ipsius partes, & in alias Scientias manare possunt, compulerit celebris Auctor. Quam tamen ( ut vere fatear quod sentio ) arctioribus etiam cancellis, ut ut est, continetur: cum nec ad primas lineares æquationes universim solvendas sufficere in P. I. satis me arbitror demonstrasse. Ut vere dicendum sit, cum clarissimorum Virorum testimonio munus præcipuum seu potius unum resolvendarum æquationum huic, quam intelligimus, Analysi ad aliarum Scientiarum utilitatem & incrementum demandatum fuerit, & cum huic muneri satisfaciendo in primis etiam simplicioribus æquationibus prorsus impar reperiatur; vere, inquam, dicendum sit hactenus nullam potius, quam imperfectiorem nos habere Analysim proprie dictam.

§. 5. Verum auctoritatibus omnium summotis propius in rem ipsam rationibus & facto inquiramus oportet; videamusque quo in statu Analyseos geometricæ principia a Majoribus post Cartesium nobis consignata fuerint; quid mea in I. hujus Operis Parte ad hæc rectius firmanda conduxerint, & quæ & quanta denique supersint ad hanc firmioribus fundamentis superstruendam: ex quibus omnibus evidentissime pateat quam necesse fuerit II. Partis, quam nunc exhibemus, circa prima hujusce Scientiæ elementa disquisitionem proferre, & quæ denique in posterum desiderentur. Nam si primam Algebræ originem animo repetamus, atque ea, quæ ex Arabum studiis ad nostrates delata supersunt, diligenter perpendamus, noverimus hæc omnia non nisi ad Arithmeticam Universalem, sive ad numeros abstracte sumptos pertinere: & cum non nisi a Cartesio ad aliam fuerit revocata formam, & ad geometrica applicata, ut vere *Analyseos geometricæ* nomen, & naturam desumpserit; de lento veritatum progressu argumentum nobis exhibet cumulatissimum. Cartesius quidem maximo hoc ad hæc studia promovenda incitamento præclare de Mathesi universa meritus est: dolendum in hac ipsa Algebræ ad Geometriam applicatione, atque in ipso statim li-

mine & in primis ſimplicioribus principiis illa incaute jeciſſe errorum ſemina, quorum cauſſa, quæ palam & ante omnium pedes erat, Auctorem ipſum & tot inde celeberrimos Viros in intimo hujuſce Scientiæ receſſu hanc quærentes, ipſa ſua facilitate eluſerit.

§. 6. Non erat igitur ſperandum ex tot tantiſque illuſtrium Virorum ſibi invicem ſuccedentium laboribus exantlatis de meliori hujuſce Scientiæ ſtatu ac progreſſu, niſi ea, quibus vere vexabatur, incommoda radicitus tollerentur. Quod cum horum incommodorum cauſſam in primis, quibus nititur, principiis latere feliciter deprehenderit I$^a$. hujuſce T. I. Pars, quam publici juris fecimus, in eo ſe totam eſſe oportere probe intellexit, ut ſenſim & quaſi per gradus primas hujuſce Scientiæ notiones partim falſas, dubias partim, partim obſcuras emendaret, confirmaret, explicaret, ut ſolidioribus Scientia hæc nixa principiis in meliorem tandem formam erigi ac conſtrui poſſet. Hiſce vero impedimentis ſublatis ulterius progrediens Pars illa duo ſyſtemata, tamquam prima fundamenta hujuſce tam vaſti ædificii, initio jacienda ſtatuit ita neceſſaria & cum intima rei, de qua agimus, natura conjuncta, ut horum ignoratione in dubia ac in devia (ut huc uſque factum fuit) deferamur neceſſe ſit: bene vero horum explorata natura, & opportuno ipſorum uſu, omnes, exorta hac repente luce, tenebræ quibus miſerrime circumfundebamur, ſtatim disjiciuntur: & analytica artificia, quæ adverſis frontibus oppoſita & tamen vera ſimul pugnare videbantur, invicem conciliantur, & omnia ac ſingula ad Scientiæ hujus perfectionem & incrementum mutuis officiis conſpirant. Hinc *imaginarium* illud, quod nunquam univerſim ſubactum Analyſis communis fruſtra dolebat, limitibus horum duorum ſyſtematum bene ſtatutis, & pro re nata opportune adhibitis, perpetuo ab Analyſi cogitur exulare: cum hujuſce mali cauſſam non niſi a falſa ſyſtematis ſortitione derivare ſatis ſuperque Pars illa demonſtraverit. Quod ni aliter ipſa conſequuta eſſet, tamen multum hanc obtinuiſſe quiſque intelligens & æquus fateatur oportet.

§. 7. Verum præter ea, quæ illic ad male jacta & male applicata principia renovanda præſtitimus, gravius alterum incommodum accedit, quod ſcilicet horum omnium errorum qui prima, quæ reformare nititur Pars I$^a$, Principia contaminarunt, potior cauſſa & origo ita caute adhuc latebat, ut hujuſce etiam I.$^æ$ Partis accuratis undique perquiſitionibus adhibitis tamen aliquo modo ſe ſubtraxerit. Nam, ut vere fatear, jam prima hujuſce Operis Pars ſub prælo erat, atque in ſecunda expolienda multam operam impenderam, quin hanc primam mali labem aſſequi poſſem, licet majus aliquid neceſſarium hujuſce Scientiæ damno adhuc latere ſuſpicatus fueram, & non niſi divinatione quadam quid illud eſſet præſenſiſſem. Tandem poſt aſſiduas meditationes, his, quæ jam inveneram, facem præferentibus, cauſſam hanc ex abditiſſimo illo, in quo latebat, cuniculo me deprehendiſſe confido, ac fidenter mihi videor pronunciare poſſe, totam hanc primam horum omnium errorum cauſſam, quibus inficitur Analyſis vulgata, in eo

(quis

( quis crederet! ) sitam esse, quod quid vere significet illud, quod nomine *Unitatis* designamus, hactenus ignoratur. Ab hac una enim *Unitatis* notione non bene perspecta, atque explorata quicquid in Analysi falsi, obscuri, impervii est, præcipue est repetendum, & ab hac una bene cognita atque explorata remedium omnibus hisce incommodis est mutuandum. Ex hac enim bene constituta *Unitatis* notione symbolis analyticis applicata novus exsurgit rerum analyticarum ordo, & nova *Coefficientium indeterminatorum Methodus* generalis & prima, qua tamquam fundamento *nova* omnino *Analysis* est superstruenda. Et hoc illud est, quod hæc II.ª Pars aggredi nititur. Utinam in hac sublimi prorsus Methodo pertractanda quemadmodum novæ ac maximi momenti veritates, tamquam ex trunco rami, inde prorumpunt; ita verissimarum rerum copiæ non deesset dispositio apta, & exquisitus ordo! pro virili tamen in difficillimo hoc negotio tractando me adhibeam: & contentus me novam prorsus aperuisse viam, aliis perspicatioribus eam sternendi curam relinquam.

§. 8. Ut vero hujusce novi Ordinis series facilius excipiatur, atque uno veluti intuitu quid nova hæc Theoria sibi proponat præstandum, & quantum differat a communibus receptis doctrinis, & ab ipsis quæ in P. I. reformavimus principiis principia quæ ex hac manant, universim perspiciatur; opportunum judico præcipua quæ in singulis hujusce Partis Capitibus demonstrantur, in hac Præfatione ordine & singillatim recensere ac perstringere, ut Lectoribus in antecessum liberum judicium relinquam, utrum in hisce perlegendis, accuratiusque expendendis assiduam & attentam operam impendere conducat. In primo igitur Capite postquam usque ad §. 9 nova demonstratione necessitatem duorum systematum SA, SY Partis I.ª firmavimus, ad *Methodum coefficientium indeterminatorum* universalem ac primam explicandam accedimus. Ac primum demonstrata necessitate hujusce Methodi cum intima dimensionis geometricæ natura necessario conjunctæ, in hoc Capite prima hujusce novæ Methodi fundamenta ponuntur. Porro cum quantitates quæ in calculo dicuntur fluentes infinitis valoribus successive obnoxiæ, nihil aliud esse demonstrentur nisi partes unius quantitatis cujuscumque constantis & integræ, quam dico $a$, initio sumptæ; harum *variabilitas*, sive potentia ad infinitos valores ipsius $a$ successive suscipiendos non nisi a coefficiente numerico fluente, quo afficitur quantitas $a$ vicem *Unitatis* gerens, potest derivare: ex quo colligitur coefficientes numericos indeterminatos quantitati constanti $a$ applicatos esse fluentes illas, quæ in Calculo adhibentur. Sic definita fluentium natura primum hujusce Methodi, quam trado, munus in eo necessario situm est, ut coefficientes hosce numericos a quantitate constanti opportune artificiis traditis segregentur; ut quod natura indeterminatum est ab eo, quod natura est constans, tuto & manifeste assequamur. Qua semel separatione peracta Analysis ad eam maximam, ad quam rite pervenire potest, abstractionem elevatur, cum sublato ac semoto quicquid in dimensione quantum concipitur vel proponitur symbolo $a$ indicatum, totum negotium analyticum ad unitatem numericam

CAP. I. Prima Methodi generalis coefficientium indeterminatorum jaciuntur fundamenta.

&

& abstractam, prout res postulat, calculo subigendam reducitur, ut coefficientes illi numerici fluentes inveniantur, & sub formulis legitimis concludantur, ad obtinendam eam, quam inter se & cum unitate hac abstracta relationem propositum systema requirit: quibus postea cuicumque naturæ, dimensioni, & valori *a* apte applicatis ab abstractione, ad eam, quam volumus, cujuscumque generis quantitatem res in integrum restituitur.

§. 9. Cum vero limites unius systematis sint longe diversi & prorsus oppositi systematis alterius, etiam coefficientium homologorum fluentium formulæ systematis S A longe sint diversæ a formulis coefficientium systematis S Y oportet: sunt enim primi singuli fractiones unitate minores, ut simul sumpti totam unitatem adæquent; secundi vero fractiones, quarum major semper unitatem excedit, minor vero a *zero* initium sumit ea lege, ut horum differentia semper sit constans & æqualis huic unitati abstractæ. Quare tradere Methodum oportet, qua hujusmodi diversæ coefficientium formulæ pro diversitate systematis inveniantur. Hoc a §. 9 usque ad §. 15 perficitur. Insuper a §. 15 usque ad §. 21 inclusive ostenditur in quibus tantum casibus fluentes vel utræque vel alterutræ utriusque systematis, quæ universim inæquales sunt, simul æquari atque consociari possint, & quomodo in hisce æqualitatis casibus transitus legitimus ab uno ad alterum systema obtineri possit. Rursus a §. 22 usque ad §. 30 inclusive ex una formula $M = \frac{M \pm N}{M \pm N} = 1$ variis artificiis in varias transmutata formas eruitur hanc, quæ unitatis abstractæ naturam tantum referre videtur, tam quantitatem illam linearem cujuscumque valoris, quæ vicem gerit unitatis integræ sive constantis, quam utramque fluentem vel alterutram utriusque systematis repræsentare posse. Quæ omnia cum nimis abstracta, & a communi prorsus ratione remota videantur, opportuna descriptione & exemplorum a numeris desumptorum appositione illustrantur, atque ea, quæ hinc primo sequuntur, Corollaria deducuntur. Quibus omnibus sensim ac per gradus ad notionem completam illius abstractæ *Unitatis*, a qua cætera omnia analytica originem ducunt, propius & intimius assequendam via sternitur.

§. 10. Quam ob rem ex hac tantum in hoc Capite inchoata *Coefficientium indeterminatorum Theoria* statim patet quantum hæc supra communem Analyseos tractandæ rationem præstet. Recensentur enim a §. 31 usque ad finem præcipua mala, in quæ offendit Methodus nota ignoratione eorum, quæ in hoc Capite traduntur. Ac primum cum necessitas horum duorum diversorum systematum, ac diversa eorum natura, diversique eorum limites ab Analysi communi ignorentur prorsus; aditum sibi intercludit ad legitimum transitum tam a systemate ad systema ejusdem naturæ sed diversæ constantis, quam ad systema naturæ diversæ: ex quo fit ut errore systematis in eam incidat contradictionem, a qua originem illius *imaginarii*, quo tota inficitur, repetendam esse satis aperte in P. I.ª demonstravimus. Deinde

de

de cum litteris alphabeti primis $a$, $b$, $c$ &c. quantitates, quæ ex conditione problematis innotescunt, communis Methodus designet, ignoret oportet quænam ex istis sit vere constans ac systematis dominatrix, & quæ natura sua sit fluens ad aliquem valorem in illo peculiari casu determinata. Rursus ex hac ratione efferendi cognitas nequit Analysis nota coefficientem numericum, a quo tantum oritur successiva coefficientium mutatio, sive fluentium natura, a quantitate constanti $a$, cui applicatur, separare: proindeque nequit relationem fluentium M, N inter se & cum constanti ad minimos terminos, & ad rationem simpliciorem traducere. Adde quod cum quæ incognitæ sunt litteris alphabeti ultimis $x$, $y$, $z$ &c. omnino indeterminatis efferat, primo vere fluentes cum incognitis confundit, deinde fluentes utriusque systematis quæ natura diversæ sub diversis formulis continentur, similitudine litterarum, quibus notantur, decepta ejusdem naturæ ac valoris falso supponit, easque simul æquat, in unum colligit, unam ab altera subtrahit eo prorsus modo, quo identicæ in calculis tractantur. Tandem ignoratione horum principiorum artificiis analyticis, quibus utitur, sæpe cogitur a dimensione ad dimensionem, a genere ad genus transitum facere: ex qua non satis bene explorata subducendorum Calculorum ratione tot inde mala sequuntur, quæ ut cognoscantur, cum majorem operam requirant, quam quæ in hoc primo Capite obtineri possit, in singulis sequentibus Capitibus ordine exponuntur.

§. 11. Itaque sensim & caute progrediens in Cap. II explicandum mihi propono, quæ sit vera notio illius *Unitatis abstractæ*, qua Methodus communis perpetuo abutitur: quæ origo & natura quantitatum, quæ nomine *constantium & fluentium* vulgo designantur. Ac primum demonstro hanc unitatem abstractam 1 esse absolute indeterminatam & quoad naturam & quoad dimensionem, systema, valorem, atque positionem, quæ quidem pro varia ratione, qua disponitur atque præparatur, ad singulas hujusmodi affectiones potest determinari. Itaque a diversa ejus natura initium sumens (quod maxime interest advertere) ostendo hanc vel quantitatis geometricæ, vel numeri sive coefficientis abstracti quantitati geometricæ cuicumque postea applicandi naturam induere. Primo modo designatur formula $1^{\circ}$ quæ cum sit $=a^{\circ}$ (usque ad §. 10) demonstro formulam hanc $1^{\circ}$ sumi posse ut elementum cujuscumque quantitatis geometricæ cujuscumque dimensionis &c., quæ ideo valore censenda est variabilis, sed integra & constans atque una in formulis sumenda in quovis systemate: cæteræ quantitates geometricæ non sunt nisi ejus multiplæ vel submultiplæ: hanc nomine *Protonumeri* definio: qui proinde donec hoc officio fungitur nullo modo *fluentis* natura affici potest, licet quemcumque valorem ac dimensionem possit obtinere. Determinatur vero statim in omnibus hujusmodi elementum $1^{\circ}$ quoties exponenti *zero* additur vel subtrahitur quicumque numerus: cum enim sit $1^{\circ}=a^{\circ}$, si exponenti hujusce functionis $1^{\circ}=a^{\circ}$ addatur vel subtrahatur 1 fit $1^{o\pm 1}=$

CAP. II. De vera unitatis abstractæ 1 notione, & de origine ac natura fluentium.

$= a^{0 \pm 1} = a^{\pm 1}$ : quo facto determinatur valor ac dimensio ipsius 1 ad hujusmodi simplicem protonumerum $a^{\pm 1}$. In nostro casu protonumerus est $a^{1}$ vel $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1}$ unius dimensionis sive linearis. De hac lineari geometrica quantitate tantum hic sermo fit, cum de primis fluentibus linearibus in hoc Libro primum agendum sit.

§. 12. Ab hac quantitatis geometricæ origine ac natura ab elemento $1^{0}$ legitime derivata transeo (§. 10) ad alteram ejus naturam ab eadem functione $1^{0}$ eruendam. Hic vero transitus a prima quantitatis geometricæ natura ad hanc secundam eleganti ac facillimo artificio obtinetur ope conversionis $1^{0} = a^{0}$ in $\frac{1}{1} = \frac{a}{a}$, cum notum sit & universim receptum, esse $1^{0} = a^{0} = \frac{1}{1} = \frac{a}{a}$. Sic transformata formula $1^{0}$ vel $a^{0}$ coefficientis abstracti numerici naturam assumit, cum in locum $\frac{1}{1}$ quævis fractio $\frac{a}{a}$ substitui possit. In hoc casu hujusmodi fractio vere nullius dimensionis censenda est, cum nullam lineam geometricam repræsentet, sed tantum sit numerus abstractus vicem coefficientis gerens cuicumque quantitati geometricæ applicandus. Id vero ex ipsa fractionis natura consequitur, in qua denominator ejusdem dimensionis ac numerator, eam, quam præseferebat numerator, dimensionem omnino tollit. Verum cum numerus quivis $a$ integer dividi possit infinitis modis in duas partes, quin valor ipsius $a$ mutetur: (possunt enim semper inveniri infinita numerorum paria, qui simul additi, vel a se invicem subtracti eumdem numerum $a$ semper æquent) patet singulas hujusmodi partes successivo minimo incremento vel decremento affectas vere *fluentium* naturam induere. Quæ fluentes erunt semper hac præditæ proprietate, ut vel earum summa sit perpetuo eadem & constans, atque hinc earum differentia necessario fluens; vel earum differentia constans, summa vero fluens: prima conditione nititur systema SA; a secunda vero ortum ducit systema SY. Hujusmodi vero fluentes partes sunt numeri abstracti sive coefficientes protonumero cuicumque applicandi, qui *coefficientes homologi* a nobis appellantur: quia simul sumpti sui systematis, ad quod pertinent, conditionem superius indicatam perpetuo servant. Cum vero in unoquoque systemate idem protonumerus sive linea geometrica eadem perseveret oporteat, quantitates geometricæ minores majoresve ipso pro-

protonumero, vi tantum hujusmodi fluentium coefficientium, naturam fluentium assumere possunt, sive sola applicatione singulorum coefficientium ad eundem & semper constantem protonumerum. Porro hujusmodi coefficientes numericos fluentes ex eorum genesi eruitur non esse nisi fractiones ejusdem denominatoris; ita tamen ut limites coefficientium fluentium unius systematis longe differant natura, origine, officio a limitibus fluentium alterius systematis. Tamen a §. 12 usque ad §. 16 demonstramus quemvis numerum, ac ipsam fractionem $\frac{1}{1}$ fluentis naturam assumere posse atque ideo a valore determinato, quem exhibent formulæ analyticæ, nihil certi erui posse ad secernendos constantes numeros a fluentibus, neque coefficientes a protonumero. Hinc necesse fuit a §. 16 usque ad §. 20 ostendere modum, quo coefficientes abstracti fluentes a constantibus secerni possint, simulque demonstrare in utroque systemate non nisi protonumerum constantis naturam assumere posse, & quantitatis integræ vicem gerere: cæteras partes, in quas hic dividitur, esse fractiones fluentes submultiplas vel multiplas ejusdem protonumeri. Ex quo consequitur quemcumque numerum sive integrum sive fractum naturam protonumeri induere posse, atque ideo ut integrum jure considerandum esse: contra vero quemcumque numerum sive integrum sive fractum assumere posse naturam fluentis, ac proinde ut veram fractionem sumendum esse. Id vero pendet a varia ratione, qua formulæ pertractantur, atque ad alterutrum systema rite præparantur: ut ostenditur a §. 20 usque ad §. 27. Tandem ab hoc usque ad finem agitur de limitibus valoris $g$ fractionis $\frac{g}{g}$, de quibus tamen cum novo artificio clarius ac fusius in Cap. III. sequenti agatur, quod in hoc dicitur erit cum sequenti comparandum.

§. 13. Progrediens itaque Cap. III ad descriptionem geometricam utriusque systematis accedit, ut ipsa mechanica constructione oculis subjiciatur necessitas horum duorum systematum SY & SA, mutuaque inter ipsa communio, ac diversæ singulorum proprietates, diversaque utriusque fluentium origo atque natura. Ac primum cum quæcumque linearis æquatio duabus fluentibus (ut vidimus) constet, quæ a diversis singulæ originis punctis dato intervallo inter se dissitis prorumpunt, prima quam mens sibi efformat linearis dimensionis notio est illa lineæ rectæ nullis terminis datis definitæ, ut ex hac abscindi possit linea cujuscumque longitudinis datæ, quæ basim sive protonumerum, hoc est unitatem, repræsentet. Primum igitur systema mente conceptum notione illius *Infiniti absoluti* nititur, quod mens abstractione facta a peculiaribus circumstantiis, quibus afficiuntur actualium Corporum dimensiones, sibi efformavit: & hoc est illud, quod systema SY appellavimus, in quo fluentes homologæ a duobus diversis pun-

CAP. III. De geometrica utriusque systematis linearis descriptione.

ctis profectæ, atque eodem minimo successivo fluxu auctæ vel diminutæ, in eadem directione procedunt: ex quo fit ut semper eodem lineari protonumero inter se differant & in ipso minimo vel maximo limite simul conveniant. Fluens igitur major semper, nisi in limite minimo, major protonumero in caussa est cur punctum fluens, in quod simul concurrunt, semper extra puncta extrema protonumeri dati vagetur. Hinc coefficiens numericus majoris fluentis est fractio unitate major hujusce formæ $\dfrac{1+\frac{n}{g}}{\left(1+\frac{n}{g}\right)-\frac{n}{g}} = \dfrac{1+\frac{n}{g}}{1} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{\frac{n}{g}}{1}$ duobus terminis conflata, quorum primus cum semper integram unitatem, in quam non cadit divisio, repræsentet, ostendit majorem fluentem non nisi a puncto alterius fluentis origine fluxum suum incipere æqualem & identicum cum fluxu alterius minoris; ac proinde duobus terminis necessario constare, quorum primus est semper constans ac idem protonumerus, alter vero fluxus a *zero* usque ad infinitum procedens: fluentem vero minorem esse eumdem majoris fluxum: ita ut fluens major sit summa protonumeri constantis & fluentis minoris. Quare minori fluenti factæ minimæ $= 0$ in principio fluxus respondet fluens major homologa minima æqualis constanti & indiviso protonumero; & ambæ maximæ fiunt infinitæ, eadem differentia semper inter utrasque manente. Fluxus vero sive coefficiens minoris fluentis debet esse fractio $\frac{n}{g}$, cujus denominator $g$ est numerus integer ad libitum sumptus sed constans, numerator vero $n$ numerus integer a *zero* usque ad infinitum excurrens, ut & denominatore $g$ habeatur data divisio unitatis, & naturam fluentis terminus non amittat, numeratore $n$ fluente, a quo deducitur quota sit hujusce unitatis pars a successivo fluxu intercepta. Hac ratione conformata formula coefficientium prout requirit hujusmodi systema SY, si tradatur methodus, qua rite hujusmodi coefficientes ad protonumerum applicari possint, habetur vera forma, quam suscipere debet utraque fluens hujusce systematis SY tantum propria. Hæc omnia ac singula usque ad §. 7 in hoc Cap. constructione ipsa' ita oculis ipsis subjiciuntur, ut de eorum veritate nullus ambigendi locus relinquatur.

§. 14. A §. 7 usque ad §. 12 demonstratur necessitas tam absoluti *zero* quam *absoluti infiniti* ( quæ nomine quantitatum transcendentium in P. I. designavimus ) atque eorum mutua consensio atque conspiratio: nec non me-

methodus, qua ab altero ad alterum legitimus transitus obtineri possit. Ex hac doctrina nunc demum asseritur, probatur, & evidentissime explicatur sententia a nobis in Præf. P. I. §. 53 indicata præclarissimi Alembertii, qui, ut negativum vitetur, præponendam semper esse suspicatur cuicumque quantitati negativæ quantitatem positivam ipsa negativa majorem: quæ tamen sententia non est nisi consequutio legitima illius *absoluti infiniti*, quod & ab ipso Alembertio, & universim vulgo tamquam repugnans absolute repudiatur: ut minime mirum videri debeat si conatus pugnantia secum frontibus adversis componere, nec sibi nec aliis satisfacere potuerit, ac multo minus veritatem hanc ad usum traducere.

§. 15. Jactis hujusce systematis SY primis fundamentis, §. 12 ad systema SA investigandum me converto, ex quo & ex §§. seqq. aperte colligitur quantum differant inter se hujusmodi systemata, licet ab alterutro ad alterutrum una ac simplici permutatione formulæ coefficientium $(1+\frac{n}{g})-\frac{n}{g}$ in $(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}$ facilis atque elegans obtineatur transitus. Hac una enim mutatione peracta statim a differentia fluentium constanti, ac summa eorumdem fluenti, transferimur ad summam constantem, & differentiam fluentem: quæ sunt proprietates primæ & necessariæ hujusce novi systematis SA prorsus oppositæ illis, quæ primum systema SY constituunt: ex quibus systema hoc SA intra limites protonumeri contineatur oportet: cum fluentes homologæ a diverso singulæ protonumeri extremo puncto sibi obviam occurrant: ex quo fit ut crescente altera decrescat altera, & illa facta maxima æquali protonumero, hæc fiat minima æqualis *zero*. Repugnat igitur in hoc systemate *maximum infinitum*, quod vidimus necessario conjungi cum maximo limite systematis SY. Quare coefficientes singuli fluentium homologarum hujusce systematis semper sunt unitate minores, & fluentes ipsæ natura, directione, origine longe differunt a fluentibus systematis SY, licet eodem symbolo (ut vulgo fit) efferantur: ut nullum judicium tutum ferri possit circa fluentes, nisi prius systema determinetur, a quo tantum pendet varia formularum fluentium conformatio, cui unice est attendendum: qua primum data determinatur systema, quemadmodum sumpto primum systemate fluentium forma determinatur: de quibus omnibus ac singulis cum nihil sollicita fuerit methodus nota, aut potius hæc omnia prorsus ignoraverit, quid mirum si in suis calculis omnia sus deque ferens, quo se vertat in progressu Operis nesciat, pugnantibus inter se impedimentis undique circumvallata?

§. 16. A nostra vero Theoria horum systematum diversa natura probe explorata, ex qua diversæ manant diversorum systematum proprietates, ac diversa formularum fluentium conformatio, singula in suo proprio systema-

te mira elegantia atque ſimplicitate collocantur: quibus ſi addas artificium §. 22, quo coefficientes numerici a lineari quantitate, ſive a protonumero unitatis geometricæ vicem gerente, ſegregantur (qua ſeparatione ſtatim apparet fluxus originem in ſolis coefficientibus numericis ineſſe, quorum applicatione ad protonumerum fluentes geometricæ oriuntur), ita ſolida ac firma hujuſce Scientiæ principia jaciuntur, ut difficultates omnes in methodo vulgari prorſus inexſuperabiles nullo negotio evaneſcant. Si enim animadvertas quæ docuimus §. 13, diverſam ſcilicet protonumeri conſtantis directionem determinare tantum fluentium directionem ad unam potius quam ad oppoſitam plagam progredientium; diverſam vero coefficientium homologorum diſpoſitionem atque collocationem diverſam ſyſtematum naturam conſtituere; illa prima mali labes, in qua hujuſce doctrinæ ignoratione in ipſo ſtatim limine hæret vulgaris Methodus negativi ſcilicet æqualis poſitivo, ſemper vitatur. Ex doctrina vero §. 15 oſtenditur ſignum $=$, cui tantum perfectæ æqualitatis notio inter æquationis membra vulgo tribuitur, ſignificare etiam neceſſario vinculum illud, quo ſyſtemata ipſa SA, SY homologa uniuntur, in quo caſu quantitates prorſus inæquales hoc ſigno invicem copulantur: quod enim æquale eſt in uno ſyſtemate, eſſe neceſſario inæquale in altero illic demonſtravimus. Hiſce vero duobus graviſſimis impedimentis ſublatis, quis non videt quam pleno alveo veritates adhuc imperviæ manare debeant, quibus errores ſane exitioſi ex hac duplici falſa opinione fluentes omnino tolluntur?

§. 17. Illud vero non minoris momenti, ac in tota Analyſi utilitatis, ne additionem cum differentia confundamus, accedit, quod in ſyſtemate SA (ut docet §. 21) cum fluentes homologæ a diverſis punctis profectæ ſibi obviam occurrant, ſi a diverſo originis puncto ad idem reducantur, ab earum ſumma conſtanti ad differentiam fluentem; contra ſi ab eodem ad diverſum punctum traducantur, a differentia fluente ad ſummam conſtantem transferimur. In ſyſtemate vero SY, in quo fluentes a diverſo originis puncto manantes per eamdem ſimul directionem hinc vel inde progrediuntur; ſi ad diverſa hæ originis puncta referantur, differentiam conſtituunt conſtantem; ſi vero ad idem punctum reducantur, a differentia conſtanti ad ſummam fluentem ſtatim fit tranſitus. In Capite vero ſequenti artificium novum tradetur, cujus ope ſumma a differentia in utroque ſyſtemate ſine ulla ámbiguitate ſecernatur. Interim §. 23 redditur ratio, cur etiam in hoc ſyſtemate (quemadmodum fecimus §. 5 reſpectu ſyſtematis SY) formula

$$\frac{1}{1} = \frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}}{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}} \text{ ſit anteferenda formulæ } \frac{g}{g} = \frac{(g - n) + n}{(g - n) + n},$$

ad quam prout ſimpliciorem a methodo vulgata univerſim primam, reductio-

ctione ad eumdem denominatorem facta, revocandam esse jubetur. Tandem finem hoc Caput imponit demonstrando ex antecedentibus necessario consequi, *absolutum zero* ita pendere in origine ab *absoluto infinito* cujus notionem ex præexistentibus finitis abstractione facta mens primum sibi efformat, ut hujusce notione sublata etiam notio ipsius *zero* evanescat: mentis enim notiones negativæ a carentia notionum positivarum prius existentium oriantur necesse est.

§. 18. Quoniam vero formulæ Capitum superiorum, quæ coefficientes fluentium homologarum utriusque systematis complectuntur, erutæ fuerunt a linea integra protonumerum referente duobus tantum punctis extremis datis terminata, atque hinc deductæ fuerunt consequutiones omnes, quas supra demonstravimus; ut intimius diversa horum coefficientium natura perspiciatur, Caput sequens IV totum in eo est, ut novo puncto dato medio, quo bifariam dividitur protonumerus, novas & quidem maxime necessarias affectiones investiget, quas nullo modo sine hac nova puncti medii dati conditione assequi poterant Capita superiora. Hac igitur nova conditione posita §§. 5, & 6 primum demonstrant coefficientes singulos homologos utriusque systematis ratione hujusce novi puncti dati in duos terminos dispertiri, quorum unus est semper dimidium protonumeri, alter vero natura sua fluens infinitis modis intra limites systematis determinandus: ea tamen lege ut in SA dimidium protonumeri sit semper majus termino fluente; ideoque fluens major æquetur aggregato dimidii protonumeri & termini fluentis; minor vero eidem dimidio protonumeri, a quo subtraxeris eumdem fluentem terminum. In systemate vero SY, in quo major fluens semper major est protonumero, æqualis est termino fluenti semper majori dimidio protonumeri (cui tantum in limite minimo æquatur) cum additione dimidii protonumeri: fluens vero minor æqualis est termino eidem fluenti, detracto dimidio protonumeri. Hinc ostensis §. 7 limitibus, intra quos tam fluens major, quam minor utriusque systematis naturam suam majoris & minoris fluentis retinere possunt, eruitur non solum veritas, sed etiam necessitas illarum æquationum, in quas incidit Analysis communis suis symbolis utens; nempe $x = a + y = a - y = y + a = y - a$: atque vera notio signi $=$ quo consociantur; quas tamen æquationes licet necessarias (cum iisdem symbolis precario sumptis illa exprimat fluentes utriusque systematis, atque ob id ejusdem naturæ & intra eosdem limites contineri falso credat) nullo modo cum veritate potest conciliare. Ex quorum omnium ignoratione Analysis communis imaginarii impedimentis atque difficultatibus undique irruentibus circumsepta, Cultores suos in diversa ita distrahit, ut sibi invicem exprobrent falsitatem illarum æquationum, quas tamen si quando, quod sæpe fit, in hasce ipsi incidunt, libenter sibi permittunt, atque mordicus defendunt.

CAP. IV. Traditur nova ratio apprime necessaria concinnandi formulas generales fluentium utriusque systematis.

§. 19. Nova vero hæc Theoria, legitime statuta vera natura & configuratione sane diversa, qua in utroque systemate necessario afficiendus est termi-

minus ille fluens, quem ſupra diximus cum dimidio protonumeri eſſe conjungendum, oculis ipſis oſtendit naturam termini hujus fluentis in ſyſtemate SA ita eſſe comparatam, ut nulleſcente in limite minimo, non ultra dimidium protonumeri in limite maximo pervenire poſſit. Contra vero in ſyſtemate SY ita afficitur, ut nunquam nulleſcat, ſed a minimo æquali dimidio protonumeri verſus infinitum nullo limite dato concluſum ( quod diximus abſolutum ) progrediatur. Quibus cognitis tenebræ omnes, quibus miſere circum fundebatur Analyſis vetus, hac exorta luce, repente disjiciuntur, ac evidentiſſime patet differentia, quæ intercedit, maxima inter fluentes homologas ſyſtematis SA, & fluentes homologas ſyſtematis SY, quæ inter ſe natura toto cælo diſtant, nec formam propriam unius in alterius formam commutare poſſunt, licet aliquando valore inter ſe æquentur. Illud etiam accedit, quod hiſce rite ſervatis formulæ fluentium utriuſque ſyſtematis cum nunquam fieri poſſint negativæ, comparationem negativi cum poſitivo neceſſario ac perpetuo vitant.

§. 20. Hiſce præmiſſis ad novas definitiones tradendas, atque ad nova Theoremata demonſtranda Caput hoc (§§. 10, & ſeqq.) accedit, quibus confirmata primum neceſſitate duarum fluentium homologarum ad integrum ſyſtema conſtituendum, manifeſte demonſtrat, contra communem opinionem omnium Analyſtarum conſenſu receptam, æquationes, in quibus una tantum fluens reperitur, tantum abeſſe ut ſint, quemadmodum vulgo creditur, ad unum tantum valorem determinatæ, ut majori indeterminationi obnoxiæ ſint, quam quæ duabus fluentibus conſtant: quia primæ cum ſint limitis, in quo tantum utraque ſyſtemata conveniunt, ad alterutrum ſyſtema aptari poſſunt: quæ vero duas continent fluentes ab ipſa, qua afficiuntur, diverſa formulæ configuratione, alterutrum ſyſtema jam conſtituunt. Explicata porro §§. 14 & 15 natura ac proprietate fluentium homologarum, maxime intereſt ad Prop. IV & ſeqq. animum intendere, in quibus oſtenditur coefficientes homologos utriuſque ſyſtematis ſi in numerum integrum, vel in fractionem quamcumque ( excepta generali $1^{\circ} = \frac{g}{g}$ ) ducantur, non poſſe amplius eſſe inter ſe homologos, nec proinde ipſorum fluentes, quæ peracta multiplicatione diſtrahuntur invicem, nec primam retinent ſocietatem, ob quam vere homologæ dicebantur. Veritas hæc nova apprime neceſſaria, & a communi prorſus opinione remota, illuſtratur & confirmatur §§. 20, 21: ex quibus ſe palam prodit error veteris Analyſeos ſane exitialis, quæ univerſim docet iiſdem factoribus atque diviſoribus, quibus in quacumque æquatione afficitur quantitas conſtans, ſive protonumerus, iiſdem & *variabiles* ſymbolis $x$, $y$, &c. ab ipſa enunciatas neceſſario affici oportere; quod tamen æquationes, quæ primum erant legitimæ, perturbat, & locum geometricum ad quem pertinebant, diſſolvit continuitate ſublata. Ex Canone igitur §. 29 tradito ſtatuitur in æquatione legitima duabus fluentibus homolo-

gis

gis conflata alterutrum ſyſtema complectente non niſi protonumerum afficiendum eſſe pro re nata factore aliquo, intactis manentibus fluentibus ac ſi non eſſent, ne hiſce factore communi diſtractis, ſi ſimul cum protonumero afficiantur, perturbetur ſyſtematis, & æquationis intima ac neceſſaria continuitas.

§. 21. Ut hoc igitur vitetur, & quæcumque fluens quocumque factore afficiatur, quin fluentis ipſius unitas perturbetur, §. 23 traditur certa regula, qua id conſequi legitime poſſit: hîc vero difficultas non levioris momenti ſuboriri poterat, quæ proinde neceſſario tollenda erat. Cum enim ſuperius demonſtratum fuerit tam quamcumque fluentem homologam ſolitariam utriuſque ſyſtematis præparatam tertii puncti ope, prout Caput hoc docet, quam quodcumque ſyſtema integris duobus conſtare terminis, quorum unus conſtans eſt, alter fluens; quæri poterat qua ratione ac methodo diſtinguenda eſſet formula fluentis ſolitariæ, que non eſt niſi unum ex elementis ſyſtematis a formula, qua continetur aggregatum duarum fluentium integrum ſyſtema complectentium. Docet itaque §. 30 tunc formulam unum & integrum ſyſtema exhibere, quando terminus conſtans, quocumque factore afficiatur, tamquam unus & individuus ſumitur, integrum protonumerum repræſentans, puta $\frac{ha}{g}$: tunc enim intelligitur tranſitus factus ab integro ſyſtemate protonumeri $a$ ad alterum ſyſtema integrum ejuſdem naturæ ſed protonumeri integri $\frac{ha}{g}$. Quod ſi coefficiens $\frac{h}{g}$, quo afficitur protonumerus $a$, intelligatur ſejunctus ab ipſo protonumero $a$, & vere coefficientis numerici munus ſubire, tunc formula non niſi una ex homologis fluentibus repræſentat, & æqualis portioni $\frac{h}{g} = \frac{h}{(g-h)+h}$ in SA $= \frac{h}{(g+h)-h}$ in SY protonumeri $a$, cui reſpondet altera homologa $\left(\frac{g-h}{(g-h)+h}\right) a$ in SA, vel $\left(\frac{g+h}{(g+h)-h}\right) a$ in SY, ut ſimul additæ in SA, vel una ab altera ſubtracta in SY integrum protonumerum $\frac{1}{1}\,a$ exhauriant: quibus illuſtrantur atque confirmantur quæ diximus in P. I. Lib. I. Capp. IV & V. *De diviſione unius ſyſtematis* &c. ac *de legitima eorum conjunctione*.

§. 22. Inſuper Caput hoc demonſtrat §. 27 (quod multum intereſt adver-

vertere ) in fractione generali $1^{\circ} = \frac{g}{g}$, licet $g$ poſſit eſſe productum duorum vel plurium factorum, tamen ſemper in utroque ſyſtemate lineari tamquam aggregatum plurium unitatum, a quibus unus tantum numerus ſimplex conſtituitur, ſumendum eſſe, qui ſemper in quotvis paria numerorum naturalium ſimplicium diſpertiri poteſt, & ad utrumque ſyſtema præparari. Quod ſi $g$ eſſet irrationalis, puta $\sqrt{g}$, tunc non amplius eadem ratione, qua in duos numeros ſolitarios ſegregatur rationalis $g$ dividi poteſt: nova tamen methodo jam tradita §. 24 oſtenditur quo artificio ex §. 23 deſumpto id obtineri liceat. Tandem §. 26 oſtenditur irrationalitatem vere cadere in terminum fluentem, cum ad rationalitatem terminus conſtans in iſtis formulis reduci poſſit ( eſt enim $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \pm o = 1 \pm \frac{m\sqrt{g}}{g} \mp \frac{m\sqrt{g}}{g} = 1 \pm \frac{\sqrt{m}}{g} \mp \frac{\sqrt{m}}{g}$ ): quomodo vero id obtineri poſſit hic evidenter oſtenditur. Ex quibus eruitur §. 28 formulas analyticas nunquam poſſe ab imaginario neceſſario infici: cum hoc tantum oriatur ex male inſtituta ſubducendi calculi ratione, & ex ignoratione eorum, quæ ab hac Theoria docentur. Cum enim formulæ nequeant ex dictis fieri imaginariæ niſi ratione termini fluentis imaginarii: cum hic terminus fluens in formula generali fluentium ſimul addatur & ſubducatur, quippe eſt $1 \pm \frac{om}{g}$, facile erit ab hac, ſi irrepſerit, imaginarium tollere, cum ſit $1 \pm \frac{om\sqrt{-1}}{g} = 1 + (\sqrt{-1} - \sqrt{-1})\frac{m}{g} = 1 \pm \frac{om}{g}$: quo facto imaginarium perpetuo evaneſcit. Hiſce adde quæ diximus §. ultimo 31 ad hanc communibus formulis confirmandam veritatem, qua quod deſperatum hactenus fuerat, nullo negotio obtinetur, hac noſtra Theoria in auxilium vocata.

CAP. V. De primis fluentium abſtractarum operationibus.

§. 23. Tandem Capitum ſuperiorum præſidio ad primas in numeris operationes tradendas Cap. V accedit: tantæ molis erat hæc prima hujuſce Scientiæ fundamenta firmiter jacere, quibus ſine in devia duci oportere Methodus communis, quæ in maxima horum omnium ignoratione verſatur, ſuo ipſa periculo experta fuit. Ac primum cum quemvis numerum ac ipſum $o$ & $\infty$ conſtantis ſive protonumeri, & fluentis abſtractæ naturam induere poſſe docuerim, ac alterutrum ex diverſa formulæ, qua complectitur, præpara-

paratione pendere, §§. 3, 4, 5, 6 traditur modus, quo datus quicumque numerus vel in protonumerum, vel in fluentem abstractam utriusque systematis convertendus sit. Cum vero triplici ratione numerus quicumque in fluentem abstractam transmutari possit, & ad utrumque systema reduci, prout docent tres diversæ Capitum superiorum formulæ generales, ostenditur in cujuscumque numeri applicatione instituenda quantum differat unam potius, quam alteram inire viam: licet enim numeri assumpti valor idem perseveret, tamen ex diversa forma, qua afficitur, diversa ejusdem numeri natura necessario pendet: cum numerus idem sub diversa formula constitutus modo unam ex fluentibus homologis alterutrius systematis; modo differentiam fluentium homologarum in systemate S A; fluentem modo majorem, modo minorem systematis S Y; summam modo fluentium homologarum in eodem systemate S Y repræsentet pro varia ratione qua numerus ipse modificatur, & ad aliquam ex formulis generalibus traducitur. Verum cum hæc omnia & singula non semper cuicumque numero aptari possint, & ad utrumque systema præparari, exemplis partialibus §. 7 usque ad §. 14 re ipsa ostendit, utrum numerus assumptus (non excepto *o*, & $\infty$) omnes & singulas hujusmodi affectiones varia ipsius formulæ transformatione suscipere queat, vel nonnisi ad aliquas tantum aptari.

§. 24. Sumpta vero occasione ab exemplis VI & VII, in quibus agitur de fluente *o* & $\infty$, traditur §§. 15, 16, 17, 18 methodus, qua dignosci possit quid revera significent fractiones $\frac{o}{o}$, & $\frac{\infty}{\infty}$ (de quibus tam multa sed incerta in vulgari methodo dicta sunt) dummodo hujusmodi fractiones lineares ponantur: quid vero sibi velint in aliis dimensionibus cum de istis sermo erit, demonstrabitur. Explicata porro natura istarum fractionum ostenditur fractionem $\frac{o}{o}$ non nisi cum systemate S Y conciliari posse: fractionem vero $\frac{\infty}{\infty}$ utrique systemati rite aptari posse: ex quibus etiam deducitur *o* cum $\infty$ absoluto pari passu, sed inverso procedere, & utrumque in Analysi necessarium, dummodo quid ambo vere sint, & cui systemati conveniant, & quomodo rite in formulis applicari possint, probe noscatur. Ostenditur enim §§. 19 & 20 præter notionem ipsius $\infty$ absoluti male conceptam, ab Analysi communi duplicem *zero* naturam prorsus ignorari: quarum prima est, quando *zero* indicat subtractionem cujuscumque quantitatis a se ipsa, in quo casu recte exprimitur per $h - h$ vel $o.h$, male per *o*: secunda quando significat numerum unum & individuum fluentem, qui continua diminutione ad primum punctum originis, a quo discesserat, iterum regressus, ite-

c rum

rum nullescit, & tunc recte nota *o . o* designatur. Ex hujusce duplicis *zero* naturæ ignoratione innuitur, gravissimos in Analysim communem errores irrepsisse: cum & fluentes quæ inæquales sunt, sumantur æquales, & differentia fluentium, quando est aliquid in calculis, *zero* fiat: & id maxime in systemate SY, in quo nec summa nec differentia fluentium potest esse *zero*. Quos errores ut tollerent postremis hisce temporibus Analystæ & magni quidem nominis, duplicem *zero* geometricum unum, metaphysicum alterum, nec non *zero* reale, & *zero* imaginarium, ac unumquodque a cæteris natura differre, frustra & perperam commenti sunt.

§. 25. Hisce explicatis §§. 21 & seqq. traduntur leges, quibus docemur quomodo cuicumque numero ea diversa formula aptetur, quæ diversæ naturæ, quam suscipere potest, rite respondeat. Ex quibus §. 29 eruitur in quovis numero distinguendam esse ejus naturam ab ejus valore; potest enim determinari valor absque natura, & absque valore natura, & potest determinari utrumque. Determinato tamen valore nihil omnino proficitur: contra vero determinatio naturæ determinat Loca geometrica, quibus sine nulla hæc Scientia reputanda est, quæcumque sumatur valoris determinatio. Quare lineares formulæ generales §. 30 pro varietate naturæ ac systematum sunt prius concinnandæ, nulla ad numeri valorem ratione habita, quibus liceat pro re nata descriptione Locorum inveniri limites, intra quos valores numerici continentur: quibus prætergressis simul cum valore mutatur formula, natura, atque Locus geometricus. Hinc §. 32 ad absolutam determinationem obtinendam præter dimensionem tria necessario arbitrio, aut ex peculiaribus circumstantiis data sint oportet, natura scilicet, systema, atque valor. Quæ omnia atque singula Analysis communis ad valoris tantum determinationem intenta cum prorsus ignoret, aut negligat; illum tribuit sæpe ac sæpius numeris valorem, qui cum formula assumpta metaphysice repugnat: ex qua absoluta repugnantia, non ex alia caussa, *imaginarii* origo derivanda est.

§. 26. Porro ex formulis generalibus §. 30 eruitur duplex methodus dividendi in utroque systemate quemcumque numerum in suas fluentes homologas: & ostenditur usque ad §. 38, donec numeris rationalibus utimur, utramque methodum adhiberi posse: formulæ enim unius methodi facile in formulas alterius transmutari possunt: sed quando numeri rationales simul cum aximetris, vel aximetri tantum se se offerunt, non nisi secunda methodus a formulis VI$^a$ & VII$^a$ exhibita usui esse potest, si tertium punctum datum quærimus: termini enim formularum ex numeris rationalibus & aximetris conflati nunquam possunt ad unum atque individuum numerum rationalem reduci ita, ut denominator sub uno atque individuo numero constanti efferri possit ( quæ quidem conditio in utroque systemate apprime est necessaria ) nisi secunda utamur methodo, quæ denominatorem rationalem constantem bifariam secat, atque uni dimidio addit, alteri detrahit eumdem numerum aximetrum, qui ideo fit fluens: quo uno artificio fluentes ad formulam

lam $VI^{am}$ vel $VII^{am}$ fas eſt reducere: nec ad $IV^{am}$ vel $V^{am}$ referri poterunt, niſi fluens terminus rationalem fluendo evadat.

§. 27. Tandem ex toto Capite eruitur generale ac maxime neceſſarium Corollarium, quod ſcilicet in ſingulis fluentibus ſolitarie ſumptis, quæ conſtant ex termino conſtanti & fluenti, terminus fluens, tamquam ſi non eſſet, omittendus eſt, retento tantum conſtanti, quando ab una natura ad alteram fluentium, ab uno ſyſtemate ad alterum converſio facienda eſt. Quæ quidem conſequutio quanti in tota Analyſi facienda ſit, pro re nata potius, quam hîc præceptis abſtracte traditis intelligi poteſt. Quare ut erroris periculum caute vitemus, conſultius erit, ſumpta una fluente ſuam homologam invenire, ac ſimul comparare: ex qua comparatione termini fluentes identici, utpote diverſo ſigno affecti, evaneſcunt, manentibus conſtantibus diverſis, ex quorum ſumma in ſyſtemate SA, ex differentia in ſyſtemate SY componitur denominator fractionis, qui vicem conſtantis ſemper repræſentat.

§. 28. Præter vero illas, quas recenſuimus, utilitates ex formulis $VI^a$ & $VII^a$ Cap. V. §. 30 manantes, quibus tantum fluentes aximetræ contineri ac regi poſſunt, Cap. hoc VI idem argumentum urgens a §. 1 uſque ad §. 7 oſtendit ex alterutra generali formula ad normam formulæ $VI^a$ vel $VII^a$ conflata deduci poſſe tam SA quam SY, prout diviſio inſtituatur per numerum majorem, aut minorem qui in formulis habetur. In formula ex. gr.

CAP. VI. De fluentibus abſtractis numero conſtanti & fluenti ſingillatim conflatis, ac de illis exponente negativo — 1 affectis.

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}$$, quæ ſic elata, evaneſcente numero 7, pertinet ad SA; ſi diviſio fiat per numerum majorem 15, qui eſt ſumma fluentium, ad idem ſyſtema SA formula pertinebit: at ſi fiat diviſio per minorem 7, qui eſt fluentium differentia, tranſitus fit ad ſyſtema SY. Ratio vero hujuſce ſyſtematum tranſmutationis deducitur ex §. 1.

§. 29. Hiſce animadverſis ad quædam nova Theoremata demonſtranda §§. 8 & ſeqq. Caput hoc accedit. Ac primum unius Theorem. I. auxilio evidentiſſime demonſtrat, ſingulorum artificiorum imbecillitate atque fallacia, quibus utitur vetus Analyſis, in ipſo ſtatim limine neceſſario in illos errores ſupra commemoratos ipſam incidere oportere. Inter quæ artificia jam pro re nata in Capp. ſuperioribus ad trutinam revocata hîc occaſione ſumpta nunc primum oſtenditur illo etiam vero ac generali principio perpetuo abuti, quo docetur poſſe mutatione ſignorum quemcumque terminum ab uno ad alterum ſigni = membrum rite transferri.

§. 31. Verum in quo maxime præſtat Caput hoc eſt Theoria exponentis negativi — 1 nova prorſus atque in veteri Analyſi hactenus inaudita, cujus prima hîc jaciuntur fundamenta, quorum ope arcana quædam in metho-

do communi prorſus impervia nullo negotio enodantur, & graviſſimæ difficultates atque errores omnium conſenſu recepti, in quos paſſim impingunt veteris Analyſeos Cultores, mira facilitate tolluntur. Quoties enim vetus Analyſis (quod ſæpe in Calculis, quos ſublimiores vocat, uſuvenit) in poſitivum æquale negativo, in directum æquale inverſo incidit, ea comminiſcitur ut ab hiſce difficultatibus ſeſe expediat, quibus longius quam dici poteſt a veritate abducitur. Hæc tamen omnia ac ſingula incommoda a noſtra Theoria proſpere tolluntur. Cum enim Theorem. II & IV oſtenderit formulas tam ſummæ fluentium, quam differentiæ unius ſyſtematis inverſas eſſe formularum alterius ſyſtematis; ſtatim patet formulas unius ſyſtematis exponente negativo — 1 affectas nihil aliud ſignificare, niſi tranſitum ab eo ſyſtemate, in quo primum ipſæ ſumptæ fuerant, ad alterum homologum, in quo non erant. Quod cum idem obtineri poſſit facta exponentis negativi — 1 translatione in coefficientem ea lege, quam Theorema V docet, duplex ſtatim oritur methodus æque legitima exponentis ſcilicet, aut coefficientis negativi — 1, qua ab uno ad alterum ſyſtema legitimus tranſitus haberi poteſt. Quinimmo cum duplici diverſa ratione exponens — 1 negativus in coefficientem translatus numeris noſtrarum formularum applicari poſſe oſtendatur; Theorem. VI & VII eruitur ex hac diverſa coefficientis applicatione modo fluentium homologarum, ſyſtematum modo permutationem obtineri. Tandem Theorem. VIII & IX oſtenditur ſummam fluentium in S A ſemper poſitivam ſumendam eſſe, differentiam poſitivam modo, modo negativam: contra in S Y Theorem. X & XI differentiam fluentium ſemper eſſe poſitivam, ſummam vero poſitivam modo, modo negativam. Quibus probe intellectis intelligitur etiam §. 26 nunquam fieri poſſe, ut formulæ utriuſque ſyſtematis, quæ vel fluentes ſingulas, vel ſummam fluentium in S A, aut differentiam in S Y repræſentant, ex poſitivis in negativas transferantur. Tandem proſpere ſublatam gaudemus duplicem illam & ambiguam ſigni — 1 notionem, cui quicquid obſcuri, quicquid impervii, quicquid abſoni in calculo communi dolemus, præcipue tribuendum eſt. Cum enim ſignum — 1 terminis præfixum non niſi veram ſubtractionem identici ab identico in poſterum ſignificare noverimus, Theoria ſigni ± tandem in tuto collocabitur, in qua firmanda veterem Analyſim fruſtra hactenus & perperam inſudaſſe illuſtriorum noſtri temporis Analyſtarum teſtimonia aperte declararunt.

§. 31. Hiſce explicatis appoſita TABULA §. 24 exhibet formulas generales utriuſque ſyſtematis utraque methodo exponentis ſcilicet, & coefficientis — 1 negativi conflatas: ac oſtenditur §. 31 methodum exponentis negativi — 1 eſſe in origine primam, a qua illa coefficientis negativi — 1 minus generalis & caute adhibenda regitur ac moderatur. Tandem evidentiſſime demonſtratur Analyſim communem non ſolum omnia ac ſingula hæc ſubſidia ad legitimam ſuam formam atque incrementum conſequendum neceſſaria hactenus ignoraſſe; ſed a ſua origine tam infirmis principiis ſuperſtructam

fuiſ-

fuisse, ut nunquam ad hæc assequenda par esse poterit, nisi veteri ejurata penitus forma in nostram hanc novam novissime renascatur.

§. 32. Satis explicata in Capp. supp. natura ac diversa fluentium abstractarum utriusque systematis conformatione, nec non affectionibus illis præcipuis, quæ ex varia harum combinatione atque transformatione oriuntur; in hoc Capite, ut harum Fluentium Theoria perficiatur, ad legitimam fluentium abstractarum ad protonumerum applicationem docendam acceditur. Ac primum §. 2 ostenditur protonumerum numericum abstractum, quicumque ille sit, nota 1 jure repræsentari: quicquid enim est cum se ipso comparatum, est id quod est: quod donec terminus comparationis est, est necessario unitas, cui cæteræ ipsius partes comparari quidem possunt, ipsum vero nemini comparari. Quod si in geometricum transformetur, quamcumque geometricam quantitatem cujuscumque dimensionis atque naturæ referre potest, quæ in suo genere una & individua censenda est ( hîc de lineari tantum agitur ). Quomodo vero a protonumero ad protonumerum transitus recte fiat §§. 3, 4, 5, 6 docent. Hic vero protonumerus ( §. 7 ) nihil influit ad systematum naturam determinandam, bene vero ad speciem. Natura enim determinatur a varia fluentium abstractarum, sive coefficientium configuratione, quorum homologi rite præparati nunquam ( §. 8 ) signo — afficiuntur: hinc ( atque magis §. 21 ) deducitur nullam quantitatem absolute & in se spectatam, in quacumque positione sumatur, dici posse negativam, & signo — affici, quod non nisi subtractionis efficiendæ indicium est: qua doctrina duplex hujusce signi — notio ( ut Cap. superiori diximus ) omnino tollitur. Item §§. 10, 11 docemur fluentes homologas symbolis M, N, vel ut fit $x$, $y$ expressas nunquam coefficiente afficiendas, quamcumque subeant mutationem: si enim ( ut vulgo fit ) coefficiente afficiantur, *homologoitate* sublata systematis tollitur unitas: protonumero tantum coefficiens applicari potest, quando in alium convertendus sit. Hinc duo hæc elementa, quibus quæque fluens determinata constat, diversæ omnino sunt naturæ, ac diversis prope legibus moderandæ. Fluentes enim abstractæ a suo originis puncto prorumpentes per omnes magnitudinis gradus a systemate requisitos successivo continuo fluxu perveniunt, quin ullo coefficiente determinato afficiantur: protonumerus autem, qui constans est, non nisi additione vel subtractione continua, hoc est multiplicatione aut divisione, crescere aut minui potest. Ex quo patet quantum intererat in Capp. supp. hæc duo elementa accurate in formulis distinguere. Ex hac horum elementorum diversa natura §§. *9* & *33* duplicis *zero* naturam derivamus. Quibus explicatis eruitur §. *16* in formulis analyticis nullam universim ad valorem peculiarem habendam esse rationem ( & §. *39* nullam haberi posse ): ac insuper *ignotum* quod in calculo communi semper cum fluente confunditur, a fluente longe distare.

CAP.VII. De legitima Fluentium abstractarum ad protonumerum applicatione.

§. 33. Intimius autem ad naturam hujusce Analyseos Geometricæ investigandam §§. 17, 18 accedentes, ostendimus Scientiam hanc duabus diversis Scientiis invicem separatis coalescere, *Arithmetica* scilicet *universali*, sive

*Ana-*

*Analysi abstracta*, quæ de quantitate discreta agit, ac illa a Geometriæ affectionibus desumpta, quæ doceat quanam ratione Analysis abstracta ad quantitatem continuam sive ad geometricam rite applicari possit. Prima igitur origine & natura universalior primum principiis generalibus ac certis munienda est, ut formulæ fluentium abstractarum rite præparentur, deinde regulæ tradendæ, quibus hujusmodi abstractæ formulæ cum geometricis legitime consocientur. Quod cum totum hoc magnum quidem & absolute necessarium Analysis communis prorsus neglexerit, ac in maxima horum omnium ignoratione versetur; necesse fuit a §. 19 usque ad §. 29 re ipsa, ac exemplis numericis, nec non duarum TAB. descriptione, quid facto sit opus ad hanc, quam intelligimus, Scientiam ex integro instaurandam, dilucide demonstrare.

§. 34. Hisce jactis principiis principia generalia, quibus nititur Analysis communis, ad examen vocantur, quorum omnium primum est ipsa *æquatio*, quam, tamquam primum suæ inquisitionis fundamentum, sibi primum efformare necesse fuerat, in cujus solutione obeunda tota hujusce Scientiæ vis, potentia, atque veritas versatur. Tamen ( quis crederet ! ) hæc æquationum vulgaris compositio a falso derivata principio, falsitatis omnino laborat. Cum enim ipsa æquationem nihil aliud universim esse statuerit, nisi rationem absolutæ æqualitatis valoris, quæ inter duas diversas quantitates intercedit; in ipso statim primo, quo sistit, gradu in devia ducitur, nunquam in viam reditura. Postquam enim demonstraverimus §. 26 quantitates symbolis M, N, vel $x$, $y$ vulgo expressas esse omnino & in omnibus indeterminatas ( quas proinde indeterminatas vocamus ), quæ necessario in suas fluentes coefficiente & protonumero constantes ad aliquod systema determinatas ( quas proinde fluentes determinatas appellamus ) transmutandæ sunt, ut aliquid veri eruere liceat (ab ignoto enim absoluto non nisi ignotum haberi potest ); statuimus tandem §. 27 æquationem in hisce formulis usu receptis nihil aliud esse, nisi comparationem ejusdem numero quantitatis M, vel N omnino indeterminatæ cum se ipsa sub forma fluentis determinatæ constituta: ita ut quæ hîc æquatio dicitur non sit comparatio æqualis diversi cum æquali diverso, sed *identici omnino indeterminati cum identico natura, positione determinato:* quo statuto corruit necessario primum, quo tota Scientia hæc nititur, fundamentum. Quam vero necessaria fuerat hujusce, definitionis instauratio Cap. seq. & in progressu hujusce Operis palam fiet.

§. 35. Hoc primum veteris Analyseos fundamentum prorsus dirutum satis profecto esset ad eam omnino labefactandam: sed ne videamur nimis illiberaliter Scientiam hanc tanta temporis & illustriorum Virorum auctoritate suffultam temerario ausu exagitare ( ut quidam nobis exprobrarunt ) §. 29 usque ad §. 38 artificia singula, quibus utitur in solutione suarum linearium æquationum ( de quibus tantum in hoc Libro agitur ) quas in duo genera, determinatarum scilicet, & indeterminatarum dispertit, brevi expenduntur:

ac

ac singula falsa, manca, & minus apta declarantur. Et sane artificium I.$^{um}$, quo utitur, est Collocatio ex una æquationis parte omnium terminorum, in quibus incognita reperitur, & ex altera omnium qui cogniti sunt, opportuna signi præfixi ± mutatione, ut possit valorem incognitæ multiplicatione ac divisione a coefficiente liberatæ obtinere. Hoc tamen fuisse male applicatum & errorum caussam §§. 29, 30 demonstratur. II.$^{um}$ est Permutatio incognitarum ab una ad alteram æquationis partem, vel transpositio omnium terminorum tum incognitorum, cum cognitorum ab alterutra æquationis parte, ut æquatio *zero* æquetur: quo ultimo utitur ad probandam æquationum veritatem. Verum §§. 31, 32, 33, 34, 35 evincitur hanc permutationem, vel transpositionem usu receptam, male intellectam, ac pejus ad usum traductam inutilem atque exitiosam prorsus esse, ignorata quidem duplicis *zero* natura. III$^{um}$, quo uno ad æquationum indeterminatarum solutionem utitur, si plures sunt, est illud *eliminationis* unius aut plurium incognitarum, ut ad unam determinatam tandem deveniatur. Quod tamen in quas fallacias & errores ducat §. 37 ostendit. Verum si una tantum æquatio indeterminata solvenda proponatur, tunc Analysis vetus omni prorsus proprio ac suo destituta auxilio, cogitur ad constructionem geometricam confugere, hoc est opem a Geometria implorare, cui potius danda erat. Quæ constructio tamen precaria, utpote nullo nec ab ipsa Analysi abstracta, nec a Geometria certo nixa principio quantum utrisque damni inferat, legitima harum formularum constructio in hoc Capite superius exhibita aperte declarat. Ex quibus omnibus fidenter pronunciare possumus, hactenus *nullam potius quam mancam nos habere Analysim proprie dictam*. Tandem a §. 38 usque ad finem vera generalia principia ad legitimam Analysim geometricam ex integro restaurandam compendio traduntur.

*§. 36.* Cum vero fluentes quascumque utriusque systematis duobus elementis superius constare demonstraverimus, coefficiente nimirum numerico fluenti, & protonumero constanti; patet fluentes quascumque universim loquendo esse in ratione composita suorum coefficientium atque protonumerorum. Itaque si eodem protonumero gaudeant, erunt in ratione simplici coefficientium, qui cum sint fluentes, erit & ratio ipsa fluens: si vero coefficientes sint iidem, erunt fluentes ut protonumeri, atque ideo in ratione constanti. Cum ex utraque hac diversa ratione seorsim sumpta diversæ fluant veritates adhuc ignotæ apprime necessariæ ad Theoriam hanc promovendam; in iis quæ a prima ratione profluunt Caput VIII, quæ sequuntur ex secunda persequendis Cap. IX impenditur. Ac primum in Cap. VIII usque ad §. 6 indicatur methodus, qua licet a fluentibus ejusdem protonumeri ad earum rationem numericam transitum facere, & viceversa. Verum cum eadem ratio haberi possit tam inter fluentes homologas ejusdem systematis, quam inter fluentes, quæ nullo modo inter se consociari possunt; necessarium esse ostenditur determinare prius systema ac naturam fluentium, ut inter se legitime, & cum utilitate possint comparari. Hoc posito cum illud

CAP. VIII. De ratione fluenti, qua Fluentes se se respiciunt.

lud

lud etiam demonſtretur tam ex datis duabus fluentibus homologis forma determinatis, reductione facta fluentium ad minimos terminos, (ſublato ſcilicet communi denominatore ac protonumero) deveniri ad rationem ſimplicem numericam; quam ex eadem ratione numerica ad rationem ambas fluentes homologas alterutrius ſyſtematis continentem tranſitum fieri poſſe; conſequitur ex datis duabus fluentibus indeterminatis M, N oriri analogiam quatuor conflatam terminis, cujus una ratio fluentes homologas alterutrius ſyſtematis contineat, ex qua ſi expungatur denominator ac protonumerus communis, remanent tantum numeratores fluentium, qui ſecundam analogiæ rationem conſtituunt. Ex hac tradita doctrina eruitur §. 8 Coroll. novum communi opinioni prorſus contrarium, quo evincitur quamcumque analogiam quatuor conſtantem terminis rite præparatam facile reduci quoad ſigna terminis præfigenda ad ſequentem $1 : 1 :: 1 : 1$ terminis ſingulis poſitivis conflatam; atque omnino repugnare illam omnium conſenſu receptam $1 : -1 :: -1 : 1$, quicquid acute ad hanc fulciendam celebriorum Mathematicorum induſtria protulerit.

§. 37. Hiſce animadverſis a §. 9 uſque ad 13 doctrina maxime neceſſaria eruitur ex ipſa fluentium indeterminatarum, & determinatarum definitione Cap. ſuperiori tradita. Oſtenditur enim ſi ſumantur fluentes indeterminatæ M, N quæ ſint in ratione $m : n$, & inſtituatur analogia $M : N :: m : n$, oriri æquationem $nM = mN$, ex qua $M = \frac{m}{n} N$; vel $N = \frac{n}{m} M$: in qua ambæ fluentes ſimul conjunguntur, nec una niſi per alteram haberi poteſt. Qui ſit vero uniuſcujuſque valor abſolutus; quæ forma earum vera, ac natura; quo modo altera eliminari poſſit, altera manente, nullo modo ex propoſita conſequi poteſt. Hinc in Analyſi communi, quæ fluentes ſymbolis omnino indeterminatis $x$, $y$, &c. (noſtris M, N reſpondentibus) denotat, non alias æquationes ſibi poteſt effingere, niſi quæ ex hac relatione manantes, ambas ſemper fluentes ſaltem implicite contineant: atque ideo ſi ad §§. 16, 17, 18 diligenter attendas, indeterminatæ ſint oportet, duabus ſcilicet ſemper fluentibus conflatæ, ex quibus non niſi dato ad libitum valore alterius, erui poteſt alterius valor: cætera quæ ſupra innuimus omnino interdicuntur. Hæc tamen omnia ac ſingula facile & elegenter obtinentur, ſi in locum fluentium indeterminatarum fluentes determinatæ noſtræ Theoriæ ſubſtituantur ea methodo, quæ a §. 9 uſque ad §. 13 hujus Capitis traditur; cujus ope ab æquatione $M = \frac{m}{n} N$, vel $N = \frac{n}{m} M$ duabus fluentibus conflata ad æquationem unam tantum fluentem M, vel N continentem facilis patet aditus, & ab hac ad indeterminatam æque facilis eſt regreſſus. Quæ ſi neceſſaria ſunt ad Scientiam hanc rite inſtituendam, non minus neceſſarii ſunt §§. 13, 14, 15, in quibus, ne graviter decipiamur, demonſtratur

tur posita analogia $M : N :: m : n$, quid facto opus sit, ut veri limites rationis $m : n$ in utroque systemate determinentur: ratio enim ex. gr. $M : N :: \infty : 5$, vel $\infty : 0$, quæ utrique vel alterutri systemati convenire posse videtur, in utroque systemate absurda in gravissimum errorem nos induceret.

§. 38. Hisce statutis principiis ad doctrinam communem, qua æquatio primi gradus hujusce formæ $M = \frac{m}{n} N$ & analytice tractatur, & geometricæ constructioni subjicitur, excutiendam Caput hoc accedit. Ac primo cum initio statutum fuerit rationem, qua fluentes homologæ sese respiciunt, fluentem esse; æquatio communis $x = \frac{m}{n} y$, qua conjunguntur hujusmodi fluentes, est æquatio quatuor fluentibus (quas incognitas Analysis communis appellat) conflata: ejus solutio vires Analyseos communis superat, quæ ideo cogitur fractionem $\frac{m}{n}$ universim constantem ponere, ut aliquam saltem si non veram constructionem obtineat: hac tamen suppositione & $x$, $y$ non amplius fluere posse, & Theoriam omnem æquationum perturbari satis liquido §§. 18, 19, 20, 21, 22 ostendunt. Ignorata enim natura harum æquationum, posito ex. gr. $y = 0$, falso asserit & ipsam $x = 0$, quæ tamen in SA fit maxima, in SY fit minima valore. Hinc & male assignantur valores fluentibus $x$, $y$ in utroque limite, & in casibus mediis; & constructio geometrica a vera longe abludit. Quod ut re ipsa magis confirmetur, constructio geometrica vulgo usurpata hujusce æquationis $x = \frac{m}{n} y$ §. 23 ad examen vocatur, qua repudiata utpote longe aliena ab ea, quam legitima formularum cum geometricis conjunctio necessario requirit, vera §§. 24, 25 exhibetur, ut inter utramque comparatione instituta liberum ac tutum cuique judicium relinquatur.

§. 39. Ulterius progrediens Caput hoc in tam necessario argumento excutiendo, quo tota hujusce Scientiæ Theoria nititur, a §. 26 usque ad finem traditis veris fluentium formulis pro diversitate systematum diversa forma affectis, ostendit duplici modo in constituenda æquationum Theoria peccare graviter Analysim communem: primo modo in tradenda æquationum *determinatarum* & *indeterminatarum* definitione: secundo in ipsa fluentium utriusque systematis iisdem symbolis $x$, $y$ indeterminatis elatarum natura determinanda. Hac enim symbolorum identitate in utroque systemate decepta, istis, quæ sunt in utroque systemate natura diversæ, eamdem prorsus originem, indolem ac naturam tribuit: ex quo fit ut simul fluentes unius systematis cum fluentibus alterius misceantur: hoc est constantes

cum fluentibus; ſumma fluentium cum earum differentia; poſitivum cum negativo; directum cum inverſo perpetuo confundantur. Ita ex. gr. æquatio

$$\frac{\frac{1}{2}a+z}{\frac{1}{2}a-z}=\frac{z+\frac{1}{2}a}{z-\frac{1}{2}a}$$

, quam §. 30 diſtinctione ſyſtematum legitimam & neceſſariam eſſe oſtendit, tamquam abſurda rejicitur & ejuratur a vulgata Methodo, quæ identitate eidem ſymbolo $z$ utrinque tributa poſitivum æquale negativo offendit. Horum tamen omnium malorum origo hæc una eſt; quod nempe Analyſis vetus hiſce tantum ſymbolis $x$, $y$ omnino indeterminatis nixa, quæ ſit earum diverſa in diverſo ſyſtemate forma atque natura, & quomodo in utroque diverſimode determinandæ ſint, prorſus ignorat. Contra vero mea Theoria novis munita principiis ex una, qua ſe ſe reſpiciunt, ratione fluentes indeterminatæ M, N, in fluentes determinatas, prout requirit ſyſtema, facile convertit, atque pro re nata diſponit. Hiſce artificiis mira quadam conſenſione quæ frontibus adverſis pugnare videbantur, procedunt: ac difficultatibus omnibus evaneſcentibus æquationes illæ, quæ veritatem præſeferre videntur, falſæ declarantur; contra vero quæ falſitatis ab Analyſi communi inſimulantur, apprime cum veritate conciliantur, ſi diligenter ad ea, quibus Caput hoc concluditur, attendas.

CAP. IX. De ratione conſtanti, qua Fluentes ſe ſe reſpiciunt.

§. 40. Satis pro re de qua agimus determinata natura æquationis $M=\frac{m}{n}N$, in qua $m:n$ eſt ratio fluens; exploratur in hoc Cap. IX quæ ſit æquatio $M=\frac{a}{b}N$, in qua ratio $a:b$ ſupponitur conſtans; & quomodo legitime uſurpari poſſit, ac recte conſtrui. Hæc eſt illa una cognita, & ad conſtructionem perducta a vulgari Analyſi, cum ne ſuſpicari quidem potuerit ab illa æquatione $M=\frac{m}{n}N$ (de qua egimus Cap. ſup.) aliquid erui poſſe veritati & rationi conſentaneum. De hac vero Caput hoc verba faciens animadvertit primum §. 3 quod ſi in analogia $M:N$, vel $x:y::a:b$, ponantur $a$, $b$ lineæ geometricæ conſtantes, fluentes $x$, $y$ ejuſdem eſſe coefficientis, nec differre niſi in $a$, & $b$, cui reſpective applicantur: atque ideo $a$ in primo termino protonumerum repræſentat fluentis $x$, in ſecundo $b$ eſt protonumerus fluentis $y$. Itaque $x$, $y$ hujuſce æquationis nequeunt eſſe fluentes homologæ ejuſdem ſyſtematis, nec ſimul conſociari ad unum & integrum ſyſtema conſtituendum, ſed ſingula pertinet ad diverſum ſpecie ſyſtema ob protonumeri diverſitatem. Hoc uno ſen-

ſu conſtructio hujus æquationis vulgo uſurpata legitima cenſeri poteſt; eo tamen modo, quo peragitur a communi Methodo ope trianguli indefiniti, non eſt niſi dimidiata, cum ſingula fluens ſua careat homologa, cujus unione perficitur ſyſtema diverſum jam inchoatum, ad quod ſingula pertinet. Quomodo vero utraque ſyſtemata compleantur, & geometrica deſcriptione concludantur §§. 4, 5, 6 docent.

§. 41. Sed altius ad primam uſque originem inquiſitione perducta, methodi vulgo traditæ conſtruendarum æquationum Simplicium ad examen vocantur, quarum una linearum additione vel ſubtractione conſtructionem perficit æquationis $x = a - b + c$, aliarumque huic ſimilium; altera tertiæ vel quartæ proportionalis inventione æquationem $x = \frac{ab}{c}$ & ſimiles conſtruendas jubet. Utraque tamen hæc methodus cur a mea Theoria reprobetur, & quæ earum in locum ſubſtituenda ſit doctrina, §. 7 uſque ad §. 16 ſatis aperte declarat. Ut vero conſtet quam caute incedendum ſit in hiſce analyticis inveſtigationibus, oſtenditur §§. 13, 14 quas, & quot diverſas ſignificationes habere poſſit æquatio $x = \frac{ab}{c}$, quæ prout una, non niſi uno modo & intelligitur, & conſtruitur. Tamen 1.° ſi ſit $x = \frac{a}{c} b = \frac{m}{n} b$ ($b$ protonumerus ſcilicet, & $\frac{m}{n}$ fractio numerica) eſt una fluens alterutrius ſyſtematis: 2.° $x = \frac{a}{c} b = \frac{m}{n} y$ ($b$ ſcilicet fluens, & $\frac{m}{n}$ fractio numerica), in quo caſu oritur a fractione $m:n$ fluenti, quam habent inter ſe fluentes $x$, $y$ homologæ ejuſdem ſyſtematis: 3.° $x = \frac{a}{c} y$ ($b$ fluente, & $a$, $c$, lineis geometricis datis) in qua $x$, $y$ ſunt fluentes ejuſdem coefficientis, ſed diverſi protonumeri, pertinentes ſingulæ ad ſyſtema ſpecie diverſum, & inter ſe in ratione $a:b$ protonumerorum. Tandem 4.° $x = \frac{ab}{c}$, in qua ut vult methodus nota $c$, $a$, $b$ lineas datas & cognitas repræſentant: atque ideo quartæ proportionalis inventione ope Trianguli vulgo ſemper conſtruitur. Quid vero hinc ſequatur §. 14 vide.

§. 42. Hac vero æquatione $x = \frac{m}{n} y$ ſatis explorata ad alteram $y = \frac{m x \pm m A}{n}$ formulam generalem, qua æquationes primi gradus omnes complectitur Analyſis nota, excutiendam §. 16 ſe convertit. Ac primum exhibita §. 16 conſtructione hujuſce æquationis vulgo uſurpata, §. 17 conſtructio perficitur eo modo, quo hæc nova Theoria requirit, ut hujuſce novæ cum veteri facilis inſtitui poſſit comparatio: ex qua eruitur conſtructiones hujuſmodi nullo modo inter ſe conciliari poſſe, atque ideo videndum utra utri ſit anteferenda. Qui conferet doctrinam paſſim receptam cum iis quæ dicimus §§. 17, 18, intelliget hanc $y = \frac{m x \pm m A}{n}$ nihil differre a prima $x = \frac{m}{n} y$ ſupra explicata: dummodo loco $y$, quæ eſt fluens alterutrius ſyſtematis indeterminata, ſubrogetur eadem fluens, ſed ad eam formam ac naturam, quam alterutrum ſyſtema requirit, conformata: qua peracta ſubſtitutione habetur vera forma determinata alterius homologæ $x$; æquatione a relatione duarum fluentium orta ad unam & identicam $x$ determinatam tranſmutata. Ut vero tutius inter utramque judicium inſtituatur, §. 19 traditur methodus uſitata, qua geometrice valores determinantur duarum *incognitarum*, quotieſcumque duæ habentur æquationes indeterminatæ primi gradus forma $y = \frac{a x - a b}{n}$; $y = \frac{c x - c d}{m}$, ut conferatur cum illa, quam ſubdit nova hæc Theoria: in qua multa & præclara invenies notatu digna, ſi ad ea, quæ a §. 20 uſque ad finem ex hac legitima conſtructione ſequuntur, diligenter attendas, quæ hîc compendio indicari non poſſunt.

§. 43. Illud ſatis ſit innuere, Analyſim communem nullo modo poſſe ex una tantum æquatione ſuperioris formæ alterutram ex fluentibus eliminare: ac proinde cogitur duas ſemper ſibi proponere æquationes, ut ex earum comparatione fluente altera eliminata, utriuſque tandem fluentis valorem determinatum aſſequatur. Hoc tamen quod veteris Analyſeos vires ſuperat, facile obtinetur §. 21 a mea Theoria, quæ ex una tantum æquatione ſuperiori duabus fluentibus conflata nullo negotio ad æquationem identicam alterutram tantum fluentem continentem, & viceverſa, viam ſibi aperit, in qua eruitur abſoluta ejus forma, quin ejus valor datus determinetur. Inſuper §. 22 oſtenditur, quam male Analyſis communis ſtatuerit æquationem $\frac{a}{n}(x \mp b) = \frac{c}{m}(x - d)$ ſemper eſſe in noſtra poteſtate, ac ſemper

uti

uti legitime posse, quia in hisce æquationibus primi gradus nunquam imaginarium offendit, quo uno indicio falsitatem æquationis, aut ejus *impossibilitatem* desumit. Nam §§. 22, 23 evidenter demonstratur hujusmodi æquationum inter se comparationem universim absolutam implicare contradictionem, nisi quibusdam conditionibus subjiciantur, quæ a §. 27 usque ad finem fusius explicantur, erroresque, in quos incaute incidit vulgata Analysis, in apertum proferuntur. Ex quibus omnibus jure tandem concluditur ex hac una male instituta æquationum linearium ad geometrica applicatione, tamquam a prima origine omnium malorum seriem, quæ totam Analysim impune infecit, repetendam esse: hæc tamen singula in progressu Operis pro re nata singillatim detecta opportunis remediis sananda spondet nostra Theoria.

§. 44. Interim Cap. X ostendendum sibi proponit, methodum analyticam vulgo usurpatam inveniendi mediam proportionalem geometricam inter duas datas longe a veritate aberrare: cui si substituatur vera methodus, quæ hîc traditur, una ac prima ex caussis, a quibus ortum ducit imaginarium, universim ac perpetuo ab Analysi eliminatur. In hac falsa mediæ geometricæ methodo tradenda illud magis mirari subest, quod Analysis communis in hac re se fide sequi Geometriam arbitrata, tam de veritate suarum formularum, quam de geometrica demonstratione secura vivit. Tamen §§. 1, 2 satis clare ostenditur tantum abesse ut geometricæ demonstrationi ad unguem respondeat analytica methodus, ut demonstratione geometrica semper inviolata manente, semper analytica methodus hallucinetur. Primum enim nisi quantitates lineares symbolis communibus ac generalibus $a$, $b$ vulgo elatæ ad communem protonumerum traducantur, & ad alterutrum systema rite aptentur, nunquam fieri poterit, ut inter ipsas analytica inventa media, eam, quam exhibet Geometria, re vera repræsentet. Media enim geometrica quæ semper vulgo supponitur ordinata circuli diametri summæ linearum $a$, $b$ æqualis, inter quas quæritur ipsa media, necessario requirit summam hanc constantem, licet fluentes singulæ valorem mutent, ut descriptio circuli manifeste declarat; quod cum minime convenire posse demonstretur lineis $a$, $b$ arbitrio sumptis, nisi prius ad idem systema SA præparentur (ut factum vides a nostra Theoria) semper media analytica a geometrica & a veritate longe aberret necesse est. Quod cum prorsus ignoret Analysis vulgata, ignorat etiam fluentes propositas in eam formam analyticam transmutare, inter quas rite inveniri analytice possit media, quæ quæritur. Hoc ita verum est, ut quoties lineæ propositæ sint fluentes systematis SY, quarum differentia constans necessario hyperbolam requirit; semper tamen ab ipsa perperam in circulo quæritur media analytica, & primo errori novus additur error.

CAP. X. Vulgata methodo analytica inveniendi mediam proportionalem inter duas datas reprobata, legitima substituitur.

§. 45. Demonstrata necessitate præparationis ad aliquod systema linearum cujuscumque analogiæ tam illius, quæ quatuor geometricas proportionales continet, quam quæ tribus lineis geometricis proportionalibus constat; a

§. 3

§. 3 usque ad §. 8 ostenditur quo modo utraque analogia pro systematis diversitate præparanda sit, & quid maxime utile ex hac præparatione sequatur: ex quibus eruitur non posse hanc mediam, quæ quæritur, analytice inveniri, nisi prius fluentes assumptæ & ad commune systema reducantur, & homologæ fiant: ut Problema vulgatum sic reformandum sit: *Invenire analytice mediam geometricam inter duas fluentes homologas alterutrius systematis:* ut intelligatur non posse ad id, quod quæritur, feliciter perveniri, nisi prius hæc duo Problemata in antecessum soluta sint, quorum primo fluentes geometricæ ad idem systema reducuntur; secundo vero homologæ fiunt: hisce solutis atque præsuppositis tunc ad hanc mediam geometricam analytice inveniendam accedendum est.

§. 46. Hic necesse est advertere lineas geometricas quatuor diversis modis affectas in calculo se se exhibere posse: 1.° modo forma & valore sunt indeterminatæ: 2.° valore quidem cognitæ possunt esse, sed quoad formam indeterminatæ: 3.° contra indeterminatæ quoad valorem, determinatæ quoad formam: 4.° denique & in valore, & in forma determinatæ. A duobus primis modis frustratur inquisitio: ab eo enim quod omnimode indeterminatum & ignotum est, vel ab eo quod valore tantum cognoscitur, natura ignorata, nihil veri erui potest. In duobus tantum ultimis utilis est inquisitio: sed tertius tantum modus necessarius est: cognita enim natura fluentium determinatur systema, invenitur Locus geometricus, in quo necessario continendus est valor a 4.° modo exhibitus. Porro Analysis communis non nisi duos primos cognoscit, quibus semper utitur: suas enim lineas vel symbolis $x$, $y$ omnino indeterminatis afficit, quas modo *variabiles*, modo *incognitas* appellat, quia istis duabus notionibus simul confusis fluentes ab incognitis tuto nequit secernere; vel litteris $a$, $b$ exprimit, quibus indicat lineas valore tantum cognitas, quas datas appellat, ac semper ut constantes assumit: cum tamen nomine *datarum*, inter quas media quæritur, non sint intelligendæ lineæ geometricæ valore cognitæ, ut vulgo fit, sed illæ fluentes valore indeterminatæ quidem, forma vero ad alterutrum systema determinatæ. Aliquid simile animadvertimus in P. I.ª Lib. II. Cap. VI. §. 8 circa quantitates geometricas duarum dimensionum. Quid mirum igitur si ignoratis primis notionibus, quibus sine deficiat omnino Analysis oportet, tot ac tantis supra commemoratis compedibus se illaqueet?

§. 47. Sed in viam, a qua diverteram, me recipiens, ajo ad inveniendam analytice mediam, quam quærimus, solutione etiam duorum Problematum, quæ innuimus, fluentibus propositis præparatis, restare adhuc artificium quærendum, quo rectangulum duarum fluentium in verum quadratum convertatur, ut liceat rite uti radicis extractione, quæ mediam analyticam quæsitam exhibeat. Hoc vero consequi nullo modo posse §. 9 ostenditur, nisi fluentes homologæ singulæ in eam novam formam transmutentur, quam docet Cap. IV. Donec enim productum hoc naturam tantum rectanguli retinet, extractio radicis vere repugnat: quod enim a producto duorum tantum

rum factorum oritur, perperam ad lineare ope extractionis radicis deprimi tentabitur: & contra quod purum quadratum est, male in duos factores dividi posse quivis præsumpserit. Labor igitur omnis atque industria in eo collocanda est, ut uno eodemque tempore formula & naturam quadraticam & rectangularem possit referre, ut promiscue ad linearem deprimi possit alterutro modo, quem alterutra natura requirit: cui si applicatur extractio radicis, formula quadratica censenda erit, & ejus linearis vera radix, sive media quæ quæritur: contra vero si in duos factores dividatur, rectangularis erit judicanda, & singuli factores erunt fluentes illæ, quarum media est radix quadrata inventa.

§. 48. Ex hac nova & vera Problematis propositi solutione illud tandem maximi momenti consequitur, quod scilicet imaginarium ortum a media inter duas quantitates diverso signo affectas (ut vulgo fit), non est nisi purus putusque Analyseos communis error, cum §. 14 demonstretur non posse rectangulum negativum ullo modo quadrato positivo æquari ut creditur: cum hoc nihil aliud sit nisi rectangulum ipsum in eam novam formam transmutatum, quam docent §§. 10, 11; atque ideo si negativum est rectangulum, & quadratum sit negativum oportet. Quare cum utrumque ad positivum semper liceat reducere, imaginarium $\sqrt{-1}$, quod ab hac ratione falsa inveniendi mediam oritur, universim & perpetuo ab Analysi recte instituta exterminatur. In T. II alteram hujusce imaginarii originem a divisione summæ duorum quadratorum in duos factores imaginarios erutam, magis pertimescendam utpote a recentissimis celebrioribus Auctoribus universim ad usum in calculis sublimioribus traductam, & tanta auctoritate suffultam, me penitus e calculo evellere confido, ut nova hæc Provincia ab infensissimo, ut ita dicam, hoste tandem liberata ab acutiori quovis ingenio tutius ac utilius sterni possit.

§. 49. Interim ad continuam singularum fluentium divisionem tradendam Theoria nostra accedit. Cum enim fluentium utriusque systematis coefficientes sint fractiones unitate minores, majoresve, consequitur numeratorem nunquam a denominatore majori vel minori ipso numeratore exacte dividi posse, ac propterea quotiens Series sit oportet a nullo unquam terminorum numero etiam infinito exaurienda, cum semper aliqua pars remaneat ab eodem denominatore dividenda, ob quam semper quæcumque fluens continua divisione capax est. Ex hac continua fluentium divisione primam serierum ad infinitum excurrentium notionem ab Analystis desumptam fuisse jure censeri potest. Hujusmodi vero divisionem continuam duobus modis obtineri posse demonstratur. Prima methodus nunquam ab Analysi communi usurpata utpote ignota aut saltem ut inutilis rejecta, utpote series parallelas exhibens, in eo sita est, ut tam numerator, quam denominatoris primus terminus ad unitatem reducatur: quo fit ut primus quotiens ex hac prima divisione ortus sit ipsa unitas: quæ reductio singulis divisionibus præmissa exhibet quotientem, qui est Series continua unitatum signo ± alterna-

natim affectarum ad infinitum producta, semper a vero valore fluentis propositæ dividendæ per excessum aut defectum abludens, quæ ut compleatur addenda vel subtrahenda est fractio in primo casu æqualis & identica cum fractione proposita si series unitatum antecedentium sit par; subtrahenda ejus homologa in secundo casu, in quo series unitatum antecedentium evanescentium est impar. De hujusmodi seriebus parallelis ortis a continua divisione fluentium utriusque systematis, hujusce primæ methodi ope agitur in Cap. XI, quod nititur solutione Problematis §. 7, quod exhibet *formulam generalem fluentis* S A, *qua fluens continuo successivo fluxu ad infinitum producta determinari potest*.

CAP. XI. De continua Fluentium abstractarum utriusque systematis divisione nova methodo pertractata, ac de vera serierum Arithmeticarum origine.

§. 50. Quo soluto quædam maximi momenti consequuntur, inter quæ Coroll. 11 §. 12 eruitur, quod licet valor cujusque fluentis non possit determinari nisi per saltum in punctis a denominatore fractionis statutis, tamen fluxio nunquam per saltum procedit. Fluxio enim natura sua nullo successivo interjecto spatio quovis minimo per omnia puncta intermedia transit, sed non posse a nobis fluxionem determinari nisi per saltum manifeste ostenditur; quod non animadversum notiones limpidissimas divisionis indefinitæ quantitatis tam in analyticis, quam in physicis obscuravit. Ex hac vero fluendi ratione cujusvis fluentis consequitur etiam non eodem modo fluentem, quo *constantem*, augeri & minui additione vel subtractione alicujus datæ partis; sed fluens a *zero* per omnes intermedios gradus successivo continuo fluxu nunquam abrupto aucta, aut retrocedendo diminuta determinatur tantum in illis punctis, quæ primo jam in linea indefinita percurrenda constituta fuerant. Duo vero diversa genera punctorum datorum §. 13 per quæ fluens transiens determinatur, distinguenda sunt. Primum genus punctorum datorum est illud, quod a successiva protonumerorum coalitione in linea indefinita oritur: quæ puncta eodem manente protonumero sive systemate necessario determinantur. Alterum genus punctorum datorum originem ducit a denominatore constanti coefficientis fluentis numerici, qui indicat in quot partes protonumerus, cui applicatur, divisus intelligendus sit. Qui denominator cum omnino ab arbitrio pendeat, fit ut singuli protonumeri in partes medias datas plures, paucioresve dividi arbitrio possint. Hinc a §. 14 usque ad finem Capitis de diversa horum diversorum punctorum œconomia agitur, ubi in naturam & originem serierum arithmeticarum inquiritur: quæ ut intelligantur, Caput hoc adire, ac attente & ordine persequi necesse est. Quantum vero intererat in hisce investigandis diligentius immorari sequentia Capita demonstrabunt.

CAP. XII. De continua Fluentium abstractarum utriusque systematis divisione vulgo usur-

§. 51. Explorata in Capite superiori origine serierum arithmeticarum, quæ a nova nostræ Theoriæ continuæ divisionis unius fluentis methodo derivantur, Caput hoc series illas considerat, quæ a methodo communi continuæ divisionis utriusque fluentis abstractæ S A & S Y oriuntur. Series hæ vulgo geometriæ dicuntur, quas semper ut abstractas ac numericas Analysis nota considerat, quarum proinde termini utpote identici inter se addi vel subtrahi

trahi possunt, & ad unum tantum terminum reduci. Hinc in hisce tractandis ad id potissimum intenta est, ut seriei geometricæ cujusvis summam assequatur. Verum quoniam vulgata Methodus hujusmodi Series a vera sua origine, sive a fluente; a qua ortum ducunt, semper divellit, & abstracte tantum atque solitarias considerat, ignoret necesse est intimam, quam inter se habent, conjunctionem tam Series convergentes, quam divergentes, utpote ab eadem origine manantes (quarum ultimæ tamquam inutiles & fallaces explodit); ignoret etiam necessitatem complementi, quod nunquam omitti potest, quovis numero terminorum producatur series quævis ut compleatur, & fractionem, a qua evoluta fuit, adæquet. Quare Caput hoc in eo primum est, ut demonstrata communi harum Serierum tam convergentium quam divergentium origine, ostendat liberum semper esse fluentes homologas utriusque systematis evolvere alterutram in convergentem, in divergentem alterutram, vel ambas in convergentes, vel divergentes commutare: & quid facto opus sit ut a seriebus divergentibus ad convergentes tuto transferri possit. Hinc traditur methodus inveniendi in quavis serie geometrica decrescente aut crescente *complementum*: quo invento cujusvis seriei geometricæ quovis modo productæ, ac terminis singulis uno eodemque signo, aut ± alternante affectis summa facile determinatur, & quantum differat a valore suæ originis, datis duobus primis seriei terminis, & numero terminorum, demonstratur. Hinc jactis principiis §. 12 quædam Corollaria ad rem, de qua agitur, maxime necessaria eruuntur, inter quæ illud est indicandum, quod ostendit in quavis serie decrescente complementum nunquam fieri posse absolute *zero*, nisi in casu, in quo nulla instituta fuisset fluentis evolvendæ divisio, hoc est nisi in casu seriei nullius: cum aggregatum seriei, & complementi semper constans sit, & æquale fluenti propositæ evolvendæ: ut videre est in formulis §. 11. Tamen ut omnino evellatur opinio illa universim recepta, quæ ultimum seriei decrescentis terminum ad infinitum productæ fieri *zero* absolutum asseverat, §§. 21, 22, 23, 24 hæc novis argumentis refellitur.

pata, ac de vera Serierum geometricarum origine.

§. 52. Hisce & aliis ad rem conducentibus explicatis instituitur comparatio §. 20 inter methodum continuæ divisionis Capitis antecedentis, in qua serierum parallelarum auxilio arithmeticas eruimus, & inter methodum communem hujusce Capitis, a qua geometricæ ortum ducunt: ex qua comparatione eruitur perfectam inesse æqualitatem inter hujusmodi series suis singulas complementis consociatas ab hac diversa methodo evolutas, dummodo abstractæ sumantur, & ad eumdem denominatorem, quo afficitur complementum, reducantur: ea tantum differentia quod methodo hujusce Capitis, reductione facta, termini omnes identici evanescunt excepto primo, aut duobus primis; contrario prorsus modo evanescunt singuli termini serierum methodo Cap. XI evolutarum præter ultimum, aut duos ultimos. Ne quis vero miretur, cur tanta intercedere possit differentia inter series ab una eademque fluente evolutas duplici hac methodo, ac dubius hæreat in alterutra

præferenda; a ſeriebus geometricis abſtractis & numericis, quas non niſi rationem eamdem, qua ſe ſe reſpiciunt fluentes, indicare demonſtratur, ad determinandas fluentes ipſas §. 25 tranſitus fit, in quo ſinguli ſerierum termini ſub ea forma, quam requirit utrumque ſyſtema, ad fluentes completas ſignificandas ſuo protonumero applicatas reducuntur: qua facta reductione termini ſerierum mea methodo in fluentes converſi terminis ſerierum in fluentes methodo Cap. XI reductis æquantur, ut videre eſt in ſerie B & D §. 31, in qua utraque methodo ſeries fiunt parallelæ. Quæ vero more communi ad eumdem denominatorem complementi reducuntur, ut eſt A, & C, a primis ratione protonumerorum tantum differunt, qui in hoc caſu in ſerie geometrica progrediuntur, quibus ſinguli termini ſucceſſive applicantur. Utroque tamen modo ſeries illæ numericæ primum abſtracte ſumptæ, quæ evaneſcentibus terminis identicis ſigno contrario affectis, non niſi primis aut ultimis terminis æquabantur, in fluentes geometricas converſæ in tot ſyſtemata ſolitaria inter ſe diſtracta ſeparantur, quot ſunt termini ſerierum, quibus ſeries ipſæ conflantur.

CAP. XIII. De ſyſtemate exponentiali & logarithmico, deque eorum legitima conjunctione ac deſcriptione geometrica Logiſticæ ope, cujus vera natura & origo determinatur.

§. 53. Hujuſmodi tamen Series geometricæ, quas ſuperiori methodo ad geometrica translatas non niſi ſeries diverſorum ſyſtematum diverſæ baſis Cap. ſuperiori repræſentare vidimus, ſi ſub diverſa forma efferantur, diverſam nobis notionem exhibent, a qua principia Calculi *exponentialis* & *logarithmici* derivantur. Si enim fluentes homologæ utriuſque ſyſtematis, quæ prius a duobus punctis fixis prorumpentes punctum fluens earum concurſus in eadem linea continebant, concipiantur communi æquabili motu a prima poſitione recedentes ita ſe ſe explicare, ut homologorum punctorum concurſu, mutata continuo fluentium poſitione, Locum geometricum regularem & continuum deſcribant, ac veluti in Tabula oculis ſubjiciant, (quæ eſt prima ac ſimplicior ratio evolutionis, quæ menti ſe ſe offert); eam analyticam formulam nobis exhibent, a qua eædem ſeries geometricæ ſpecie tenus eruuntur, diverſa tamen a primis ratione tractandæ atque intelligendæ, ut in hoc Capite demonſtratur. Ut igitur quod volumus conſequamur, ad duo maxime neceſſaria attendamus oportet, ad fluxum ſcilicet æquabilem totius baſis hinc inde a prima ſua poſitione cum ipſo puncto concurſus fluenti translatæ, a quo æquabili fluxu conſtituitur ſyſtema illud, quod dicitur *logarithmicum*; & ad legem, quæ punctum fluens concurſus fluentium in hac communi translatione moderatur, a qua lege pendet ſyſtema, quod dicitur *exponentiale*: ut hiſce ſingillatim firmatis ad eorum legitimam conjunctionem rite accedi poſſit.

§. 54. Hiſce in anteceſſum ſtatutis oſtenditur §. 3 ſyſtema *logarithmicum* nihil aliud eſſe niſi ſpatium æquabili motu a linea indefinita primæ poſitionis hinc inde percurſum, dum interim punctum concurſus fluentium data lege fluit. Spatium hoc abſtractum, ſive via in hac translatione ſucceſſive deſcripta regitur a quavis ſerie arithmetica, cuivis protonumero applicata, cujus affectiones Cap. XI demonſtravit: & a formula generali

§§. 20,

§§. 20, 21 ejusdem Capitis expressa ( quæ hîc universim effertur hac $M = \frac{p}{1} f = \frac{p}{1} . - f$ ) *systema logarithmicum solitarium* constituitur. In hoc igitur Capite restat ut systema exponentiale determinetur, & legitima cum logarithmico conjunctio tradatur. Quod ad primum attinet, cum punctum fluens concursus fluentium sit intra, vel extra puncta data lineæ indefinitæ sed immotæ, in quorum primo casu fluens est differentia fluentium in SA; in secundo summa fluentium in SY; ostenditur lineam fluentem in hoc æquabili motu translatam non posse in primo casu nisi hanc differentiam, in secundo nisi hanc summam fluentium repræsentare: cujus tamen fluxus ea lege moderandus est, ut data via determinetur fluens translata, & viceversa data fluente determinetur via ab ipsa descripta. Hoc vero nullo alio modo obtineri posse ostenditur, nisi in formula differentiæ vel summæ fluentis $M = \left( \frac{(\frac{n}{m})}{1} \right)^{\pm 1\, z} . a$ fiat constans fractio $\frac{n}{m}$; quæ erat fluens in simplicibus systematibus ( præter protonumerum $a$ & summam coefficientium in SA, vel differentiam constantem in SY, utramque denominatori 1 æqualem ) ita ut formula fiat tantum fluens ratione exponentis numerici $z$, qui proinde fluens sumendus est. Systema igitur exponentiale solitarium complectitur a formula generali $M = \left( \frac{(\frac{n}{m})}{1} \right)^{\pm 1\, z} . a$, uno fluente exponente numerico $z$, cui si successive applicetur series arithmetica abstracta numerorum naturalium 0, 1, 2, 3 .... determinatur series fluentium in ratione geometrica progredientium, quarum exponentes sunt numeri integri: at si fiat $z$ æqualis successive cuicumque alii seriei arithmeticæ determinatur quidem alia series, sed semper geometrica: & hoc modo infinitæ series geometricæ determinari poterunt. Quare si series Cap. XII evolutæ a continua divisione fluentis vulgo usurpata suo protonumero applicentur, ad hanc reducuntur $\left( \frac{(\frac{n}{m})}{1} \right)^{\pm 1\; 0} a + \left( \frac{(\frac{n}{m})}{1} \right)^{\pm 1\; 1} a + \left( \frac{(\frac{n}{m})}{1} \right)^{\pm 1\; 2} a \ldots$ &c.,

dummodo quivis terminus $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{z}$ a differentiam vel ſummam fluentium repræſentare, ac, cæteris intactis manentibus, unus exponens fluens intelligatur.

§. 55. Hoc vero modo exponens $z$ cum ſit numerus abſtractus non niſi rationem inter ſpatia percurſa a diverſis fluentibus determinare poteſt; ſpatium vero a ſingulis confectum nullo modo poteſt. Ut igitur etiam hoc abſolute determinetur, atque ideo ſitus cujuſcumque fluentis a prima quietis poſitione habeatur, ita eſt conformandus exponens, ut ſitum abſolutum fluentis in ſe contineat, & naturam fluentis numericæ abſtractæ intactam ſervet: abſurdum enim eſſet in locum exponentis quantitatem geometricam ſubſtituere; ac quærere numerum aliquem ad lineam ex. gr. geometricam $f$ tamquam poteſtatem elevatum, eſſet quæſtio ratione penitus deſtituta. Porro nulla alia ratione exponens huic duplici officio ſatisfacere poterit, niſi ſit fractio, cujus numerator formulam generalem ſyſtematis logarithmici contineat, denominator vero ſit protonumerus ejuſdem formulæ logarithmicæ, ſitque $z = \frac{x}{\pm f} = \frac{p}{1} \cdot \frac{\pm f}{\pm f}$, a quo deducitur eſſe $x = \frac{p}{1} \cdot \pm f$ logarithmum fluentis illius, quæ afficitur exponente $\frac{x}{\pm f} = \frac{p}{1}$: & formula generalis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a$ erit formula ſyſtematis, quod Def. XII §. 48. Syſtema *exponentiale integrum definivimus*.

§. 56. Hiſce jactis principiis ad conſtructionem geometricam hujuſce formulæ tranſitum facimus, a qua quævis ſeries geometrica analytice deducitur, poſita ſucceſſive $x$ æquali cuivis termino ſeriei arithmeticæ protonumeri $\pm f$: & ejus Locus geometricus eſt Curva illa, quæ vulgo *Logiſtica* ſeu *Logarithmica* appellatur. Per ea vero quæ a §. 8 uſque ad §. 16 demonſtrantur, evincitur Curvam hanc contra opinionem univerſim receptam octo ramis neceſſario conſtare, quorum quatuor dextrorſum, ſiniſtrorſum quatuor ad infinitum ſine limite progrediuntur: ac ex iſtis quatuor duo magis ſemper divergentes ſummam fluentem fluentium SY intercipiunt; alii duo homologi, qui differentiam fluentem fluentium SA complectuntur, magis ſemper invicem accedunt, ſed ea lege ut nunquam, licet ad infinitum ſine li-

mite producantur, ſe tangere poſſint; a qua proprietate axis inter haſce medius ( §. 17 ) aſſymptoti nomen deſumit. Ex hac vero conſtructione quædam notatu digna in hoc Capite eruuntur : inter quæ illud hîc indicamus, quod ſcilicet fluens quævis ab una eademque formula $M = \left(\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a$ gignitur, ſola mutatione valoris unius exponentis, quin ulla cum aliis fluentibus comparatio inſtituatur. Quare non ſolum a genere ad genus in invenienda media, vel tertia proportionali vitatur tranſitus ( quod non licet vulgatæ Analyſi ) ſed nunquam in imaginarium impingi poteſt: quinimmo §. 21 oſtenditur methodus, qua licet inter duas datas exponentiales invenire quot libuerit medias geometrice proportionales ſola exponentis $\frac{x}{\pm f}$ determinatione. Hinc Propp. VI & VII §§. 53, 54 conſequuntur, quarum VI.ª docet *nullam fluentem*, *ſyſtema nullum exponentiale legitime inſtitutum poſſe eſſe imaginarium*: VII.ª vero oſtendit *logarithmum nullum*, *nullum ſyſtema logarithmicum poſſe eſſe imaginarium:* quibus denuo evincitur imaginarium nihil aliud eſſe niſi purum putumque mentis errore deceptæ commentum. Hiſce demonſtratis ulterius progreditur inquiſitio, & §§. 24, 25, 26 traditur modus, quo ex differentia & ſumma fluentium inveniantur fluentes homologæ, ac ſuo Loco geometrico aptentur; & quomodo ex loco partiali geometrico Logiſtica perficiatur : a §. vero 29 uſque ad §. 43 inveſtigatur quænam oriantur mutationes in ipſa Logiſtica, mutatione vel variatione formulæ generalis, & aliquæ Logiſticarum interſectiones notantur. Omitto cætera, quia hîc leviter perſtricta vix ac ne vix quidem intelligi poſſunt, & quia potiora in fine Capitis compendio recenſentur.

CAP. XIV. Principia *Calculi exponentialis & logarithmici* vulgo uſurpata ad examen vocantur.

§. 57. Hiſce bene conſtitutis *Calculi exponentialis & logarithmici* principiis reliquum erat, ut inter hæc & vetera Analyſeos principia comparatio inſtitueretur. Verum cum in tanta Auctorum noſtri ſæculi multitudine atque etiam diſſenſione, qui poſt Joannem Bernullium, & Leibnitium in promovendis atque amplificandis utriuſque Calculi limitibus aſſiduam Operam collocarunt, ut utriuſque auxilio penitiora atque ſublimiora *Differentialis & integralis Calculi* arcana alias prope methodos reſpuentia evolverentur, immenſum prope eſſet ſingula recenſendo expendere; ad primas vulgo uſurpatas, & univerſim receptas æquationes, quibus Calculus hic uterque nititur, excutiendas Caput hoc ultimum concluditur. Hujuſmodi vero æquationes, a quibus deducitur, & in quas reſolvitur quævis formula exponentialis, & loga-

logarithmica cum ſint tres ſequentes, nempe I.ª $y = \left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{f}} f$: II.ª $d\,x = \frac{c\,d\,y}{y}$: III.ª $x = l\,y$, ſingulæ ordine hîc cum noſtris collatæ ad examen vocantur. Ac primum advertendum hujuſmodi formulas male vulgo nomine æquationum definiri, perinde ac ſi in utroque membro diverſa eſſet quantitatis natura ejuſdem tamen valoris; cum revera ſint illius generis, quas (Cap. VII §. 27. Cap. VIII §. 2) identicas appellavimus, quæ tamen in primo membro ſymbolis $x$, $y$, &c. nimis indeterminatæ ad eam formam in ſecundo membro reducuntur, ut exponentialis fluentis, & logarithmi naturam referre poſſint, & ad Logiſticam tuto aptari. Quo non animadverſo errare vulgatam Analyſim §. 35 oſtendimus, quæ docet formulam $\frac{c\,d\,y}{y} = d\,x$ eſſe æquationem differentialem Logiſticæ, qua relatio inter abſciſſam & ordinatam infiniteſimam exhibetur, quæ cum ad finitam traducere nequeat, hoc nomine Curvam tranſcendentem appellat: cum tamen neque in infiniteſimis hæc relatio, quæ nulla eſt inter abſciſſam ſive logarithmum, & ordinatam inveniri poſſit, ſyſtemate exponentiali & logarithmico nullo neceſſario vinculo conjunctis. Ex comparatione vero I.ª exponentialis formulæ cum formula a mea Theoria conflata demonſtratur ſingula formulæ I.ª elementa vitio aliquo laborare: baſis enim $e$ quæ eſt linea geometrica ejuſdem naturæ ac protonumerus $f$, & male determinatur (ex quo a genere ad genus, a dimenſione ad dimenſionem perperam fit tranſitus) & ab hac cæteræ exponentiales pejus determinantur: cum non ſit antecedentium tertiæ vel quartæ geometrice proportionales, ſed ab una tantum fluente ortum ducant, quæ motu ſibi parallelo ſucceſſive progrediens, cæteris ſemper manentibus iiſdem, ob exponentem tantum in ratione ſpatii percurſi fluentem fluens fit: quæ proinde cum ſolitarie ſemper ſumenda ſit, nunquam inter poſitivam & negativam inſtitui poteſt comparatio, neque ex inventione mediæ inter poſitivam & negativam oriri imaginarium. Inſuper protonumerum fluentis $f$ non eſſe confundendum cum protonumero ſpatii percurſi ſive logarithmi, neque coefficientem numericum cum geometrica quantitate, & quædam alia non minus neceſſaria ad hanc formulam rectificandam, & ad Logiſticam legitime aptandam uſque ad §. 11 Caput hoc docet.

§. 58. Majus negotium faceſſit perquiſitio formulæ II.ª $d\,x = \frac{c\,d\,y}{y}$, ut-

pote

pote quæ duas diverſas naturas eadem formulæ conformatione induere poteſt: vel enim logarithmi elementum, vel elementum fluentis exponentialis ſignificare poteſt: quod ut alterum ab altero, prout res poſtulat, ſecernatur, altius res eſt repetenda, & in utramque elementi diverſam naturam eſt inquirendum: hoc factum vides a §. 11 uſque ad §. 37. Primum tamen invenienda erat §. 17 vera Logiſticæ ſubtangens, quæ non ſolum in quavis Logiſtica ex communi etiam doctrina conſtans eſt, ſed etiam ſemper æqualis logarithmo baſis eſſe debet: quod a calculo communi non animadverſum, & formulam ipſam non ſatis cognitam, & alias ex hac deductas falſas & fallaces reddit, & elementum logarithmi cum elemento fluentis toto cœlo diverſo ſimul confundit. In hac enim facta $c = f$ ſive logarithmo baſis, & $dx$ elemento logarithmi, falſo creditur $dy$ eſſe elementum minimum ordinatæ fluentis $y$, cum $dy$ nihil aliud ſit niſi portio minima ipſius $y$, quæ conſtantis naturam induit, quæ nullo modo confundenda eſt cum elemento minimo ordinatæ fluentis; cum illa abſcindat a conſtanti $y$ portionem minimam in ratione minimi logarithmi, ſitque revera $dx = \frac{c\,dy}{y}$ $= \frac{f.dy}{y} = f\frac{\dot{p}}{qh}\frac{y}{y} = \frac{\dot{p}}{qh}f$ elementum minimum logarithmi $f$. Hinc tantum abeſt ut æquatio hæc integrationem algebraicam abſolute reſpuat, ut nihil facilius ſit ipſa integratione, facto $q\,dx = x = \frac{p}{h}f$: quod præcipue §. 33 demonſtratur: in quo etiam communis Analyſeos veteris error detegitur in methodo vulgata *differentiandi* quamvis fluentem exponentialem. Ne vero hujuſmodi elementum $\frac{c\,dy}{y} = \frac{\dot{p}}{qh}f = dx$ idem ponatur, ut hactenus factum fuit, ac elementum formulæ $\frac{a\,dy}{y}$, in qua $a$ eſt protonumerus, $\frac{a}{y} = \left(\frac{y}{a}\right)^{-1}$ coefficiens inverſus cujuſvis conſtantis, & $dy$ verum elementum ordinatæ infinite proximæ fluentis, ſunt diligenter & attente perpendenda quæ a §. 21 uſque ad §. 32 nova prorſus traduntur, quæ hîc nullo modo compendio perſtringi poſſunt. Illud tantum dico formulam hanc $\frac{a\,dy}{y}$ tam longe a II.ª natura diſtare, ut illa elementum ordinatæ fluentis infinite proximæ conſtanti $\left(\frac{y}{a}\right)^{-1}$ repræſentet, hæc II.ª elementum tantum logarithmi

$dx$.

$dx$. Insuper hæc $\frac{a\,dy}{y}$ facile *integrari* poteſt, ut altera, ſed quam longe diverſis artificiis uti oporteat §§. 23, 24 docent: quæ artificia nondum cognita progreſſus *Calculi differentialis & integralis* plurimum retardarunt.

§. 59. Hiſce bene perſpectis, e quibus a noſtrarum formularum diverſa conformatione pleno alveo manant veritates ad naturam fluentium exponentialium intimius cognoſcendam, ea omnia impedimenta tolluntur, quarum cauſſa tota hæc Theoria fruſtra adhuc deſiderabatur: nunquam enim fieri poſſe, ut de formulis, quibus tantum nitebatur vulgata Analyſis, aliquid melius ſperandum eſſet, jam diverſa formularum configuratio ad hoc obtinendum abſolute neceſſaria in toto hoc Capite ſatis aperte declarat. Quibus inventis, & pro re nata ad uſum traductis, difficultates omnes, quas fruſtra enodare Analyſis hactenus conata fuit, ſponte evaneſcunt: inter quas celebris illa quæſtio *de logarithmis numerorum negativorum* Bernullianos inter ac Leibnitianos tamdiu ac fruſtra exagitata, Bernullianis partibus ab ipſa legitima logiſticæ conſtructione ſtatim adjudicatur, ut ſupervacaneum eſſet de hac amplius verba facere, niſi immortalis Viri Euleri auctoritas in celebri illa M.ª in Actibus Berolinenſibus an. 1749 edita ad ſuſtinendam Leibnitii ſententiam denuo acceſſiſſet. Neceſſe igitur erat aliquid addere, quod tantæ Viri auctoritati directe occurreret: quod a me factum vides a §. 37 uſque ad finem. Non difficile enim fuit mea præeunte Theoria falſitatem principii, quo tota nititur Auctoris diſquiſitio, demonſtrare, quo labente, quæ ſuperſtruuntur & ipſa corruant neceſſe eſt. Quædam tamen non minoris momenti adjicienda curavi, quibus in progreſſu diſquiſitionis quæ & quanta objici poſſent luce clarius oſtenditur. Hoc tamen non eſt tanti Viri vitio tribuendum, ſed methodi jam omnium conſenſu receptæ culpæ, cui nimis fidenter ſe commiſerat. Incredibile enim dictu eſt, quam facile unus ex alio enaſcatur error, & ubi paullulum a recta ſemita deflexinus, quantopere, quo longius progredimur, ab ipſa veritate aberremus!

§. 60. Antequam finem facio occurram neceſſe eſt objectioni illi, quæ nunc tandem reſtat una, qua paſſim hæc nova a me inchoata Theoria vellicatur, cum nequeat in principiis, quibus nixa ſtat, ſolidis argumentis directe exagitari. Ut enim fucum faciant imperitis Adoleſcentibus, & ad hanc ineundam viam fallacibus imaginibus deterreant, non infimæ etiam notæ Analyſtæ paſſim in vulgus jactitant, non operæ pretium eſſe Theoriam hanc inani labore diligentius expendere, cum novo hoc ac tanto artificiorum, ac ſyſtematum apparatu ita parum proficiat, ut nec prima a communi methodo ſoluta Problemata attingere valeat. Quî enim fieri poteſt (reponunt) ut communis Analyſis tam lubricis nitatur principiis, & tot inde impedimentis & erroribus implicetur, quæ tamen tot Problematum tam analyticorum, quam phyſicorum difficillimæ indaginis elegan-

tiſ-

tiſſimas ſolutiones elargita fuerit: hæc vero mea, quæ tam magnifice ſupra communem effertur, ſit certitudine, evidentia, ordine, potentia veteri præferenda, cum tamen anguſtioribus ſane limitibus concludatur? Vires ſuas re vera prius exerat; communibus ſolutis ad altiora ac veteri methodo impervia aſſequenda prius ſe præſtet, antequam ejus placitis acquieſcamus: interim liceat nobis patentem jam viam, ac tot illuſtrium Virorum laboribus & inventis munitam ſequi ac ulterius urgere: nova vero hæc, ſi forte fortuna poſtquam adoleverit vera viſa fuerit, ac promiſſis reſponderit, Poſteris amplectenda relinquatur. Hiſce in vulgus diſſeminatis rumoribus, quam obruere jure nequeunt, ſilentio & oblivione delere conantur.

§. 61. Gratulor tamen mihi, quod hæc mea Theoria in ſuo ipſo ortu id tantum contra ſentiat, quod nova quæque & maxime neceſſaria ad alicujus diſciplinæ inſtaurationem initio experta ſunt, ea ſpe fretus, ut ſi hæc pares iſtis habuerit caſus ac viciſſitudines, pares etiam exitus tandem obtineat. Verum quæ, malum! tanta eſt judicii ſeveritas, ne dicam perverſitas, ut Theoriam hanc recentem adhuc, unius hominis induſtria ac opera vix enatam in re tanti momenti & difficultatis pleniſſima eo ſpecioſo titulo indicta cauſſa repudiare velint, quod nondum omnia & ſingula quæ quæri poſſunt, abſolverit, & ad intima quæque inveſtiganda nondum ſe erigere ac elevare potuerit? Nec mihi nunc veteris Analyſeos præſtantiam jactitent, de cujus imbecillitate tantopere conqueſti ſunt, ac conqueruntur adhuc celebriores ejus Cultores. Certe quidem, ut vere fatear quod ſentio, non video quo conſilio noſtri temporis Analyſtæ ſapientiores, qui ſponte fatentur graviſſimis difficultatibus Analyſim, quam profitentur, implicari, & in hiſce meis non aſpernanda ingenii, & veritatis indicia prælucere, hiſce penitus poſthabitis, veterem adhuc inſiſtant viam, antequam mea diligentiſſime perpenſa ſolidis argumentis refellant: quæ certe ſi vera ſunt, & jam confectum, & quod urgent Opus totum corruat neceſſe eſt. In hiſce enim Scientiis quæ longo deductionum filo in unum quaſi corpus congeſtæ ſunt, ſi una tantum ex primis aut falſa, aut male nexa reperiatur, & quæ ſequuntur & totum Opus neceſſario inficit, niſi prius prima mali cauſſa eradicetur. Quæ enim clades in geometricis, ſi ex gr: Prop: 47 Euclidis falſa eſſet? Non eſt igitur hominis ratione utentis meam enaſcentem Theoriam prorſus negligere eo ſolum nomine, quod illa Problemata adhuc non ſolverit, quæ a communi Methodo (renuente tamen mea Theoria) ſolvi dicuntur: eſſet autem iniquum & ab honeſta ratione prorſus alienum ab uno tantum homine brevi temporis spatio ea exquirere, quæ non niſi multorum, & quidem acutiorum Virorum laboribus (quæ eſt hominum & Scientiarum conditio) expectandum foret.

§. 62. Sed ut propius ad hanc admodum vagam criminationem diluendam accedamus, liceat mihi in naturam hujuſce Scientiæ parumper inquirere, & diverſas, quibus utitur, methodos commemorare. Innueram Cap: III §. 3 Lib. I P. I.ª Scientiam hanc nihil aliud eſſe, niſi *artificium in Geo-*

*me-*

*metriæ subsidium inventum, ut per calculorum analyticorum ad geometricam traductionem facilius & plenius quod ipsa Geometria docet, assequamur.* Hinc primum locum tenere docuimus formulas analyticas, a quarum diversa configuratione, atque transformatione diversus locus geometricus necessario pendet. Munus igitur hujusce Scientiæ primum & præcipuum est diversa artificia atque methodos tradere, quibus tuto cognoscatur quamnam affectionem geometricam formula analytica varie disposita requirat, & quando, & quomodo diversa ipsius dispositione ab una ad alteram constructionem geometricam indicandam transferatur. Hinc a simplicibus incipiendo tradendi primum erant Canones, quibus doceremur quot & quænam systemata natura quantitatis geometricæ linearis requirat; qui sint limites horum diversorum systematum; quæ fluentium origo, natura, & diversa pro earum diversitate systematum configuratio; quibus modis liceat a simplicibus ad magis composita transferri; quo modo a natura ad naturam transitus legitimus fieri possit; quæ artificia sint propria unius naturæ, quæ alterius, & cætera omnia, quæ & in P. I., & hîc tamquam prima hujusce Scientiæ fundamenta jacienda erant; ut recte ac sine erroris periculo formula analytica ad affectionem geometricam traduci posset. Et hæc est illa, quæ in veteri Analysi dicitur *Methodus directa* solvendi æquationes cujuscumque gradus, geometricis inde applicandas. Hæc tamen directa Methodus, qua totum hoc Opus analytico-geometricum superstruendum erat, nulla, ut initio diximus, jure ac merito dicenda est.

§. 63. Hoc tamen primo ac necessario destituta auxilio Analysis communis ad inversam methodum confugere cogitur, & proposita sibi primum Curva singulari geometrica ex ejus proprietate formulas analyticas quovis modo coagmentare. Si enim attente animum advertas ad ea Problemata singularia, quæ sibi solvenda proponit, facile cognosces eam in id unum intentam, ut ex Curva, quam sibi proposuit, ita symbolis arbitrariis contorqueat quomodocumque calculum analyticum, ut assumptæ Curvæ proprietati præcipuæ aliquo modo satisfacere videatur. Ut vere dicendum sit Analysim, qua nunc aliquo cum fructu utimur, non esse nisi geometriam in formulas analyticas precario ac nullo consilio transformatam, quæ si geometrice sumpta spectetur, vera quidem est, sed formulæ, quas exhibet, falsæ, & geometricis veritatibus minime respondentes. Hisce tamen formulis ob eam, in qua versatur, directæ methodi ignorationem adeo Analysis vetus fidit, ut quod imaginariis quantitatibus inficitur aut repugnare prorsus, aut nullo modo ab analyticis formulis nova ratione conformatis exhiberi posse docuerit. Tamen si quæ toto hoc Libro, & præcipue Capp. IX, X, XIII, XIV, diximus vera sunt, aperte ostendunt quam necesse sit prima universalia hujusce Scientiæ principia nondum cognita invenire, quibus directa methodus nitatur, antequam ad Problemata singularia inversa methodo solvenda animus intendatur. Quod ut consequatur demonstrandum prius est in hisce principiis, quibus cætera superstruuntur, inesse malum, quod faten-

fatentur, & de quo frustra dolent celeberrimi præsertim hujusce sæculi Analystæ: atque ideo quæ inde ulterius progressa communis Analysis docet esse partim falsa, fallacia partim, ac omnia precario sumpta, nulla lege firmata, & a veris principiis detorta, ac ipsius culpa, non calculi necessitate, imaginarii labe infecta. Ad quæ omnia & singula præstanda necesse deinde erat attenta meditatione nova principia hujusce Scientiæ de integro jacere; leges ac placita, quibus moderantur, invenire ac firmare; quas diversas affectiones geometricas diversa formularum configuratio intelligit, cognoscere; contra præjudicatam opinionem defendere; falsa eliminare; dubia firmare: ut hisce omnibus ac singulis bene constitutis, & in unum Scientiæ corpus ordine digestis inverso postea ordine, quas formulas analyticas suo tamquam jure quævis affectio geometrica necessario postulet, assequi posset, & pro re nata geometricis applicare.

§. 64. Hoc est illud magnum sane, quod mea Theoria primum aggredi audet, ut hoc bene constituto ad Problemata peculiaria solvenda methodo inversa feliciori exitu accedat. Cæterum in hac ipsa mea Theoria adhuc infante veritates novas universales communi methodo prorsus impervias & successivo & ordinato nexu inter se conjunctas quisquis, ne injurius sit, fateatur oportet ad novam hanc disciplinam instaurandam mirifice profuturas. Quid enim expectandum sit ad totius Scientiæ incrementum (ut cætera prætercam) ab una illius imaginarii a toto Calculo perpetua eliminatione aliis judicandum relinquo. Nunc me illud poscere jure censeo, ut quid futurum sit desinant quærere, ac solum quæ hactenus publici juris feci, diligenter excutiant; quæ si certa sunt, si universalia, & a novis prorsus artificiis eruta, non possunt quin sint novarum & quidem fœcundissimarum rerum semina; licet ab iis qui hæc contra jactitant, horum utilitas, quam non vident, aut non videre simulant, denegetur. Utinam hisce tantis ausis ingenium & ætas non desit: quod potero tamen exequar, cætera Posteris persequenda relinquam. Interim (ut verbis Baconis in Præf. P. II. Instaurationis &c. finem imponam) æquum nobis videtur „ ut ab hominibus impetremus (in tanta præsertim Doctrinarum & Scientiarum restauratione) „ ut qui de hisce nostris aliquid sive ex sensu proprio, sive ex auctoritatum „ turba, sive ex demonstrationum formis (quæ nunc tamquam leges quædam judiciales invaluerunt) statuere aut existimare velit; ne in transitu „ & velut aliud agendo facere se posse speret: sed ut rem pernoscat; nostram, quam describimus & munimus, viam ipse paullatim tentet; subtilitati rerum, quæ in experientia signata est, assuescat; pravos denique, „ atque alte hærentes mentis habitus, tempestiva & quasi legitima mora „ corrigat; atque tum demum (si placuerit) postquam in potestate sua „ esse cœperit, judicio suo utatur „.

# NOI RIFORMATORI
## DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del P. F. *Girolamo Maria Zanettini* Inquisitor Generale del Santo Offizio di Padova nel Libro intitolato: *Nova Analyseos Elementa Auctore Joanne Baptista Nicolai, &c. Tomus Primus Pars altera, MS.* non vi esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e Buoni Costumi, concediamo Licenza a *Niccolò Bettinelli* Stampator *di Venezia per il Seminario di Padova*, che possi essere stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 7. Dicembre 1792.

{ GIACOMO NANI Cav. Rif.

{ ZACCARIA VALLARESSO Rif.

{ FRANCESCO PESARO Cav. Proc. Rif.

Registrato in Libro a Carte 6. al Num. 29.

*Marcantonio Sanfermo Seg.*

Adi 18. Dicembre 1792.
Registrato in Libro a Carte 174. esistente nel Magistrato degl' Illustriss. ed Eccellentiss. Sigg. Esecutori contro la Bestemmia.

*Giannantonio Maria Cossali Nod.*

# INDEX CAPITUM.

| LOCO | LEGE |
|---|---|
| Pag. 5. lin. 30. ductum | ducti |
| 11. lin. 23. $\frac{n \cdot a}{m + n}$ | $\frac{m \cdot a}{m + n}$ |
| 24. lin. 7. $\left(\frac{7-3}{7-2}\right)$ | $\left(\frac{7-3}{7-3}\right)$ |
| 82. lin. 20. ( Tab. 5. Fig. 16.) | ( Tab. I. Fig. 16) |
| 84. lin. 16.. $\frac{FG}{AC}$ | $\frac{2.FG}{AC}$ |
| 190 lin. ubi effert 26 | = |
| 257. In. ubi effert 1 + | = |
| 307. lin. 1. $\left\{\frac{\left(\infty + \frac{1}{2}\right) + \left(\infty - \frac{1}{2}\right)}{\left(\infty + \frac{1}{2}\right) - \left(\infty - \frac{1}{2}\right)}\right\}$ | $\left\{\frac{\left(\frac{\infty + 1}{2}\right) + \left(\frac{\infty - 1}{2}\right)}{\left(\frac{\infty + 1}{2}\right) - \left(\frac{\infty - 1}{2}\right)}\right\}$ |
| 346. lin. ultima M—N : N : : 2 : 5 SA | M—N : : N : : 2 . 5 SY |
| 378. lin. 2. $\frac{\frac{1}{2}a + z \text{ SY}}{z - \frac{1}{2}a \text{ SA}}$ | $\frac{\frac{1}{2}a + z \text{ SY}}{\frac{1}{2}a - z \text{ SA}}$ |
| 428. lin. ubi effert = | 6 |
| 640. lin. 5. Fig. 15. | Fig. 12. |
| 661. lin. 6. 6 . 16 | §. 16 |
| 662. lin. 16. AC : AB : : AG : AH | AC : AB : : CG : GH |
| 682. lin. 2. $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}$ | $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^6}{1}$ |
| 703. lin. ubi effert ut | §. 37 |

CAP.



# CAPUT I.

*Prima Methodi generalis Coefficientium indeterminatorum jaciuntur fundamenta.*

§. 1. N I.ª hujus Operis Parte, Lib. I. docuimus originem linearis dimensionis, quam Methodus communis ab uno tantum solitario & dato puncto derivat, in caussa fuisse cur identica cum diversa quantitate, positivum cum negativo, additio cum subtractione, aliquid cum nihilo confunderentur: ut minime mirum videri debeat, si analyticum hoc ædificium tam male firmum, & abnorme erectum acceperimus, quod tam lubrico statim fuerit fundamento superstructum. Ut enim quæ fusius illic explicavimus compendio hîc necessario perstringamus, posito uno tantum (Tab. 1. *Fig.* 1) D puncto originis dato, ex quo hinc inde in eadem directione profluat linea continuata A B, hæc in duas partes D A, D B puncto D dividitur, quarum singulæ donec nullum aliud punctum ex utraque vel alterutra parte determinetur, ad infinitum quoquoversum excurrant licet, nunquam ad valorem datum determinari poterunt, si excipias punctum D, in quo ambæ nullescunt. Vocata itaque $DA = x$, & $DB = y$, erit $DA + DB = x + y$, cumque earum summâ totam integram & quidem nullis terminis circumscriptam lineam fluentem A B constituat, si fiat hæc $= z$, erit $z = AB = BA = x + y = DA + DB$. Integra hæc ($z$) absolutam prorsus indeterminationem exhibet, cum neque ipsum unum originis punctum, a quo initium sumat, indicet. At facta $z = x + y$, hac secundæ formulæ pro prima substitutione determinatur punctum D medium, ex quo hinc inde prorumpere intelliguntur fluentes D A, D B. Ex hac tamen nihil aliud eruitur quam situs puncti D, quod est centrum utriusque fluxionis, manentibus prorsus indeterminatis communi directione, & utriusque fluentis valore.

§. 2. Necesse igitur est aliud saltem datum punctum B determinare, quo & directio fluxus versus B, & distantia B D a puncto originis D constituatur, ut æquatione ex datis & fluentibus conflata, longius inquisitio procedat. Statuatur itaque alterum punctum B (*Fig.* 2.) a primo distans spatio $DB = a$. At hisce duobus D, B punctis statutis, non est cur potius uni quam alteri initium totius fluxionis tribuatur, cum utrumque pari gaudeat prærogativa: & posita D C fluente ex puncto dato D, atque ideo puncto C fluente, intra data puncta D, B initio existente, altera necessario consequitur B C ex altero dato puncto B profluens. Crescente D C vel B C minuitur B C vel D C, donec occurrente C in B vel D, determinatur utraque fluens: scilicet D C vel B C æqualis D B, vel B D maxima $= a$; altera minima $o$ B vel $o$ D $= o$. Hisce vero limitibus transgressis ulterius progrediente C in C' vel C'', fluentes in eam primam recidunt indeterminationem, fitque una D C' vel B C'', B C' vel D C'' altera. Hac porro peracta præparatione formula $x + y$ prius absolute indefinita, quæ uno tantum originis puncto D statuto ulteriorem respuebat determinationem, duorum horum punctorum datorum D & B ope eam statim suscipit determinationem, qua licet ad eam æquationem pervenire ex datis & fluentibus conflatam, quæ universim superioribus affectionibus geometricis respondeat. Quare non est arbitraria ea, quam in P^e^. I^a^. posuimus, duorum punctorum origo, sed prorsus necessaria, & cum intima rei, de qua agimus, natura conjuncta: qua sine neque ad legitimam, & intra limites definitam æquationem pervenire, neque ea impedimenta vitare licet, in quæ necessario impingere Methodum communem ostendimus.

§. 3. Hoc ita verum est, ut in æquatione prima $x + y$, quæ uno tantum originis puncto D (*Fig.* 3) statuto est $= DA + DC$, nec ultra definiri, aut æquali termino comparari potest, nisi statuatur alterum punctum datum B, & ea peragatur substitutio, quam nobis sponte offert hæc duplex punctorum origo: vocata enim $BC = x'$, erit

$$x + y = \left\{ \begin{array}{l} DA + DC = DA + DC' \\ DA + (DB - BC) = DA + (DB + BC') \\ x + (a - x') = x + (a + x') \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} BC' + BC = BC' + BA \\ BC' + (BD - DC) = BC' + (BD + DA) \\ y + (a - x') = y + (a + x') \end{array} \right\},$$

& hinc inde sublatis identicis remanet

$$y = DC = \left\{ \begin{array}{c} DB - BC \\ a - x' \end{array} \right\} = DC' = \left\{ \begin{array}{c} DB + BC' \\ a + x' \end{array} \right\}.$$

$$x = BC = \left\{ \begin{array}{c} BD - DC \\ a - x' \end{array} \right\} = BA = \left\{ \begin{array}{c} BD + DA \\ a + x' \end{array} \right\}$$

Hoc est ea in æquatione necessario evanescit illa prima fluens, quæ identica in utro-

utroque membro reperitur: nec poteſt loco ipſius ab altera æquationis parte alia ipſi æqualis ſubſidio novæ conditionis ſubſtitui, nullo alio dato puncto in ſuæ fluxionis directione occurrente: quod tamen alteri contingit verſus datum punctum B, vel D fluenti. Hinc in prima evaneſcit DA, cujus punctum A fluens nulli dato puncto occurrit: remanent DC, BC, vel DC′, BC′ diverſis originis punctis præditæ. In ſecunda evaneſcit identica BC′, remanent BC, DC, vel BA, DA. Ergo neceſſario conſequitur

$$\text{ex prima}\begin{cases} DC+BC=DB \\ y+x=a \end{cases};\begin{cases} DC'-BC'=DB \\ y-x=a \end{cases}$$

$$\text{ex ſecunda}\begin{cases} BC+DC=BD \\ x+y=a \end{cases};\begin{cases} BA-DA=BD \\ x-y=a \end{cases}$$

Quare ex hac duplici neceſſaria duorum punctorum origine eruitur ſtatim neceſſitas illorum etiam duorum Syſtematum, quorum unum, excurrente C intra D & B, *baſis datæ*, excurrente C extra, *baſis variabilis* appellavimus: quorum omnium ignoratione, male jactis primis ſimplicioribus Analyſeos principiis, in eas ambages nunquam extricandas, quas in P. I^a. oſtendimus, ultro ſe conjecit Methodus hactenus uſurpata. Verum quidem eſt Methodum notam, ut aliquo modo in ſuis inveſtigationibus progrediatur, ad alterum datum punctum B ſtatuendum neceſſario cogi: ſed cum poſita DB poſitivorum plaga, & uno originis puncto D, vocata DC fluente poſitiva $+x$, ponat $DA=-x=-DC$, quæ poſitivo ſigno eſſet afficienda, & æquanda BA poſitivæ ab altero originis puncto B′, detracta conſtanti BD, eas ſibi conflat æquationes falſas, fallaces, quibus male fidis tanquam ducibus quo magis progreditur, eo longius a recto veritatis tramite eam aberrare jam oſtendimus.

§. 4. Ad quas difficultates tandem tollendas, & ad falſas opiniones omnium conſenſu a primis uſque hujuſce Scientiæ exordiis hauſtas ea, qua par eſt, diligentia evellendas, totam primam hujuſce T. I. Partem inſumere opus fuit, ut vera ac ſimpliciora principia, ab intima quantitatis geometricæ natura eruta, rectius tandem notiones quantitatis abſolute abſtractas cum geometricis conſociarent. In quo negotio aſſidue tractando, atque in omnes partes verſando nova tandem lux opportune & quaſi inſperato affulſit, qua primam & univerſaliorem Methodum tanquam baſim & fundamentum aliarum omnium, quæ adhuc inventæ ſunt, feliciter conſecuti ſumus.

§. 5. Ut vero ſenſim & ordine procedamus, revocemus oportet formulas lineares $x=a-y$, $x=a+y$, in quibus poſita conſtanti $(a)$, & fluente $y$, continentur a nobis inventa ſyſtemata S. A. & S. Y. Quoniam vero variabilis $(y)$ infinitis prorſus valoribus, intra tamen limites proprii Syſtematis, ſingillatim affici poteſt, & ſæpe in calculis ad valorem quemdam datum determinatur, ponamus $y=b$, alicui ſcilicet valori determinato, ut ſe ſe offerant æquationes $x=a-b$; $x=a+b$, quibus conſtantes cum fluentibus confunduntur; quia univerſim litteris primis alphabeti conſtantes, ultimis fluentes in

calculis ſemper deſignantur, quamvis ſæpe varia formularum transformatione horum ſymbolorum officia invertantur. In æquationibus tamen ſic exhibitis (ſi regulis tantum ab Analyſi communi traditis inſiſtamus: quid enim ſentiat mea Methodus §. 33 exponetur) litteræ ($a$), ($b$) ad certum ſingulæ valorem determinatæ vel ambæ ſupponi poſſunt eodem tempore conſtantes, vel alterutra vicem gerere poteſt conſtantis, alterutra variabilis, licet in æquationibus ſuperioribus utraque determinata exhibeatur. In primo caſu $x$ ſymbolo, ut moris eſt, variabili expreſſa, cui comparatur $a \mp b$, eſt tamen natura ſua ſemper conſtans, cum manentibus valoribus ($a$) & ($b$) nullum alium ſuſcipere poſſit valorem, quam qui ab ipſa ($a \mp b$) præſcribitur, hoc eſt unus & idem. In prima enim æquatione poſita $a > b$, & facta (*Fig.* 4.) $AB = a$, $AC$ vel $Bc = b$, erit $x = AB - AC = BC = AB - Bc = Ac$: & poſita $a < b$ erit $x = AB - BC' = AC' = AB - Ac' = Bc'$, quæ ($x$) ſi diverſa a prima ſtatuatur, ſigno poſitivo eſt afficienda, licet ſit in directione primæ contraria, quacum nullam habet inſitam & neceſſariam relationem. In ſecunda vero æquatione (*Fig.* 5) $x = a + b = AB + BC = AC = BA + AC' = BC'$ utraque ſigno poſitivo affecta, utpote quæ ſingulæ in ſuo proprio Syſtemate ab alio ſejuncto continentur.

§. 6. In hac igitur ſnppoſitione $x$ natura ſua conſtans in hiſce æquationibus nullam aliam ſubire poteſt mutationem, quam illam, quam inducere poteſt idem valor $a \mp b$ conſideratus ut linea integra, vel ut ſubtractio vel additio duarum diverſarum linearum $AB$, $BC$. Si enim fiat $x = (a \mp b)$ (parentheſi lineam unam integram indicante) erit $x$ æqualis & identica uni lineæ integræ nullo dato puncto diviſæ: ſed hoc modo ne hilum quidem proficimus in ea, quam intelligimus, Analyſeos cum geometricis applicatione. At ſi ponas $x = a \mp b$ æqualem ſcilicet duabus quantitatibus datis ſimul ſubtractis vel additis, tunc $x$ primi membri, quæ abſtracte ſumpta eſt abſolute indefinita & quoad valorem, & quoad numerum, poſitionem, & exiſtentiam, a membro $a \mp b$, cui comparatur, efficitur conſtans, & non amplius una, ſed in duas partes diviſa, ut ſit $x = x \mp y = a \mp b$, & $x = a$, $y = b$: quo facto æquatio, quæ duobus tantum punctis datis erat una, tribus conſtitutis iſtiuſmodi punctis in duas dividitur. Contra vero, operatione inverſe peracta, quæ erant plures, ſublatis punctis datis intermediis, in unam legitime coaleſcunt: quemadmodum in P. I Lib. I demonſtravimus CAP. IV. *De diviſione unius Syſtematis in plura, & de plurium in unum conjunctione.*

§. 7. In hac igitur ſuppoſitione, ut $x$ primi membri ſit vere fluens in æquatione $x = (a \mp b)$ ſubintelligas oportet additum vel ſubtractum zero, ut æquatio ſit $x = (a \pm b) \mp o$: hoc eſt $x = (a \mp b) - o$ maxima in S. A., $x = (a \mp b) + o$ minima in S. Y. Idem dicas de æquationibus diviſis $x = a \pm o$; $y = b \pm o$, quarum ſingulæ, hac una zero additione vel ſubtractione, quæ erant identicæ fiunt limitis maximi vel minimi ad alterutrum Syſtema pertinentes, & facile ſubſtitutione $y$ pro zero ad æquationes intermedias reducuntur.

§. 8. Sed ulterius progredientes ad aliam hypotheſim accedamus, ac ponamus pri-

primo ( $a$ ) constantem, ( $b$ ) vero esse revera ( $y$ ) fluentem ad valorem ( $b$ ) ex infinitis, quorum capax est, arbitrio determinatum. Hoc posito æquationes supra positæ erunt $x = a - b'$, $x = a + b'$: prima Systematis S. A., in quo $y$ zero usque ad ( $a$ ) excurrit: secunda Systematis S. Y., in quo $y$ a zero usque ad infinitum progreditur. Idem dicas si pro ( $a$ ) constanti, assumas ( $b$ ) dummodo advertas tam æquationem primam $x = a' - b$, sive $x + b = a'$ quam secundam ad idem Systema S. Y. pertinere: sed in prima ( $a'$ ) sit oportet unus ex valoribus intra ( $b$ ) & infinitum contentis; in secunda unus illorum, qui intra ( o ) & infinitum continentur. Eadem constructio S. Y. S. A. tam in hypothesi ( $a$ ) constantis, quam ( $b$ ), sed non eadem linea A B ( *Fig. 6* ) quæ vicem gerit constantis: in primo enim casu est $= a$; in secundo $= b$. Hujusmodi igitur æquationes sunt vere & natura sua indeterminatæ, licet determinatione arbitraria unius fluentis determinatæ censeantur.

§. 9. Illud vero diligentissime fac animadvertas in istis æquationibus quod, ( cum non nisi una tantum ( $a$ ) vel ( $b$ ) $=$ A B cognita & data reperiatur, nec aliud punctum datum præter duo puncta A, B, quibus distantia A B determinatur, in toto Systemate constitutum fuerit, cui linea a puncto originis A vel B puncto fluente C occurrens novam subeat determinationem ac valorem; ) fluentes A C, B C sive $x$, $y$ non possunt esse nec alio modo efferri nisi ut partes indeterminatæ unius constantis primum sumptæ ( $a$ ) vel ( $b$ ) quæ, donec C fluens intra puncta A & B versatur, sunt singulæ submultiplæ ipsius A B: C vero hinc vel inde extra hæc puncta vagante major fluens semper multipla ipsius A B, minor vero a zero usque ad infinitum excurrens modo submultipla, multipla modo esse potest. Fluentes igitur non nisi a quantitate constanti A B metiri possumus, atque repræsentare, nec alio modo fieri possunt fluentes, & infinite variare nisi ob valorem partium ipsius A B, qui necessario est indeterminatus. Variabilitas igitur fluentium est tribuenda numero abstracto ( qui coefficiens appellatur ) ad constantem A B applicato. Quare.

*Fluentes nihil aliud sunt nisi productum numeri abstracti, qui certa lege infinitimode variare potest, ductum in quantitatem semper constantem eodem manente Systemate.*

Hinc ad fluentium naturam vere significandam, ac suo proprio charactere exprimendam ut geometricæ quantitatis naturæ exacte respondeant, ita sunt conformandæ formulæ analyticæ, ut nullum aliud in formulis Symbolum appareat quantitatis geometricæ naturam referens, quam quod repræsentat eam unam, quam nobis exhibet Systema geometricum, unitatem. Posita enim ( $a$ ) illa una geometrica unitate, cæteræ ( $b$ ) ( $c$ ) ( $d$ ) &c. quæ in calculis vulgo usurpatis semper occurrunt litteræ alphabeticæ, non aliud sunt nisi fractiones ipsius ( $a$ ) multiplæ vel submultiplæ: ac proinde ne in errorem inducamur, & quantitates cum coefficientibus confundamus, & ab uno ad alterum systema incaute, & sine certa lege inscii transferamur, ea est concinnanda formula, & loco ( $b$ ) ( $c$ ) ( $d$ ) &c substituenda, quæ vere & proprie naturam fluentium in unoquoque systemate symbolis, quibus utitur, complectatur. Ex hoc uno hactenus ignoto aut neglecto tam facili & evidenti principio Nova prorsus ( quis crederet! ) & universalior exsurgit Methodus, quam *Methodum Coefficientium Indeterminatorum* jure mi-

mihi videor appellare posse, cujus vis & excellens natura tanta est, ut Analysis vetus jam in P. Ia. collapsa & pene diruta in novam ampliorem ac firmiorem hujusce ope renascatur formam & naturam. De qua nunc est pro dignitate agendum.

§. 10. Manum itaque operi admoventes revocatis æquationibus $M + N = a$ Systematis S. A., $M - N = a$ Systematis S. Y. ex superius dictis scimus fluentes M, N ut ad veram ac suam formam traducantur, ita esse comparandas, ut in ipsis appareat quantitas ( $a$ ) cujus naturam induunt, & Systematis in quo sunt conditioni satisfaciant. Fiat itaque $M = \frac{a}{m}$; $N = \frac{a}{n}$ : erit ex conditione systematis S. A. $\frac{a}{m} + \frac{a}{n} = a$; & ex secundi S. Y. $\frac{a}{m} - \frac{a}{n} = a$: sive in prima ( $mn$ ) $= m + n$, & in secunda ( $mn$ ) $= m - n$: ergo in prima substituto communi denominatore ( $m + n$ ); in secunda $m - n$; erit in S. A. $M = \frac{m\,a}{m + n}$; $N = \frac{n\,a}{n + m}$, in S. Y. $M = \frac{m\,a}{m - n}$, $N = \frac{n\,a}{m - n}$:

Sunt igitur $\left(\frac{m}{m + n}\right), \left(\frac{n}{n + m}\right)$ coefficientes numerici fluentium S. A. $\frac{m}{m - n}$, $\frac{n}{m - n}$ coefficientes numerici S. Y. ducendi in communem quantitatem ( $a$ ): & in utroque Systemate $M : N :: m : n$, hoc est fluentes in ratione indeterminata numerorum $m : n$ sese respiciunt. Quare primum fundamentum hujusce Theoriæ nititur solutione problematis dividendi lineam in ratione quavis $m : n$.

§. 11. Data igitur linea (*Fig.* 7) $AB = a$, sit primum punctum C fluens, quod datam AB in duas variabiles dividit $AC = M$; $BC = N$ intra puncta extrema fixa A & B: erit $AC : BC :: M : N :: m : n$. Ratio $m : n$ est prorsus abstracta, sive ut numerus ad numerum, cum repræsentet relationem tantum, qua se se respiciunt quantitates M, N ejusdem naturæ, quæ cum sint variabiles, ratio ipsa variabilis sit oportet.
Ex superiori analogia eruitur.

$$AC = \frac{M}{N} . BC = \frac{m}{n} . BC = \frac{m}{n} . N : \&$$

$$BC = \frac{N}{M} . AC = \frac{n}{m} . AC = \frac{n}{m} . M .$$

Verum cum in hac suppositione puncti fluentis C intra data puncta A, B variabiles M, N simul sumptæ totam semper AB exhauriant; necessario consequitur earum summam, licet ipsæ singillatim sint fluentes, semper esse constantem, & $M + N = N + M = AB = BA = a$. Erit igitur.

( 1 )

(1) $AC + BC = M + N = a = \frac{M}{N} \cdot BC + \frac{N}{M} \cdot AC = \frac{m}{n} \cdot N + \frac{n}{m} \cdot M$ & hoc secundo membro ad unum tantum M, vel N reducto, habetur

(2) $AC + BC = M + N = a = \frac{M+N}{M} \cdot AC = \left(\frac{m+n}{m}\right) M = \frac{N+M}{N} \cdot BC = \left(\frac{n+m}{n}\right) N$:

ex qua eruitur

$AC = M = \frac{M}{M+N} \cdot (M+N) = \frac{m}{m+n} \cdot a$, &

$BC = N = \frac{N}{N+M} \cdot (N+M) = \left(\frac{n}{n+m}\right) a$: & inde

(3) $AC + BC = M + N = a = \frac{M}{M+N} \cdot (M+N) + \frac{N}{N+M} \cdot (N+M) = \frac{m}{m+n} \cdot a + \frac{n}{n+m} \cdot a = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$

Æquatio hæc (3)ª aperte ostendit, necesse esse ad adimplendam conditionem, quæ vult additionem fluentium semper constantem, ut unaquæque variabilis ad eam traducatur formam, quam nobis exhibuit (2)ª æquatio, scilicet $M = \frac{m\,a}{m+n}$; $N = \frac{n\,a}{n+m}$, ex quarum formularum additione tantum vere consequitur $M + N = \left(\frac{m}{m+n}\right) a + \left(\frac{n}{m+n}\right) a = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a = a$.

§. 12. Quod si punctum fluens C (*Fig.* 8) transgresso limite constanti B, vel A, reperiatur in C′ vel C″, oculis ipsis patet tunc summam variabilium $M = AC'$, $N = BC'$; vel $N = BC''$, $M = AC''$ non esse amplius constantem $= AB$, vel $BA = a$, sed semper variabilem, neque locum amplius esse in æquatione (1)ª & (2)ª quantitati constanti ($a$), ut ex ejus admixtione cum fluentibus utiliter promoveatur inquisitio. Cum tamen in hoc casu differentia, quæ superius erat variabilis, fiat nunc constans $= a$; cum semper sit $AC' - BC' = M - N = AB = a$, vel $BC'' - AC'' = N - M = BA = a$, æquationes ex data ($a$) & fluentibus conflatæ erunt sequentes

$$(1)\begin{cases} AC' - BC' = M - N = a = \dfrac{M.BC'}{N} - \dfrac{N.AC'}{M} = \dfrac{m}{n}.N - \dfrac{n}{m}.M: \\ \text{vel facto } N > M \\ BC'' - AC'' = N - M = a = \dfrac{N.AC''}{M} - \dfrac{M.BC''}{N} = \dfrac{n}{m}.M - \dfrac{m}{n}.N \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} AC' - BC' = M - N = a = \left(\dfrac{M-N}{M}\right)AC' = \left(\dfrac{m-n}{m}\right)M = \left(\dfrac{M-N}{N}\right)BC' \\ = \left(\dfrac{m-n}{n}\right)N \\ \text{vel facto } N > M \\ BC' - AC' = N - M = a = \left(\dfrac{N-M}{N}\right)BC'' = \left(\dfrac{n-m}{n}\right)N = \left(\dfrac{N-M}{M}\right)AC \\ = \left(\dfrac{n-m}{m}\right)M \end{cases}$$

& ex hac

$$(3)\begin{cases} AC' - BC' = M - N = a = \dfrac{M}{M-N}(M-N) - \dfrac{N}{M-N}(M-N) \\ = \dfrac{ma}{m-n} - \dfrac{na}{m-n} \\ \text{\& facto } N > M \\ BC'' - AC' = N - M = a = \dfrac{N}{N-M}(N-M) - \dfrac{M}{N-M}(N-M) \\ = \dfrac{na}{n-m} - \dfrac{ma}{n-m} \end{cases}$$

in qua differentia variabilium M, N vi formulæ, ad quam singula variabilis traducta fuit, fit semper constans: est enim semper

$$\begin{cases} M - N = \dfrac{m.a}{m-n} - \dfrac{n.a}{m-n} = \left(\dfrac{m-n}{m-n}\right)a = a = AB \\ N - M = \dfrac{n.a}{n-m} - \dfrac{m.a}{n-m} = \left(\dfrac{n-m}{n-m}\right)a = a = BA \end{cases}$$

§. 13. Quare illud primum maximi momenti, & in analysi prorsus necessarius sequens statuendus est

## CANON

*Quantitates fluentes, sive variabiles, quæ litteris* M, N, *vel* $x$, $y$, *vel quocumque symbolo ad libitum in Calculo designantur, ut propositæ conditioni satisfaciant, ad eam formam singulæ, ex infinitis, quas universim suscipere possunt sunt reducendæ, ut tam naturam quantitatis datæ quam limites valoris a Systemate in quo sunt statutos perpetuo servent.*

Majus igitur negotium, quam quisque hactenus suspicatus fuerat, est in posterum suscipiendum, ut ad legitimas & pro re nata utiles æquationes ex datis & fluentibus conflatas deveniamus, quæ primis opportune jactis conditionibus adamussim respondentes, ad id, quod quærimus, nos veluti manu ducant. Quæ enim variabiles symbolis $x$, $y$, &c vulgo arbitrio exprimuntur, non sunt nisi quædam signa abstracte sumpta infinitis determinationibus obnoxia, nec ulli determinata sed prorsus incognita, quæ nullius esse possunt utilitatis, nisi in eam transmutentur formam & inter eos limites definiantur, qui ab assumptis primo conditionibus requiruntur: quemadmodum superius fluentes ad eam formam reduximus, ut earum additio vel subtractio necessario ex natura formularum ipsarum uni quantitati constanti ( $a$ ) semper æquetur.

§. 14. Et sane litteræ M, N in superioribus æquationibus primo ad libitum sumptæ, quibus mente concipimus eas significare quantitates, quarum additionem vel subtractionem volumus uni quantitati constanti ( $a$ ) æquari; donec hisce litteris efferuntur, re & facto nihil aliud indicant, nisi quantitates prorsus & in omnibus indeterminatas: nec juvat eas simul additas vel invicem subtractas propositæ ( $a$ ) æquare nisi prius nova litterarum substitutione novæ æquationis subsidio eam formam revera subeant, ob quam ea, quam volumus, gaudeant proprietate. Porro si æquationem ( $1^{am}$. ) consulimus, hæc jubet esse $M = \frac{m}{n} . N$; $N = \frac{n}{m} . M$: quæ tamen ut tales sint, sit oportet $N = n'a$, $M = m'a$; in quo casu tantum hujusmodi æquationes locum habere possunt: sit enim $M = \frac{m}{n} . N = \frac{m}{n} . n'a = m'a$; $N = \frac{n}{m} . M = \frac{n}{m} . m'a = n'a$.

Ex hac tamen pro M & N substitutione determinantur quidem M & N ejusdem naturæ ac linea ( $a$ ), & ejusdem multiplæ vel submultiplæ, prout est numerus $m$, & $n$: sed nihil aliud tam a singulis $M = m'a$, $N = n'a$, quam a simul additis vel subtractis $M \pm N = m'a \pm n'a$ eruere licet, nisi ea nova forma afficiantur, ob quam earum additio vel subtractio sponte sua valorem ipsius ( $a$ ), cui comparamus, exhibeat. Confugiendum igitur est ad æquationem ( 3 )$^{am}$, quæ nobis exhibet $M = \frac{m\,a}{m+n}$, $N = \frac{n\,a}{m+n}$ in Systemate

S. A.; $M = \frac{m\,a}{m-n}$, $N = \frac{n\,a}{m-n}$ in Syſtemate S. Y.: ex qua tandem eam litteris M, N formam obtinemus, ob quam earum additio vel ſubtractio valori conſtantis ( $a$ ) exacte reſpondet.

§. 15. Hoc principio bene ſtatuto, ac ſemper ſervato ad formulas ſuperiores diligentius excutiendas nosmet convertamus. Ac primum æquatio ( 3 )ª §. 11. & 12. in ſe veram rationem continet valoris ſupra inventi, cui æquatur tam M, quam N. Nam ex §. ( 11 )° habetur $M = M\left(\frac{M+N}{M+N}\right)$; $N = N\left(\frac{N+M}{N+M}\right)$: ex (12)° $M = M\left(\frac{M-N}{M-N}\right)$; $N = N\left(\frac{M-N}{M-N}\right)$. Porro utraque ſub duplici forma valorem ſingularum fluentium exhibet pro varia ratione, qua diſponuntur. Si enim fiat $M = M\left(\frac{M+N}{M+N}\right)$, erit $M = M$, & ſequenti modo diſpoſita formula $M = \frac{M}{M+N}\cdot(M+N)$, fit $M = \left(\frac{m}{m+n}\right)a$: idem dicas de aliis. Quare ex una eademque formula varie præparata eruitur neceſſitas duplicis illius valoris, qui ſingulæ fluenti tributus, æquationes ſuperiores neceſſarias conſtituit: quos valores, ſi Analyſim communem conſulas, toto cælo inter ſe diſtare contendet: & tamen ab una eademque formula, quam eſſe identicam ipſa Analyſis communis aſſeverat, diverſa tantum ſuperiori tam ſimplici præparatione peracta, neceſſario profiſciſcuntur. Hoc in methodo communi, in qua variabiles iiſdem ſymbolis expreſſæ identicæ ponuntur, tantam exhibet difficultatem, ut identidem graviſſimis ſeſe implicet impedimentis, neque quo ſe vertat ſciat: quemadmodum in progreſſu Operis patebit: neque eam, quam hujuſmodi diverſæ formulæ ab una eademque profectæ in Analyſi communi præſeferunt contradictionem tollas, ac inter ſe concilies, niſi ad ea quæ §°: ſuperiori docuimus, diligenter attendas.

§. 16. Et ſane cum ex conditione ſyſtematis S. A. ſumma fluentium debeat eſſe æqualis conſtanti ( $a$ ), in hoc ſyſtemate quæque fluens fractionem minorem ipſa ( $a$ ) repræſentet oportet. At in Syſtemate S. Y., in quo e contra differentia fluentium æquatur eidem conſtanti ( $a$ ), fluens major valorem ipſius ( $a$ ) excedat oportet, ut ab ea detracta minori, earum differentia fiat ( $a$ ): & non niſi in limite minimo æquatur ( $a$ ), quando fluens minor fit zero. Fluens vero minor S. Y. poteſt eſſe minor ipſa ( $a$ ), cum a zero uſque ad infinitum progrediatur. Itaque fluens major in S. Y. nunquam poteſt cum alterutra fluente ſyſtematis S. A. congruere, niſi fiat minima in S. Y., & maxima in ſyſtemate S. A.: & fluens minor S. Y., donec intra zero & ( $a$ ) continetur, poteſt congruere cum ſingulis valoribus alterutrius fluentis ſyſtematis S. A. intra limites zero & ( $a$ ) conſtitutæ. Sumptis igitur æquationibus $a - x$

$= y$

$= y$ S. A. $= x - a = y$ S. Y., hæ non niſi in duplici caſu congruere inter ſe poſſunt, & verificari. Primo quando $x$ S. A. $= x$ S. Y.: in quo uno tantum caſu $y$ in utroque ſyſtemate fit zero, & $x = a$ maxima in S. A., minima in S. Y. Secundo modo quando $x$, $x$ diverſi ſyſtematis inæquales ſunt, & $x$ ſyſtematis S. Y. ſemper major $x$ ſyſtematis S. A. In hac ſuppoſitione $y$ utriuſque ſyſtematis invicem æquari inter ſe poſſunt, atque in omnibus hiſce caſibus prope infinitis, qui a limitibus zero & ($a$) definiuntur: in quibus ſingulis erit $a - x = y$ S A $= x' - a = y$ S Y, ſive $y = y$; $a - x = x' - a$.

§. 17. Ut vero id clare percipiatur confugiendum eſt ad hanc meam Methodum ſubſtitutione $x$, $y$ valorum, qui ab utroque ſyſtemate præſcribuntur. Qua facta ſubſtitutione æquationes ſuperiores in has ſequentes tranſmutantur.

$$a - x = y \text{ S. A} = x' - a = y \text{ S Y.}$$

$$\left(\frac{m+n}{m+n}\right) a - \frac{m.a}{m+n} = y \text{ S. A} = \frac{m'.a}{m'-n} - \left(\frac{m'-n}{m'-n}\right) a = y \text{ S Y.}$$

ex quibus ſtatim patet, ſi fiat $n = o$, fieri $x$, $x'$ æquales $a$, & $y = y = o$ In cæteris caſibus ut æquatio verificetur, ſit oportet $\frac{n}{n+m}.a$ S A $= \frac{n}{m'-n}.a$ S Y: ſive alterutra fluens ſyſtematis S A æqualis minori fluenti $\frac{n}{m'-n}.a$ S Y. Ut vero id conſequamur, ſit neceſſe eſt $n$ S A ejuſdem valoris ac $n$ S Y; & rurſus $m + n = m' - n$, ſive vel $m' = m + 2n$; vel $m = m' - 2n$: ex quo patet $m'$ ſemper majorem $m$, ac in eo tantum caſu æqualem in quo eſt $n$, ſive $y$ utrinque $= o$: ut ſupra invenimus. Subſtituto vero in æquatione ſuperiori pro $m'$, $m$; vel $m'$ pro $m$, ſeſe offerunt in primo caſu

$$\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a - \frac{n.a}{m+n} = y \text{ S A} = \left(\frac{(m+2n)}{(m+2n)-n}\right)a - \left(\frac{(m+2n)-n}{(m+2n)-n}\right)a \text{ S Y.}$$

$$\text{vel} \left(\frac{(m'-2n)+n}{(m'-2n)+n}\right)a - \left(\frac{(m'-2n)}{(m'-2n)+n}\right)a = y \text{ S A} = \frac{m'.a}{m'-n} - \left(\frac{m'-n}{m'-n}\right)a = y \text{ S Y,}$$

& in primo caſu $\frac{n\,a}{m+n}$ S A $= y = \frac{n.a}{(m+2n)-n} = y$ S Y.

at in ſecundo $\frac{n.a}{(m'-2n)+n}$ S A $= y = \frac{n.a}{m'-n} = y$ S Y.

Ergo fluens minor $\frac{n.a}{m'-n}$ S Y, cum debeat eſſe æqualis $\frac{n\,a}{m+n}$ S A, intra li-

mites zero, & ( $a$ ) systematis S A coerceatur oportet: hoc tantum discrimine, quod $\frac{n.a}{n+m}$ S A est in directione contraria suæ æqualis $\frac{n.a}{m'-n} = \frac{n.a}{(m+2n)-n}$ S Y. Subtracta enim in S A ab $\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a$, $\frac{ma}{m+n}$, remanet $\frac{na}{m+n}$ in directione contraria alterius $\frac{ma}{m+n}$: at in S Y subtracta $\left(\frac{m'-n}{m'-n}\right)a$ minori ab $\frac{m'a}{m'-n}$ majori, remanet $\frac{na}{m'-n}$ in eadem directione primæ $\frac{m'a}{m'-n}$, sive in directione contraria suæ æqualis $\frac{na}{n+m}$ systematis S. A.

§. 18. Insuper substituto pro $m$ ejus valore dato per $m'$ erit

$$\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a - \frac{ma}{m+n} \text{ S A} = \left(\frac{(m'-2n)+n}{(m'-2n)+n}\right)a - \left(\frac{m'-2n}{(m'-2n)+n}\right)a$$
$$= \left(\frac{m'-n}{m'-n}\right)a - \left(\frac{m'-2n}{m'-n}\right)a \text{ S Y} = \frac{na}{m'-n} \text{ S Y.}$$

sed $m'-2n < m'-n$: ergo $\left(\frac{m'-n}{m'-n}\right)a - \left(\frac{m'-2n}{m'-n}\right)a = \frac{na}{m'-n}$ S Y < a Formula igitur prima systematis S A facta hac substitutione transfertur ad S Y, sed fluens minor $\frac{na}{m'-n}$, cui æquatur, est, excepto extremo limite, semper minor ( $a$ ), cum sit $\frac{na}{m-n} = \frac{na}{(m+2n)-n}$ intra limites zero quando $n=o$; & ( $a$ ) quando $m=o$. Similiter

$$\frac{m'a}{m'-n} - \left(\frac{m'-n}{m'-n}\right)a \text{ S Y} = \left(\frac{m+2n}{(m+2n)-n}\right)a - \left(\frac{(m+2n)-n}{(m+2n)-n}\right)a$$
$$= \left(\frac{m+2n}{m+n}\right)a - \left(\frac{m+n}{m+n}\right)a \text{ S A} = \frac{na}{n+m} \text{ S A}$$

ergo $\frac{na}{m'-n}$ S Y. $= \frac{n}{(m+2n)-n} \cdot a = \frac{na}{m+n}$ S A: ergo licet $\frac{na}{m'-n}$ sit fluens minor S Y, tamen in hac substitutione potest esse major $\frac{na}{m+n}$ S A, cum sit maxima $= a$, quando $m=o$. Hoc artificio transitus facile & eleganter fit ab uno systemate ad alterum: qui transitus ex dictis duplici modo obtineri potest. Vel enim in superioribus æquationibus facta $y=o$, ut sit

a

$a - x = x' - a = o$, & $x = x' = a$, sive $\left(\frac{m+o}{m+o}\right) a - \frac{m}{m+o} . a = \frac{o . a}{m+o} = \frac{m' a}{m' - o} - \left(\frac{m' - o}{m' - o}\right) a = \frac{o . a}{m' - o}$, ex quo communi limite zero licet a prima ad secundam vel viceversa, scilicet ab uno ad alterum systema transitum anquirere.

Vel posita $\frac{n a}{m+n}$ S A $= \frac{n a}{(m' - 2n) + n} = \frac{n a}{m' - n}$ S Y: aut posita $\frac{n a}{m' - n}$ S Y $= \frac{n a}{(m + 2n) - n} = \frac{n a}{m + n}$ S A : erit $a - x = x' - a = y$.

Nam ex $a - x = y = \frac{n a}{m+n}$ S A facto transitu ad $\frac{n a}{m' - n}$ S Y, ad $x' - a = y$ transitum facis: & e contra $x' - a = y = \frac{n a}{m' - n}$ S Y, facto transitu ad $\frac{n a}{m+n}$ S A, ad æquationem $a - x = y$ S A facile pervenisti.

§. 19. Hinc in ipso statim limine vides quomodo conciliari possit veritas æquationum $a - x = x' - a = y$, in quibus facta $x = a$ fit $y = o$, aut facta $x$ primæ diversa & minor ( $x'$ ) secundæ erit $y$ aliquid, & vere $a - x = x' - a = y$, donec $y$ non excedit valorem ( $a$ ), ut supra explicavimus. Ex quibus eruitur etiam, quam male se gerat Methodus nota, quæ posita ex: gr: $a - x = y$ S A, supponit $x$ fieri posse majorem ( $a$ ), & fieri $a - x$ negativum: quod in hoc systemate repugnat, cum sit $x = \frac{m a}{m + n}$ vel $\frac{n a}{n + m}$, quæ necessario semper minor est ( $a$ ), ac proinde $x$ non potest excedere valorem ( $a$ ), quem ad summum in limite maximo potest attingere. Similiter data $x' - a = y$ S Y, supponit fieri posse $x'$ minorem ( $a$ ), & tamen cum sit $x'$ in hoc systemate fluens major $= \frac{m' a}{m' - n} = a + \frac{n a}{m' - n}$, non potest ex natura systematis fieri minor ( $a$ ), & $x' - a$ negativum. Poterit quidem Methodus nota huic falsæ & repugnanti suppositioni remedium adhibere facillimum: posita enim $x$ majori ( $a$ ) in æquatione $a - x = y$, & $x'$ minori in altera $x' - a = y$; in quo casu ambæ fiunt negativæ, si negativas sumpsisset & $y$, quæ vere sunt negativæ (cum ex suppositione æquentur negativis), fieret in primo casu $a - x = - y$, $x' - a = - y$ in secundo: sive $x - a = y$, $a - x' = y$, & hoc modo ab uno ad alterum systema, quod suppositio facta requirit, se transtulisset. Sed cum contra naturam systematis, & contra rationem velit $y$ positivam, dum negativæ quantitati æquat; & contra naturam utriuſ-

utriusque systematis peccat, in quibus nec $\frac{na}{m+n}$ major ( $a$ ); nec $\frac{ma}{m-n}$ minor ( $a$ ), & in contradictionem incidit manifestissimam; dum vult quantitatem positivam eo simul tempore, quo negativæ quantitati æqualem ponit.

§. 20. Hæc tamen, ut ab omni difficultatis & repugnantiæ specie liberentur, exempli a numeris desumpti appositione sunt confirmanda & illustranda. Animadvertimus §. 16. utrasque fluentes systematis S A esse fractiones unitate minores, quæ simul totam constantem ( $a$ ) adæquant. Diximus caussam cur quantitates, quarum summa æqualis est constanti ( $a$ ), fiunt fluentes ac infinitis valoribus singillatim obnoxiæ, non aliunde esse requirendam nisi in ipso coefficiente numerico, qui in utraque variabili infinite variare potest, quin earum summa ullam patiatur mutationem. Erit itaque in hoc systemate $M = m.a =$ ex: gr: $\frac{1}{5}.a$, & $m = \frac{1}{5}$ coefficiens ille numericus natura sua variabilis ducendus in constantem ( $a$ ), qui in hoc casu ad quintam ipsius constantis ( $a$ ) partem arbitrio constitutus est. Sed ex demonstratis §. 15 debet esse $M = M\left(\frac{M+N}{M+N}\right)$

$$= \frac{M}{M+N}(M+N) = \left(\frac{m}{m+n}\right)(ma+na) = \left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}\right)a$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a = \left(\frac{m}{m+n}\right)1.a = \frac{m}{m+n}.a = \left(\frac{m}{m+n}\right)\left[\frac{\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}}{\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}}\right]a$$

$$= \frac{m}{m+n}\left[\frac{\frac{m+n}{m+n}}{\frac{m+n}{m+n}}\right]a = \left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\tfrac{1}{1}\right)a = \frac{m}{m+n}\,(1^{\circ})\,a = \left(\frac{m}{m+n}\right)a:$$

ergo fractio hujusmodi $\frac{1}{5}$, ut hisce omnibus affectionibus satisfaciat, ita est constituenda, ut ipsius numerator sit una ex illis partibus, in quas divisimus totam unitatem, altera vero, quæ est complementum unitatis, ( scilicet 4 ), sit numerator alterius fluentis, ac communis denominator sit summa numeratorum utriusque fluentis. Quibus positis erit $M = \frac{1}{5}.a$; & $N = n.a = \frac{4}{5}.a$:

$$\text{ergo } M = \frac{1}{5}.a = \frac{1}{5}\left[\frac{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}\right]a = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)a =$$

$\frac{1}{5}$

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}+\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}\right\}.a=\frac{1}{1+4}(1)a$$

$$=\frac{1}{1+4}\left\{\frac{\frac{1+4}{1+4}}{\frac{1+4}{1+4}}\right\}a=\frac{1}{1+4}.\frac{1}{1}.\ a=\frac{1}{1+4}.(1^{\circ})\ a:$$ idem

dicas de fluente homologa $N=n.\ a=\frac{4}{5}.a:$ quæ omnia cum veritate consentiunt, & quod requirit §. 15, universim adimplent. Quare tantum abest, ut difficultatis & repugnantiæ speciem præseferant, quæ §. 15 invenimus, ut ex ipsa systematis conditione sua sponte & necessario consequantur.

§. 21. In systemate vero S Y cum major fluens M sit fractio excedens valorem ipsius ( $a$ ), ab ( $a$ ) valore minimo usque ad infinitum progrediens; minor vero N a zero usque ad infinitum excurrens, atque earum differentia semper constans & æqualis ( $a$ ); posita $M=m.\ a=m.\left(\frac{m-n}{m-n}\right)a$

$$=\frac{m}{m-n}(m-n)\ a=\frac{m}{m-n}\left(\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m-n}\right)a$$

$$=\frac{m}{m-n}\left\{\frac{\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m-n}}{\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m-n}}\right\}a=\left(\frac{m}{m-n}\right)(1)^{\circ}.\ a=$$ ex: gr: $\left(\frac{6}{5}\right)a$

$$=\left(\frac{6}{6-1}\right)\left\{\frac{\frac{6}{6-1}-\frac{1}{6-1}}{\frac{6}{6-1}-\frac{1}{6-1}}\right\}a=\left(\frac{6}{6-1}\right)\left\{\frac{\frac{6-1}{6-1}}{\frac{6-1}{6-1}}\right\}a=\frac{6}{6-1}(1^{\circ})\ a:$$ &

simili modo $N=\frac{1}{5}.a=\left(\frac{1}{6-1}\right)a=\frac{1}{6-1}\left\{\frac{\frac{6}{6-1}-\frac{1}{6-1}}{\frac{6}{6-1}-\frac{1}{6-1}}\right\}a=\frac{1}{6-1}(1^{\circ})a.$

Hoc est denominator communis fluentium æqualis differentiæ numeratorum fractionis M majoris & N minoris. Quibus intellectis statim etiam intelliges quantitatem constantem ( $a$ ), ut ad alterutrum systema ex duobus superioribus,

quæ

quæ unice dari possunt, referatur, exprimendam esse symbolo $a \, . \, 1.^{\circ}$, ut in duas variabiles nullo negotio resolvi possit ab assumpto systemate requisitas. Ita in systemate S A erit $a = a\,(1^{\circ}) = a \, . \, 1 = a \, . \left(\frac{m+n}{m+n}\right) = \left(\frac{m\,a}{m+n}\right) + \left(\frac{n\,a}{m+n}\right)$; & $M = \frac{m\,a}{m+n}$; $N = \frac{n\,a}{n+m}$: at in systemate. S Y $a = a\,(1^{\circ}) = a \left(\frac{m-n}{m-n}\right) = \left(\frac{m\,a}{m-n}\right) - \left(\frac{n\,a}{m-n}\right)$, & $M = \frac{m\,a}{m-n}$; $N = \frac{n\,a}{m-n}$: ex quo uno artificio facile & eleganter constantem in duas homologas fluentes divides ea forma præditas, quæ proposito systemati vere competit. Quare nisi prius statuatur systema, sive limites, intra quos fluentium valores concludendi sunt, nequeunt veræ & propriæ fluentium formulæ determinari, cum in utroque systemate diversæ sint, & non nisi generali symbolo ad libitum M, N designatæ.

§. 22. Nunc ad difficiliora pergentibus videndum, quo artificio ab una tantum formula, quæ unitatem in genere repræsentat, erui possit tam quæcumque constans cujuscumque ad libitum valoris, quæ vicem gerit unitatis illius abstractæ, & fluentium summæ æquatur, quam singula ex fluentibus, & hoc in utroque systemate. Sit igitur $M = \left(\frac{M+N}{M+N}\right) = 1$, sive æqualis unitati abstractæ donec sic effertur. Patet primum esse $\frac{M+N}{M+N} = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}$: cum enim M sit $= \frac{m}{m+n} \, . \, a$, $N = \frac{n \, . \, a}{n+m}$: erit $\frac{M+N}{M+N} = \frac{ma+na}{ma+na}$, & ablata communi $(a)$, $\frac{M+N}{M+N} = \frac{ma+na}{ma+na} = \frac{m+n}{m+n}$: & hoc modo M est summa coefficientium abstracte sumptorum, qui simul efficiunt unitatem abstractam sive numericam applicandam cuicumque quantitati $(a)$: ideoque $M = \frac{M+N}{M+N} = 1 = M+N = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}$ in suos coefficientes divisa. At si fiat $M = \frac{1}{M+N}\,(M+N) = \frac{1}{m+n}\,(m+n)$, ac sumatur numerus $m+n$ integer: hic in hoc casu quantitatem ipsam repræsentat, determinatque valorem illius unitatis abstractæ, quæ quantitatem linearem in genere refert, in ambas fluentes summæ constantis dividendam. At ab $\frac{1}{m+n}$ re-

repræſentatur coëfficiens numericus fractus applicandus integræ quantitati $(m+n) = a$, qui ut ad legitimam formam reducatur (cum numerator debeat eſſe æqualis vi ſyſtematis alterutri parti, in quas dividitur denominator) ita eſt efferendus $\frac{1}{m+n} = \frac{1}{1+(m-1+n)}$, ita ut ſit $(m+n)$ diviſus in partes $(1)$, & $(m-1+n)$: in quo caſu ſumma quidem $(m+n)$ eadem perſeverat, ſed valor ſingularum partium mutatur. Numerator igitur $(1)$ eſt fluens ad infinitum eo modo, quo ſunt fluentes ad infinitum partes, in quas dividi poteſt numerus $(m+n)$, licet conſtans ſupponatur. Quare univerſim erit $M = \frac{m}{m+n}(m+n) = \frac{m}{m+n}$. $a$: qua mutatione ad infinitum numeratoris, mutatur & valor fractionis ad infinitum, atque ideo M fit fluens, licet denominaror conſtans permaneat. Fit etiam fluens M licet $(m)$ tam in numeratore, quam in denominatore conſtans perſeveret, & mutetur tantum $(n)$, ſcilicet totus denominator $(m+n)$: ac denique mutato denominatoris valore, ac ſingula ejus parte $(m)$, $(n)$, coefficiens numericus $\frac{m}{m+n}$, per quem tantum M fit indeterminatus & fluens, abſolutam & quoad totum & quoad partes ſuſcipit indeterminationem. Quocumque tamen modo id fiat, ſemper M legitime exprimitur per formulam $\frac{m \cdot a}{m+n}$, dummodo homologa N ab $\frac{n \cdot a}{n+m}$ repræſentetur eodem utrinque denominatore in $m$, $n$ diviſo affecta.

§. 23. Quod ſi in formula $M = \frac{M+N}{M+N} = \frac{1}{M+N}(M+N)$ fiat $\frac{1}{M+N}$ conſtans $= \frac{1}{a}$, erit $M = (M+N) \cdot \frac{1}{a}$, & facta $M = \frac{M}{M+N} = \frac{m}{m+n}$; $N = \frac{N}{N+M} = \frac{n}{n+m}$; exſurget $M = \left(\frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}\right) \frac{1}{a}$, in quo caſu eſt ſummà fluentium $M = M + N = \frac{m}{m+n} \frac{1}{a} + \frac{n}{n+m} \cdot \frac{1}{a}$, & conſtans $\frac{1}{a}$ inverſa primæ. Vel ſi fiat M $= \frac{m+n}{m+n}$; $\frac{1}{a} = \left(\frac{\frac{1}{m+n}}{\frac{m+n}{m+n}}\right) \frac{1}{a} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{m}{m+o} \cdot \frac{1}{a}$ & univerſim $= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{a}$, vel $= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{1}{a}$.

Quare fluentes nihil aliud sunt, nisi portiones cujuscumque numeri (qui assumitur semper ut integer & constans, & a linea geometrica repræsentatus quantitatis nomen assumit) quæ non nisi coefficiente numerico indeterminato fiunt indeterminatæ sive fluentes. Ut vero singulæ fluentes hujusmodi ab integra secernantur, sub formula §. 15 statuta $M = M . \frac{M+N}{M+N}$ ; $N = N . \frac{N+M}{N+M}$ sunt concludendæ, ex quibus singulis invenimus $M = \frac{m}{m+n} . a$; $N = \frac{n}{n+m} . a$ (posito ($a$) quocumque numero directo, inverso, integro naturam quantitatis lineis expressæ referente). Quod si fiat N, vel $M = 0$, erit in primo casu $M = \frac{m}{m} . a = a$; $N = \frac{0}{m} . a$; vel in secundo $N = \frac{n}{n} . a = a$ ; $M = \frac{0}{n}$ : atque ideo in hoc limite alterutra tam potest esse fluens maxima $= \frac{m}{m+0} . a$, quam ipsa constans $M = \left(\frac{m}{m+0} + \frac{0}{0+m}\right) a$ : & hæc est ratio, cur ab una eademque formula $M = \frac{M+N}{M+N}$ tam constantem integram, quam alterutram ex fluentibus legitime superius derivare potuimus. Quæ diximus in hoc systemate admussim conveniunt systemati S Y, sola mutatione signi positivi in negativum, quo afficitur M vel N.

§. 24. Hæc nimis abstracta juvat uno & altero exemplo a numeris petito sensibus subjicere. Sit itaque $M = \frac{M+N}{M+N} = \frac{1}{M+N} . (M+N)$ : ponatur constans & integra $(M+N) = 20$, quæ erit basis systematis, & denominator $M+N = 1 + 19$, & $M = 1$ : ut sit $M = \frac{1}{M+N} . (M+N) = \frac{1}{1+19} (20)$, & $N = \frac{19}{19+1} (20)$ : earumque summa $M+N = \left(\frac{1}{1+19} + \frac{19}{19+1}\right) . 20$ : & facta N, vel $M = 0$, erit $M + 0 = \left(\frac{20}{20+0} + \frac{0}{0+20}\right) 20$; vel $N + 0 = \left(\frac{0}{0+20} + \frac{20}{20+0}\right) 20$ maxima; & in casibus mediis $M+N = \left(\frac{1}{1+19} + \frac{19}{19+1}\right) 20$

$= \left(\frac{2}{2+18}+\frac{18}{18+2}\right) 20 = \left(\frac{1}{1+9}+\frac{9}{9+1}\right) 20$ &c. Quod si velimus $\frac{1}{M+N} = \frac{1}{20}$ constantem; erit $M = (M+N)\cdot\frac{1}{M+N}$ $= (M+N)\cdot\frac{1}{20} = \left(\frac{M}{M+N}+\frac{N}{N+M}\right)\cdot\frac{1}{20}$ $= \left[\cfrac{M+N}{\cfrac{M}{M+N}+\cfrac{N}{M+N}}\right]\cdot\frac{1}{20} = \left[\cfrac{1}{\cfrac{20\cdot 1}{\cfrac{20\cdot 1}{20}}}\right]\cdot\frac{1}{20}$ $= \left[\cfrac{20}{\cfrac{20}{20}}\right]\frac{1}{20}$ : sed $\frac{20}{20}=1$; ergo erit $M = \left[\cfrac{20}{\cfrac{20}{20}}\right]\frac{1}{20}$ $= \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{1+19}\cdot\frac{1}{20}$; & $N = \frac{19}{19+1}\cdot\frac{1}{20}$, & universim $M = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{20}$; $N = \frac{n}{n+m}\cdot\frac{1}{20}$. Quod si M referatur ad S Y, erit $N = \frac{M-N}{M-N} = \frac{1}{M-N}(M-N)$, & facta integra $M-N=20$, erit $N = \frac{1}{21-1}(20)$ minor; $M = \frac{21}{21-1}(20)$ major, & $M-N = \left(\frac{21}{21-1}-\frac{1}{21-1}\right)\cdot 20$: in quo casu M fit N: vel si retineas symbolum M erit $M = \frac{N-M}{N-M} = \frac{1}{N-M}\cdot(20)$ $= \frac{1}{21-1}(20)$ &c. In hoc exemplo est semper $M = \frac{m}{m+n}\cdot 20$ $= \frac{1}{1+19}\cdot 20$ sive pars una denominatoris, $m = 1$. Quod si ponas $M = 17$ ex: gr: ut sit $M = M.\frac{M+N}{M+N} = \frac{17}{M+N}(M+N)$, ac velis $(M+N) = 27$, erit $M = \frac{17}{17+10}\cdot(27)$, & $N = \frac{10}{10+17}\cdot(27)$:

& etiam $M = \frac{1}{1+26} . (27)$; & $N = \frac{26}{26+1} . (27)$: in quo casu $M = \frac{1+26}{1+26} = \frac{M}{M+N} (M+N) = \frac{1}{1+26} (27)$: ex qua deducitur primam $M = \frac{M+N}{M+N} = \frac{1}{1+N} .(M+N) = \frac{1}{1+26} . (27)$ esse universim $= \frac{M}{M+N} . (M+N) = \frac{m}{m+n} (27)$.

§. 25. Ut vero hujusce Theoriæ ratio omnis manifesta constet, animadvertendum est, in systemate S A utramque fluentem M, N, licet utraque abstracte sumpta possit æquari numero alicui integro, tamen statuto systemate S A semper naturam fractionis induere minoris constanti ( $a$ ), cum simul additæ totam ( $a$ ) adæquent. In systemate vero S Y major M & ipsa fractio est major constanti ( $a$ ) usque ad infinitum, cui æqualis est in limite tantum minimo: N vero minor a zero usque ad infinitum percurrens, fractio est in limite minimo $= 0$, minor, æqualis, & major ad infinitum ipsa ( $a$ ). Quare in utroque systemate utraque M & N coefficiente numerico prædita est fractio, quæ ducitur in constantem ( $a$ ), cum ex §. 20 sit in S. A, $M = ma = \frac{m}{m+n} . a$; $N = na = \frac{n}{n+m} . a$; in S Y, $M = ma = \frac{m}{m-n} . a$; $N = na = \frac{n}{m-n} . a$, atque ideo singula fluens vere fractio censenda est, quæ nequit in integrum valorem transmutari, nisi denominator fractionis sit factor aliquis numeri constantis ( $a$ ). Et sane facta $m = \frac{1}{4}$, erit homologa $n = \frac{3}{4}$. Ergo

$$m = \frac{1}{1+3} = \frac{\frac{1}{1+3}}{\frac{1}{1+3} + \frac{3}{3+1}} = \frac{m}{m+n} : \& \ n = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$= \frac{\frac{3}{3+1}}{\frac{3}{3+1} + \frac{1}{1+3}} = \frac{n}{n+m} . \text{ Et e converso erit } \frac{m}{m+n}$$

$$= \frac{m}{\frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}} = m\left(\frac{m+n}{m+n}\right) = \frac{1}{1+3} . \left(\frac{1+3}{1+3}\right) = \frac{1}{1+3} .$$

Hoc

Hoc posito sit M = 19, & referenda sit ad S A, fiat $M = M \left(\frac{M+N}{M+N}\right)$ $= \frac{19}{19+N} \cdot (19+N) : \frac{19}{19+N}$ est coefficiens; $(19+N)$ constans & integra repræsentatur, utraque tamen variabilis est, cum loco N quivis numerus substitui possit: dummodo constans $(19+N)$ intra limites (19) minimum & infinitum concludatur. Hoc vero semel statuto determinatur constans, & systema; coefficiens vero $\frac{19}{19+N}$, etiam determinato N, naturam retinet fluentis. Nam (præter ea, quæ diximus §. 22.) posita ex: gr: N = 1, erit $M + N = \left(\frac{19}{19+1} + \frac{1}{1+19}\right) \cdot 20 = \left(\frac{19+1}{19+1}\right) 20$. Porro cum hujusmodi summa eadem semper perseveret, quicumque sit numerus idem tam in numeratore quam in denominatore fractionis $\frac{19+1}{19+1} = 1$, & quæcumque sit divisio in partes ejusdem (20) integri; dummodo constans permaneat (20); patet singulam M, N fluentem natura sua esse, ac posse earum summam semper constantem permanere, licet valores singularum, lege a nobis superius tradita, prout alterutrum systema requirit, infinitimode varientur.

§. 26. Hinc facilis & elegans sese exhibet methodus, qua liceat quemcumque numerum integrum vel fractum ad alterutrum systema ita præparare, ut cuicumque constanti (*a*) systematis aptari possit, (dummodo in systemate S. A. non sit major ipsa basi constanti) & alterutram fluentem, vel ipsam basim repræsentare. Dato igitur quocumque numero M, hic ex dictis in utroque systemate naturam fractionis induat oportet. Verum si fiat $M = \frac{M}{M+N} = \frac{ma}{ma+na}$ $= \frac{m}{m+n}$, in hoc casu M repræsentat coefficientem numericum abstracte sumptum, ac veram fractionem basi eligendæ applicandam. Sed eodem ratiocinio ex demonstratis $M = \frac{M}{M+N} = \frac{M}{\frac{M}{M+N} + \frac{N}{N+M}}$ $= \frac{M}{M+N} \cdot (M+N)$: ergo si fiat $(M+N)$ æqualis cuicumque constanti (*a*), quæ debet esse major M, ut indicat formula basis $(M+N)$, in qua minor valor basis est quando N = 0; erit $M = \frac{M}{M+N}(M+N)$ $= \left(\frac{m}{m+n}\right)(a)$, sed ex dictis tam (*m*), quam (*n*) quæ vices coeffi-

cien-

cientium ſubeunt, debent & ipſæ fractiones unitate minores referre, ergo formula ſequenti modo erit præparanda $M = \frac{M}{M+N}(M+N)$ $= \frac{M}{(M+N)\left\{\frac{M}{M+N}+\frac{N}{M+N}\right\}}.(a)$, ſive demum $M = \frac{m}{m+n}.\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a$ $= \frac{\left(\frac{m}{m+n}\right)}{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}.a$ : hoc eſt fractio $\frac{m}{m+n}$ diviſa per ſummam fractionum $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m} = m+n$, quæ eſt coefficiens numericus ductûs in baſim conſtantem $(a)$: altera vero huic homologa eſt $N = \frac{n}{n+m}.\left(\frac{n+m}{n+m}\right)(a)$. Similiter in ſyſtematè

$$S\,Y,\ M = \frac{M}{M-N} = \frac{M}{\frac{M}{M-N}-\frac{N}{M-N}} = \frac{M}{M-N}.(M-N) =$$

$$\left\{\frac{\left(\frac{M}{M-N}\right)}{\frac{M}{M-N}-\frac{N}{M-N}}\right\}(M-N) = \frac{M}{M-N}.\left(\frac{M-N}{M-N}\right).(M-N):$$

& facta $M-N$ conſtanti $= (a)$ (quæ hîc debet eſſe minor $M$, quem tantum æquat quando $N = 0$) erit formula $S\,Y$, $M = \frac{m}{m-n}.\left(\frac{m-n}{m-n}\right).a$, cui reſpondet altera homologa $N = \frac{n}{m-n}.\left(\frac{m-n}{m-n}\right)(a)$.

§. 27. Sit $M = 20$ referendus ad alterutrum ſyſtema S A, S Y. In primo caſu ſumpta formula $M = \frac{m}{m+n}.\left(\frac{m+n}{m+n}\right)(M+N)$, patet baſim $(M+N)$ debere contineri intra limites $M = 20$ minimum, & infinitum. In primo limite minimo facta $(M+N) = 20$, erit numerus $M = 20$ maximus

ximus in hoc ſyſtemate; atque ideo N = o minimus; erit igitur M = 20 $= \frac{m}{m+o}\left(\frac{m+o}{m+o}\right)(20) = 20$; & $N = \frac{o}{m+o}\cdot\left(\frac{o+m}{o+m}\right) 20 = \frac{o}{m}(20) = o.(20)$

At numeri minores ( 20 ) ſive ſint integri, ſive fracti non niſi unam aut alteram ex fluentibus repræſentant. Ita ſi velis M = 15, erit

$$M = \begin{cases} \left(\frac{15}{15+5}\right)\left(\frac{15+5}{15+5}\right) 20 = \left(\frac{3}{3+1}\right)\left(\frac{3+1}{3+1}\right)\cdot 20 \\ \left(\frac{M}{M+N}\right)\left(\frac{M+N}{M+N}\right)(M+N) = \left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m+n}\right) 20 \end{cases}$$

cui reſpondet altera

$$N = \begin{cases} \left(\frac{5}{5+15}\right)\left(\frac{5+15}{5+15}\right)\cdot 20 = \left(\frac{1}{1+3}\right)\left(\frac{1+3}{1+3}\right) 20 \\ \left(\frac{N}{N+M}\right)\left(\frac{N+M}{N+M}\right) 20 = \left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{n+m}{n+m}\right) 20 \end{cases}$$

$\left(\frac{n+m}{n+m}\right)$ eſt fractio ad ſimpliciorem formam reducta, neglecto factore communi ſingularum partium $m$ & $n$. Itaque in noſtro caſu erit $m = \frac{3}{3+1}$, $n = \frac{1}{1+3}$; & $m + n = \frac{3}{3+1} + \frac{1}{1+3} = 1$, $M = \frac{3}{3+1}\cdot 20 = \frac{3}{4}\cdot 20 = 3\cdot 5 = 15$, & $N = \frac{1}{1+3}\cdot 20 = \frac{1}{4}\cdot 20 = 1\cdot 5 = 5$. Vocata igitur (Fig: 9) A B = 20, erit A C vel B C' major, = 15; A C' vel B C minor, = 5, & $A\,C + B\,C = \frac{3}{3+1} + \frac{1}{1+3}\cdot 20$

At in ſyſtemate S Y ſumpta formula $M = \frac{m}{m-n}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)(M-N)$: poſita $M-N = 20$, ſi ſit $M = 20$, erit $N = o$; & $M = \frac{m}{m}\cdot\frac{m}{m}\cdot 20$ minimus, & $N = \frac{n}{m-n}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\cdot 20 = \frac{o}{m}\cdot\frac{m}{m}\cdot 20 = o\cdot 20$ minimus. Non poteſt igitur a formula M erui valor 15, cum ipſa minima ſit = 20: poteſt tamen id obtineri a formula N, facto N = 15; in quo caſu erit M = 35, ut ſit M — N = 35 − 15 = 20. Erit igitur

N =

$$N = \begin{cases} \frac{N}{M-N}\left(\frac{M-N}{M-N}\right)(M-N) = \frac{n}{m-n}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) 20 \\ \frac{15}{35-15}\left(\frac{35-15}{35-15}\right) 20 = \frac{3}{7-3}\left(\frac{7-3}{7-3}\right) 20 = 15 \end{cases}$$

& homologa major

$$M = \begin{cases} \frac{M}{M-N}\cdot\left(\frac{M-N}{M-N}\right)\cdot(M-N) = \frac{m}{m-n}\cdot\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\cdot 20 \\ \frac{35}{35-15}\cdot\left(\frac{35-15}{35-15}\right) 20 = \frac{7}{7-3}\cdot\left(\frac{7-3}{7-3}\right) 20 = \frac{7}{4} : 20 \\ = 7 \cdot 5 = 35 \end{cases}$$

$$m = \frac{7}{7-3};\ n = \frac{3}{7-3};\ \&\ m-n = \left(\frac{7-3}{7-2}\right) = 1$$

A C (*Fig.* 10.) vel B C$'$ $= \frac{7}{7-3} \cdot 20$; B C vel A C$'$ $= \frac{3}{7-3}\, 20$; &

$$AC - BC \text{ vel } BC' - AC' = \left(\frac{7}{7-3} - \frac{3}{7-3}\right)\cdot 20 = AB = BA$$

§. 28. Licet loco $(M + N) = a$ basis constantis quemcumque numerum, atque ideo etiam inversum $\frac{1}{a}$ substitui posse quisque videat; tamen eodem artificio ab eadem formula etiam basim inversam $\frac{1}{a}$ erui posse sic breviter demonstro: Nempe $M = \frac{M}{M+N} = M \cdot \frac{1}{M+N} = \frac{M}{M+N} : \frac{1}{M+N}$

$$= \frac{M}{(M+N)\left(\frac{M}{M+N} + \frac{N}{N+M}\right)} \cdot \frac{1}{M+N} = \frac{M}{M+N}\left(\frac{M+N}{M+N}\right)\frac{1}{M+N}$$

$= \frac{m}{m+n}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)\frac{1}{a}$. Sit $\frac{1}{a} = \frac{1}{20} = \frac{1}{M+N}$, & facto $M = \frac{1}{25}$ $\left(\text{quoniam M in hoc systemate non potest esse major } \frac{1}{20}\right)$, erit $N = \frac{1}{100}$.

Ergo

$$\text{Ergo } M = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{100}}\left(\frac{\frac{1}{25}+\frac{1}{100}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{100}}\right)\frac{1}{20} = \frac{M}{M+N}\left(\frac{M+N}{M+N}\right)\cdot\frac{1}{20}$$

$$= \frac{4}{4+1}\left(\frac{4+1}{4+1}\right)\frac{1}{20} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25};$$

$$m = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5};\ \&$$

$$N = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}+\frac{1}{25}}\left(\frac{\frac{1}{100}+\frac{1}{25}}{\frac{1}{100}+\frac{1}{25}}\right)\frac{1}{20} = \frac{N}{N+M}\left(\frac{N+M}{N+M}\right)\frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{1+4}\left(\frac{1+4}{1+4}\right)\frac{1}{20} = \frac{n}{n+m}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)\frac{1}{20} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}$$

$= \frac{1}{100}$; $n = \frac{1}{5}$; At in systemate S. Y, facto $M = \frac{1}{10}$; erit $N = \frac{1}{20}$, & $M-N = \frac{1}{10}-\frac{1}{20} = \frac{1}{20}$: ergo erit $M = \frac{M}{M-N}\left(\frac{M-N}{M-N}\right)\frac{1}{20}$

$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}\left(\frac{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}\right)\frac{1}{20} = \frac{2}{2-1}\left(\frac{2-1}{2-1}\right)\frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{10} = \frac{m}{m-n}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\frac{1}{20};$$

$$N = \frac{N}{M-N}\left(\frac{M-N}{M-N}\right)\frac{1}{20} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}\left(\frac{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}\right)\frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{2-1}\left(\frac{2-1}{2-1}\right)\frac{1}{20} = \frac{1}{20} = \frac{n}{m-n}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\frac{1}{20}.$$

& posito $n = o$, erit $M = \frac{1}{20}$ minima; $N = \frac{o}{m} \cdot \frac{m}{m} \cdot \frac{1}{20}$ minima.

§. 29. Ex dictis constat fluentes M, & N ac earum summam M + N, donec solitarie sumuntur, semper portionem aliquam quantitatis ($a$) constantis, sive ipsam basim ($a$) significare. Quando vero aut invicem dividuntur, aut per M + N, ut puta $\frac{M}{N}$, vel $\frac{M}{M \pm N}$, $\frac{N}{M \pm N}$ semper coefficientes numericos abstracte sumptos significare. Ita $M = \frac{m \cdot a}{m \pm n}$; $N = \frac{n \cdot a}{m \pm n}$;

$M + N = \left(\frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}\right) \cdot a$ S A; $M - N = \left(\frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n}\right) \cdot a$: S. Y

at $\frac{M}{M+N} = \frac{m}{m+n}$; $N = \frac{n}{n+m}$ & $\frac{M+N}{M+N} = \frac{m+n}{m+n}$ &c; quæ sunt fractiones numericæ ad simpliciorem formam redactæ, applicandæ quantitati $a$. Insuper $\frac{m+n}{m+n}$ constans $= 1$ æqualis cuicumque numero per se ipsum diviso, quæ dividi potest in partes $m$, $n$ infinite diversas, repræsentat summam coefficientium utriusque fluentis M, N homologæ in S A: & $\frac{m-n}{m-n}$ differentiam constantem coefficientium utriusque fluentis M, N in S Y: atque ideo statutis in $\frac{m+n}{m+n}$, vel $\frac{m-n}{m-n}$ valoribus $m$, $n$ æquales sumendi sunt in fractionibus $\frac{m}{m \pm n}$, $\frac{n}{m \pm n}$, & viceversa: quo artificio semper fractiones ad simpliciorem formam reducuntur.

Ita in formula $M = \frac{M}{M+N}\left(\frac{M+N}{M+N}\right)(M+N)$, si fiat M + N constans $= 20$; erit $M = \frac{M}{20} \cdot \frac{20}{20} \cdot 20$, $N = o$; ergo $M = 20$ maxima: at si fiat $M = 18$, erit $N = 2$, & $M = \frac{18}{18+2}\left(\frac{18+2}{18+2}\right) 20$ $= \frac{9}{9+1}\left(\frac{9+1}{9+1}\right) 20$; $\frac{9}{9+1} = \frac{m}{m+n}$ coefficiens numericus ad simpliciorem formam reductus, & $\frac{m+n}{m+n} = \frac{9}{9+1} + \frac{1}{1+9}$ summa coefficientium: quod si

fiat

fiat $M = \frac{17}{17+3}\left(\frac{17+3}{17+3}\right)20$; $\frac{17}{17+3}$ coefficiens numericus, qui illa, quam habet ſimpliciorem reſpuit formam: ſic dicas circa $\frac{3}{3+17}$.

§. 30. Inſuper cum ſuperius oſtenderimus, fluentes utriuſque ſyſtematis non niſi ratione coefficientium fluentium tales fieri; & cum ex ipſa coefficientium forma in ſyſtemate S A ipſorum ſumma, in ſyſtemate S Y differentia ipſorum ſit neceſſario conſtans, & æqualis unitati abſtractæ; demonſtratum etiam fuit in ſyſtemate S A Fluentium ſummam, differentiam in ſyſtemate S Y conſtantem eſſe, & ſemper æqualem conſtanti primum ſumptæ $a$. At in ſyſtemate S. A.

$$\frac{M-M}{M+N} = \frac{M-N}{\frac{M}{M+N}+\frac{N}{N+M}} = \left(\frac{M-N}{M+N}\right)(M+N)$$

$$= \left[\frac{\frac{M}{M+N}-\frac{N}{N+M}}{\frac{M}{M+N}+\frac{N}{N+M}}\right](M+N) \qquad \left(\frac{M-N}{M+N}\right)\left(\frac{M+N}{M+N}\right)(M+N)$$

$$= \left(\frac{m-n}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a = M-N.$$

In ſyſtemate vero S Y.

$$\frac{M+N}{M-N} = \frac{M+N}{\frac{M}{M-N}-\frac{N}{M-N}} = \frac{M+N}{M-N}(M-N)$$

$$= \left[\frac{\frac{M}{M-N}+\frac{N}{M-N}}{\frac{M}{M-N}-\frac{N}{M-N}}\right](M-N) = \left(\frac{M+N}{M-N}\right)\left(\frac{M-N}{M-N}\right)(M-N)$$

$$= \left(\frac{m+n}{m-n}\right)\left(\frac{m-n}{m-n}\right)a = M+N.$$

Sed in primo S A differentia coefficientium $\frac{m-n}{m+n}$; in ſyſtemate S Y ſumma coefficientium $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{m-n}$ eſt neceſſario fluens: mutatis enim ſingulis $m$, $n$ mutatur differentia in S A, ſumma coefficientium in S Y; ergo & differentia fluentium in primo; ſumma fluentium in ſecundo fluens ſit neceſſe eſt. Quare in Syſtemate S A vi & natura ipſius ſyſtematis ſumma tantum fluentium erit conſtans, differentia vero ipſarum, & ſingula ex homologis quantitatibus

erit fluens. At in ſyſtemate S Y differentia tantum fluentium erit conſtans, ſingula vero ex homologis atque ipſarum ſumma erit neceſſario fluens.

§. 31. Ut vero in ipſo hujuſce novæ Methodi coefficientium indeterminatorum limine clare cognoſcatur, quantum hæc communem potentia, certitudine, ac fœcunditate ſuperet, animadvertamus, velim, in æquatione $M + N = a$, M, N eſſe portiones fluentes quantitatis $a$ ex producto coefficientis fluentis in conſtantem $a$ conflatas, quæ donec ſub hoc unico ſymbolo M, N efferuntur, nequeunt ita diſpertiri, ut coefficiens fluens a quantitate conſtanti ſecernatur: ex quo fit ut hiſce ſymbolis M, N ipſæ quantitates fluentes efficiantur, nec ad rationem ultimam ac ſimpliciorem $m : n$ numeri ad numerum, qua hujuſmodi quantitates ſe ſe reſpiciunt, evaneſcente ipſa $a$, & communibus factoribus, reduci queant. At in hac noſtra Methodo, quæ docet eſſe $M + N = \frac{m}{m+n} . a + \frac{n}{n+m} . a$, ſeparatur in ſingulis conſtans $a$ a ſuo coefficiente fluenti, ac ſtatim patet eſſe $M : N$ in ratione ſimplici $m : n$, quæ cum infinitimode variare poſſit, in cauſſa eſt cur ipſæ fluentium naturam induant. Ex inventa vero hac propria coefficientium forma & a conſtanti quantitate $a$ diſtincta maximi momenti in tota Analyſi, quæ in novam renaſcitur naturam, veritas conſequitur, totum ſcilicet negotium hoc analyticum inter unitatem abſtractam (1), & ejus partes in ratione $m : n$ ſeſe reſpicientes, tranſigi: qua facta diviſione fractiones hujuſce unitatis, ſive coefficientes numerici abſtracte ſumpti ad eam ad libitum ſumptam, vel prout res fert, cujuſcumque generis quantitatem $a$, in locum unitatis abſtractæ ſubſtitutam applicati, ſyſtema cujuſcumque baſis $a$ determinant. Verum cum hujuſmodi coefficientes numerici, eadem ratione $m : n$ ſervata, diverſam tamen formam, ac valorem in ſyſtemate S Y a forma & valore ſyſtematis ſuperioris ſubeant ( ſunt enim in hoc $\frac{m}{m-n}$, $\frac{n}{m-n}$), nequeunt in noſtra methodo cum coefficientibus alterius ſyſtematis invicem confundi, quemadmodum confunduntur invicem quantitates fluentes utriuſque ſyſtematis iiſdem ſymbolis M, N in utroque ſyſtemate expreſſæ. Quare vis noſtræ Methodi mirabilis quidem, & ad eam ad quam fas eſt pervenire abſtractionem elata in eo tota verſatur, ut omni quod quantum eſt in dimenſione neglecto, inveniantur coefficientes tantum numerici ea diverſa, quam diverſum ſyſtema S A, vel S Y requirit, forma & valore præditi, quibus in utroque ſyſtemate ratio illa vere & facto ſervetur, quam poſtulat numerus $m$ ad numerum $n$.

§. 32. Quod ſi communem Methodum inſpiciamus, quæ hujuſmodi coefficientium indeterminatorum ſublime quidem artificium prorſus ignorat, ſtatim patet ſymbolis $x$, $y$ (quæ eadem ſunt ac M, N) quibus utitur ad ſignificandas variabiles quantitates, non poſſe coefficientes numericos fluentes a quantitate conſtanti $a$ ſecernere, atque ſeparare: neque quæ ſunt proprii unius ſyſtematis ab aliis alterius ſyſtematis cognoſcere: ex quo fit ut horum ſymbolorum ſimilitudine de-

decepta, fluentes unius ſyſtematis cum fluentibus alterius ſæpe ac ſæpius confundat, & æquet: atque varia formulæ modificatione ab uno ad alterum ſyſtema inſcienter translata, hiſce ſymbolis eamdem, qua primum prædita erant, naturam tribuat, quæ novo ſyſtemati prorſus repugnat. Ut facili utar exemplo: propoſita æquatio $x + y = a$ ſymbolis Methodi vulgo uſurpatæ expreſſa nos docet, quantitatem conſtantem $a$ dividi in duas quantitates incognitas & variabiles $x$ & $y$, quarum ſumma æquatur $a$: ſed quæ ſint & quâ formula donandæ, ut hanc conditionem ſemper adimpleant nullo modo nos docet. Hinc communis methodus falſo credens quemcumque valorem datum nullo limite circumſcriptum ſubſtitui poſſe loco alterutrius $x$ vel $y$, quas in utroque ſyſtemate identicas ſupponit, facta $x = a - y$, quoties ponit $y > a$, incidit in poſitivum æquale negativo, cum ſemper $x$ ſigno poſitivo afficiat. Errorem tamen hunc ſane graviſſimum facile vitaſſet, ſi hanc, qua utor Methodo conſuluiſſet. Intellexiſſet enim ſummam fluentium $x + y$ non poſſe æquari conſtanti $a$, niſi ſit

$x + y = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$, & $x = \frac{m}{m+n} . a$; $y = \frac{n}{n+m} . a$: ex quibus formulis ſtatim patet ſingulam ex iſtis incognitis eſſe fluentem, nec poſſe ſingillatim valorem ipſius $a$ excedere: cum coefficientes ſint veræ fractiones, quicumque numerus in locum $m$, $n$ ſubſtituatur, quarum maximus valor eſt quando $n$ in prima, vel $m$ in ſecunda eſt zero: ex ipſa igitur formula huic ſyſtemati propria, qua exprimendæ ſunt iſtiuſmodi fluentes, conſtat hanc, quæ ſæpe vulgo uſurpatur, ſuppoſitionem omnino repugnare: neque poſſe repugnantiam hanc ſanari, niſi fiat $x = \frac{m}{m-n} . a$, & $y = \frac{n}{m-n} . a$, vel viceverſa, in quo caſu vere & legitime eſt $x - y$, vel $y - x = \left(\frac{m-n}{m-n}\right) a$: niſi ſcilicet ad ſyſtema SY fiat translatio, in quo univerſim repugnat ſummam fluentium æquari $a$, ut patet. Idem igitur eſt in prima æquatione ſupponere $y$ vel $x$ majorem $a$, ac ſyſtema permutare, in quo $x$, vel $y$ jure ac neceſſario eſt negativa: qua permutatione fluentes, prima exutæ forma, alteram ſyſtemati aptam neceſſario induere mea Methodus aperte declarat, & ad hanc nos veluti manu ducit.

§. 33. Adde, quod hiſce ſymbolis $x$, $y$, $z$, &c, quibus tam fluentes, quam quantitates incognitas, quas quærit, Analyſis communis promiſcue exprimit, quæ inter ſe univerſim multum differunt, veritatis & evidentiæ diſpendio ſimul miſcet, & confundit. Et ſane ſi quæ docet Methodus communis in ſuis Inſtitutionibus attente excutiantur, patebit litteris alphabeti primis indicari quantitates cognitas, incognitas poſtremis: & inſuper in conſtructione Locorum geometricorum hujuſmodi incognitas ut fluentes uſurpari, cum in Curvis abſciſſæ littera $x$, ordinatæque littera $y$, vel viceverſa, notentur: atque ideo incognitæ & fluentes in calculo communi unum & idem ſonant. Ex hac vero promiſcua ſymbolorum $x$, $y$, $z$ &c communione, quæ non ſunt niſi ſigna arbitrio ſumpta omnino indeterminata, fluentes a conſtantibus dignoſci nequeunt, & cum ſæpe a natura

ad

ad naturam pro varia ratione, qua tractantur formulæ, transitum faciant, quando fluentis, quando constantis vicem subeant, & ad quod systema referantur, omnino ignoratur: & quod gravius est, vera fluentium natura & origo vix ac ne vix quidem cognoscitur, cum ad eam quam vere requirunt formam in utroque systemate diversam, ut fluere intra statutos systematis limites possint, hujusmodi incognitas $x$, $y$, $z$, &c reducere nondum didicerit Methodus nota. Ut exemplo, quod dico, facilius intelligatur positam ex: gr: $x = 7$ Analysis communis æquationem determinatam appellat, neque aliam notionem litteræ $x$ tribuere potest, nisi ut incognitam non fluentem, quæ æqualis semper quantitati datæ 7 inventa fuerit. Vide tamen quæ & quanta adhuc supersint, ut quid hujusmodi æquatio significet, exhauriatur. Ac primum ex nostra Methodo statim eruitur, quam male nomine æquationum determinatarum appellet Analysis communis æquationes illas omnes, in quibus una tantum incognita $x$ reperitur: cum facta ex: gr: $x = a$, fit vi nostræ Methodi $x = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$ in systemate S A; vel $x = \left(\frac{m-n}{m-n}\right) a$ in systemate S Y, ac proinde æquatio in utroque systemate duas necessario fluentes complectatur, in quas $x$ divisa, fit $x = x + y = \frac{m}{m+n} . a + \frac{n}{n+m} . a$ in S A; vel $x = x - y = \frac{m}{m-n} . a - \frac{n}{m-n} . a$ in S Y: ex quibus luce clarius demonstratur, tantum abesse ut hujusmodi æquationes sint determinatæ, ut majori etiam indeterminationi obnoxiæ sint, quam habent, quæ duabus variabilibus $x + y = a$ vel $x - y = a$ constant: cum hæ limitibus statutis systema, ad quod pertinent, aperte declarent; illæ vero indeterminatæ etiam quoad systema ad utrumque reduci possint. Vide igitur quam male secum, & cum Analysi agant, qui æquationes omnes, in quibus una tantum incognita reperitur, determinatas faciunt, & ab æquationibus indeterminatis toto cælo distare contendunt, ut vim earum demonstrationum hoc facili subterfugio eludant, quibus vera natura & proprietates æquationum omnium contra falsas & fallaces doctrinas universim receptas eruuntur & evincuntur: minime reputantes eas, quas determinatas volunt, si rem serio perpendamus, non esse nisi ad summum easdem indeterminatas in limite maximo vel minimo constitutas, quibus proinde ad ammussim convenit quidquid universim de hujusmodi æquationibus demonstravimus; quæ tamen si tales essent, quales Methodus ab ipsis male adhibita ostendere videtur, nihil ad rem de qua agimus promovendam usui forent, utpotæ identicæ, inutiles, frustraneæ, & ad geometrica cum analyticis consocianda omnino ineptæ.

§. 34. Et sane nostra Methodo facem præbente, si fiat $x = \left(\frac{7}{7}\right) 7 = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$, posita $7 = a$ quantitate integra vicem unitatis gerente, sta-

ſtatim intelligimus æquationem hanc ad ſyſtema S A baſis $= 7$ pertinere: & donec $\frac{7}{7}$ ut integra ſumitur, eſſe $x + o = \left(\frac{7 + o}{7 + o}\right) \cdot 7$, ſive eſſe $x$ maximam, evaneſcente altera homologa. Quod ſi ponatur $x = \left(\frac{1+6}{1+6}\right) \cdot 7$, tunc $x = x + y$ in duas fluentes dividitur, ſcilicet $x = \frac{1}{7} \cdot 7$; $y = \frac{6}{7} \cdot 7$: cum coefficientes numerici $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$ ex dictis ſint infinite fluentes, dummodo ſemper ſimul eamdem ſummam 7 efficiant: ſintque $x = \frac{m}{m+n} \cdot 7$; $y = \frac{n}{n+m} \cdot 7$. Inſuper ſi fiat $x = \frac{7}{7+o} \cdot 7$, fluentis nomen aſſumit ad maximum uſque valorem progreſſæ, quæ in caſibus mediis eſt $x = \frac{6}{6+1} \cdot 7 = \frac{5}{5+2} \cdot 7$ &c cujus homologa $y$ a minima $= \frac{o}{o+7} \cdot 7$ creſcit ad valorem $y = \frac{1}{1+6} \cdot 7 = \frac{2}{2+5} \cdot 7$ &c. Quod ſi fiat ex: gr: $x = \left(\frac{10-3}{10-3}\right) 7$, quod ſine diſpendio æquationis fieri poteſt, ſtatim deferimur ad ſyſtema S Y, conſtantis itidem 7, & $x$ repræſentat differentiam conſtantem $= 7$ duarum fluentium $x - y = \frac{10}{10-3} \cdot 7 - \frac{3}{10-3} \cdot 7$, quarum major $x = \frac{10}{10-3} \cdot 7 = \frac{m}{m-n} \cdot 7$; minor vero $y = \frac{3}{10-3} \cdot 7 = \frac{n}{m-n} \cdot 7$, ut docuimus &c. & facta $x = \left(\frac{10-3}{10-3}\right) \cdot 7 = \frac{7}{14-7} \cdot 7$, fit $x$ fluens minor, cui reſpondet major $y = \frac{14}{14-7} \cdot 7$ &c. Quare uno aut altero ſuperiori ſyſtemate ſtatuto, $x$ vicem gerit modo conſtantis, modo fluentis, & eſt vel una & integra, maxima in S A, minima in S Y quando $n = o$: vel in duas fluentes dividitur, quarum ſummæ in primo caſu, differentiæ in ſecundo æquatur. Inſuper eadem ratione fieri poterit $x = 7 \cdot \frac{25}{25}$, & $x = \frac{7}{25} \cdot 25$: (poſito 25 ſolitaria quantitate lineari conſtanti) eſt $\frac{7}{25}$ coefficiens fluens: & $x = 7$ in hoc caſu eſt natura ſua una ex fluentibus ad valorem

lorem 7 arbitrio determinata, quæ pertinere poteſt ad ſyſtema S A, vel S Y. Pertinebit ad S A, ſi fiat $x = \frac{7}{7+18} . 25$, cujus homologa $y = \frac{18}{18+7} . 25$, & $x + y = \frac{7}{7+18} . 25 + \frac{18}{18+7} . 25 = \frac{m}{m+n} . 25 + \frac{n}{n+m} . 25 = 25$. Ad ſyſtema vero S Y revocabitur, ſi fiat $x = \frac{7}{(18+7+7)-7} . 25 = \frac{7}{32-7} . 25$, quæ eſt fluens minor, cui reſpondet major $y = \frac{32}{32-7} . 25$, & univerſim $y - x = \frac{32}{32-7} . 25 - \frac{7}{32-7} . 25 = \frac{m}{m-n} . 25 - \frac{n}{m-n} . 25 = 25$. Et hoc modo æquatio $x = 7$ ad utrumque ſyſtema tam S A quam S Y, cujuſcumque conſtantis ad libitum ſumptæ, reduci poteſt, & conſiderari tamquam conſtans, vel fluens, una vel diviſa; æqualis ſummæ vel differentiæ homologarum, ſervatis legibus atque limitibus ſuperius ſtatutis: hæc tamen omnia, quibus æquatio propoſita a Methodo, quam docemus, obnoxia declaratur, ab Analyſi communi ſymbolis $x$, $y$, &c, quibus utitur ad libitum nullo præunte conſilio, & in utroque ſyſtemate identice ſumptis omnino indeterminatis, fruſtra requiras.

§. 35. Quod ſi animadvertas in S A ſummam $x = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$ conſtantem eſſe, differentiam vero $x = \left(\frac{m-n}{m+n}\right) a$ fluentem; contra vero in ſyſtemate S Y ſummam $x = \left(\frac{m+n}{m-n}\right) a$ fluentem, differentiam $\left(\frac{m-n}{m-n}\right) a$ conſtantem; patebit $x$, quæ eſt conſtans in uno ſyſtemate, fieri fluentem in altero, & contra quæ eſt fluens in uno, fieri in altero conſtantem, ea facta permutatione, de qua in P^e^. I^a^. verba fecimus. Quare data quacumque æquatione lineari ( ut de hiſce tantum hîc ſermo fiat ) antequam ſtatuatur, utrum quantitates incognitæ ſymbolis $x$, $y$, &c, & cognitæ litteris primis $a$, $b$ ex more communi expreſſæ ſint natura ſua conſtantes, aut fluentes, oportet ſyſtema, ad quod æquationem propoſitam referre volumus, prius determinare: quo determinato, & ad veram ſui formam quantitatibus ſive incognitis ſive cognitis, ut hæc noſtra docet Methodus, redactis, ſtatim patet quæ fluentium, quæ conſtantium

tium naturam induant, nulla habita ratione ad valorem datum vel incognitum, quo conditione problematis afficiuntur. Ita ex: gr: in systemate S A $x + y = \frac{m}{m+n} . a + \frac{n}{n+m} . a$ si ex conditione problematis debeat esse $m = 1$; $n = 5$; erit $x + y = \frac{1}{1+5} . a + \frac{5}{5+1} . a$, & facta, ut moris est, $\frac{1}{1+5} . a = b$; $\frac{5}{5+1} . a = c$, erit $x + y = b + c$; vel in systemate S Y inventa $x - y = \frac{7}{7-1} . a - \frac{1}{7-1} . a$; & facta $\frac{7}{7-1} . a = b$; $\frac{1}{7-1} . a = c$, erit $x - y = b - c$: quæ $b$, $c$ constantium naturam præseferunt, & tamen natura fluentes sunt, atque valoribus illis omnibus singillatim capaces, qui a limitibus assumpti systematis præscribuntur.

§. 36. Nihilo tamen minus si ad modum, quem adhibet Analysis communis in constructione Problematum concinnanda attendamus, noverimus litteris alphabeti primis ( $a$ ), ( $b$ ), ( $c$ ) &c designare quantitates illas omnes, quæ ex conditione problematis innotescunt, ultimis $x$, $y$, $z$, &c illas, quas quærit, primasque tamquam constantes semper usurpare, ut variabiles secundas, antequam ad eam formam utræque reducantur, quam requirit systema vel locus geometricus: cum formam hanc, quæ tam cognitis quam incognitis danda est pro diversitate systematis prorsus ignoret, nec nisi ab hac nostra methodo nunc demum inventa fuerit, qua sine tamen naturam hujusmodi quantitatum nullo modo assequi possumus. Et sane exempli loco proponatur datam ( *Fig.* 11. ) A B $= a$ in duas partes A D, B D dividere, quæ sint inter se in data ratione $m : n$ sive $5 : 3$. Methodum communem secuti dividamus datam A B bifariam in C, & posita C D, quam quærimus, $= x$, erit A D $= \frac{a}{2} + x$ B D $= \frac{a}{2} - x$ & proportio $\frac{a}{2} + x : \frac{a}{2} - x :: m : n$, a qua, more communi tractata, invenitur $x = \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) a = \frac{1}{2}\left(\frac{5-3}{5+3}\right) a = \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . a$ valor quæsitus. Ex mea Methodo statim patet ( $x$ ) incognitam, quam quærimus, vi problematis propositi in hoc casu vere esse fluentem, & illis infinitis valoribus obnoxiam, quos exigit systema S A, ad quod pertinet. Verum si data

C D $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot a$, quæratur ea quantitas, cui addita C D, & ab ipsa subtracta eadem C D, sit prima A C + C D ad secundam B C — C D in data ratione $m : n$ sive $5 : 3$, erit C D cognita, B C quantitas incognita $x$, cujus valor a problemate requiritur. Erit igitur in hoc casu $x + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)a :$ $x - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)a :: m : n :$ & confecto calculo invenietur $x =$ $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a = \frac{1}{2} \cdot a$: ex qua eruitur ex nostra Methodo incognitam $x$, quam quærebamus, esse natura sua constantem, quicunque valor tribuatur litteris $m$, $n$, neque posse alio valore affici, nisi mutetur: hoc est, nisi ad aliud systema S A basis diversæ confugiamus. Omitto casum, in quo $x$ superet $\frac{1}{2} \cdot a$, in quo scilicet sit transitus ad S Y, quem methodus nota eodem modo, ac superiorem tractat ignoratione illarum veritatum, quæ a Methodo nostra edocentur, cum de hac infra sermo erit instituendus. Hîc tantum volo, ut intelligatur, multum differre incognitam a fluente, & cognitam a constanti, & quantum mea hæc nova Methodus communem præstantia antecellat. Quibus intellectis mirari quisque profecto desinet, Methodum hactenus vulgo usurpatam tot erroribus contaminari; tot ac tantis difficultatibus irretiri; ac in ipsis primis, quæ tradit elementis, identidem hærere, nec sibi constare: cum hæc, & quæ in progressu a nostra Methodo tradentur, prima hujusce scientiæ fundamenta, ab hac, quam vulgo profitemur Analysi, omnino ignorentur.

§. 37. Ad hæc tot ac tam gravia impedimenta superius commemorata illud etiam deterius accedit, quod Analysis communis, cum nesciat modum, quo coefficientem numericum fluentem a quantitate constanti & integra legitime separari possit, cogitur in subducendis calculis a dimensione ad dimensionem, a genere ad genus semper transitum facere: ex qua efferendi calculi ratione tot inde sequuntur incommoda, fallaciæ, repugnantiæ, quæ, ut tollantur, cum multam operam, ac nova inferius eruenda ab hac nostra Methodo subsidia requirant, suo loco ex composito de his agam.

CAP.



# CAPUT II.

*De vera unitatis abstractæ ( 1 ) notione , & de origine & natura fluentium .*

§. 1. IN superiori Capite §. 22. & seq: ex varia ejusdem formulæ (1) modificatione deduximus $1 = 1^{\circ} = \left\{\dfrac{\dfrac{m}{m+n} + \dfrac{n}{m+n}}{\dfrac{m}{m+n} + \dfrac{n}{m+n}}\right\} = \left\{\dfrac{\dfrac{m\ a}{m+n} + \dfrac{n\ a}{n+m}}{\dfrac{m\ a}{m+n} + \dfrac{n\ a}{n+m}}\right\}$ $= \dfrac{M+N}{M+N} = \dfrac{1}{M+N} \cdot M+N$, & posito M+N constanti, per ea quæ diximus, $= \dfrac{1}{((M+N)-1)+1} \cdot (M+N) = \dfrac{M}{((M+N)-M)+M} \cdot (M+N)$ $= \dfrac{M}{M+N} \cdot (M+N) = \dfrac{N}{((M+N)-N)+N} \cdot (M+N) = \dfrac{N}{M+N}$ $(M+N) = \dfrac{M}{M+o} \cdot (M+N) = \dfrac{o\ N}{M+o}(M+N) = \dfrac{N}{o+N}(M+N)$ $= \dfrac{oM}{o+N}(M+N) = \left(\dfrac{M+N}{M+N}\right)(M+N) = \left(\dfrac{M+N}{M+N}\right)M = \left(\dfrac{M+N}{M+N}\right)N$: hoc est $1^{\circ}$ $= \dfrac{m}{m+n} \cdot a\ \dfrac{n}{n+m} \cdot a = \left(\dfrac{m+n}{m+n}\right)a = \left(\dfrac{m+n}{m+n}\right) . M = \left(\dfrac{m+n}{m+n}\right) . N$ omnia in systemate S A, posita M vel N constanti. Insuper $1^{\circ} = \dfrac{M+N}{M+N}$ $= \dfrac{(M+2N)-N}{(M+2N)-N} = \dfrac{1}{(M+2N)-N} \cdot (M+N) = \dfrac{1}{(M+N+1)-1} \cdot$ $(M+N) = \dfrac{N}{((M+N)+N)-N} \cdot (M+N) = \dfrac{M+2N}{(M+2N)-N} \cdot (M+N)$ scilicet $= \dfrac{N}{M-N}(M+N) = \dfrac{M}{M-N}(M+N) = \dfrac{N}{(M+2N)-N} \cdot (M+2N)-N$



=

$$= \left(\frac{(M+2N)-N}{(M+2N)-N}\right) \cdot N = \left(\frac{(M+2N)-N}{(M+2N)-N}\right)(M+2N): \text{hoc est}$$

$$= \frac{m}{m-n} \cdot a - \frac{n}{m-n} \cdot a = \left(\frac{m-n}{m-n}\right) N = \left(\frac{m-n}{m-n}\right) M: \text{ omnia in}$$

ſyſtemate S Y. Colligimus itaque, unitatem abſtractam (1) ea quæ maxime dari poteſt indeterminatione gaudere. Hæc enim 1° eſt indeterminata quoad valorem, quoad naturam, quoad dimenſionem, quoad ſyſtema, quoad poſitionem. Quoad valorem, quia quemcumque valorem, ut vidimus, ſuſcipere poteſt: quoad naturam, cum poſſit repræſentare quamcumque quantitatem geometricam integram cujuſcumque naturæ; vel quemcumque coefficientem numericum abſtracte ſumptum, cuicumque geometricæ quantitati applicandum; vel coefficientem numericum quantitati geometricæ cujuſcumque valoris jam actu applicatum. Indeterminata inſuper eſt in dimenſione, quia 1° eſt æqualis $(a^n)^0$, hoc eſt æqualis cuicumque quantitati $a$ ad quamcumque poteſtatem $n$ elevatæ per ſe ipſam diviſæ, atque ideo (1) ſub exponente zero naturam & dimenſionem ipſius $(a^n)$ aſſumit. Eſt indeterminata in ſyſtemate, cum ordinari poſſit ad ſingula diverſa ſyſtemata, quæ ſunt propria illius dimenſionis geometricæ, cui applicatur: ut puta in lineari dimenſione, quæ a duplici ſyſtemate complectitur, tam ad ſyſtema S A, quam ad ſyſtema S Y ordinari poteſt. Tandem indeterminata eſt in poſitione, cum relate ad aliquem comparationis terminum ejus poſitionem dextrorſum, ſiniſtrorſum, ſurſum, deorſum, normaliter, oblique ad quemcumque angulum liberum ſit determinare. Hinc relate ad hujuſmodi comparationis terminum primo ſumptum poteſt eſſe negativa, quæ tamen cum ſuo originis puncto poſitive fluendo poſitiva cenſenda eſt, atque inſuper quæ eſt poſitiva in uno ſyſtemate fieri poteſt negativa in altero. Hæc omnia ac ſingula non animadverſa a communi Methodo, Analyſim in ipſo ſtatim exordio tantis difficultatibus implicarunt, ac tot ac tantis erroribus (ſit tandem veritati locus) infecerunt, ut in P^e^. I^a^ oſtendimus. Ex hac vero abſoluta indeterminatione unius formulæ 1°, ex qua una varie tamen modificata diverſus coefficientis numerici, & quantitatis geometricæ valor; diverſa natura ac dimenſio eruitur, & diverſo ſyſtemati atque diverſæ poſitioni applicatur; confirmatur & amplificatur quicquid de natura & officio ſigni = demonſtravimus in P^e^. I^a^. Lib. II §. 44 & ſeq. nec non Cap. IV §. 15 & Prop. V & VI ejuſdem Capitis: omnia enim hæc, licet toto cælo ac in ſingulis diverſa, ſigno hoc = ſunt conjungenda, cum omnia hæc ac ſingula ab eadem formula 1° tamquam radice ſingillatim prorumpant.

§. 2. Ut vero hujuſmodi abſoluta indeterminatio vel omnino vel partim tollatur, illud in primis animadvertendum eſt, quod quæ ſolitaria & integra atque conſtans ſumitur quantitatem geometricam repræſentans, in ſingulis terminis cujuſcumque peculiaris ſyſtematis eadem ſemper perſeverat coefficienti fluenti applicata, qui coefficiens ſuo fluxu intra ſyſtematis limites fluentes efficit ſingulos terminos, & infinitis valoribus ſucceſſive capaces, oſtenditque quot partes integræ quantitatis propoſitæ unitatem referentis, determinatione arbitraria pro re nata intercipiat. Hinc ex hac *coefficientium indeterminatorum Theoria* illud maxi-

mi

mi momenti, atque universale, quod Methodo communi interdicitur, emolumentum consequitur, quod hæc in suis calculis ab omni, quod quantum est in dimensione, abstrahere potest, totamque suam operam atque artificia, quibus utitur, in id unum conferre, ut unitatem illam numericam abstractam opportune in eos segreget coefficientes, atque sub illis variis formis concludat, quas diversum systema, cui reducenda est, atque diversæ circumstantiæ requirunt, nihil sollicita de quantitate geometrica constanti coefficientibus applicanda. Peractis vero operationibus, & subductis, prout res postulat, calculis, ab hac absoluta abstractione ad eam quantitatem geometricam, quæ sibi eligit, vel problema requirit, nullo negotio se transfert, multiplicatione singulorum coefficientium in assumptam quantitatem geometricam unam constantem & communem. Qui coefficientes cum sint, ut vidimus fluentes, sua applicatione ad integram quantitatem, *fluentes* illas constituunt quantitates geometricas, proprias cujuscumque peculiaris systematis, & ejus naturæ, cujus est ipsa quantitas constans unitatis officium subeuntis. Quare in posterum nomine *fluentium* singulos coefficientes numericos applicatos vel abstracte sumptos, & applicandos quantitati cuicumque constanti & integræ designabimus.

§. 3. Hoc itaque primum generali omnium operationum Canone statuto, nostra investigatio tota in eo versetur oportet, ut sensim & ordine procedendo initium faciat a linearibus quantitatibus, earumque proprietates, vicissitudines, fluentes, diversaque systemata persequatur, assequaturque, cuicunque quantitati lineari postea applicanda: in quo negotio rite præstando maxima opus est cautione, atque sagacitate. Ut igitur in hac provincia prorsus impervia, ac nullius ante trita pede caute & sensim incedamus, fiat $1 = \frac{m+n}{m+n} = \frac{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}$

$= \frac{1}{1} = 1^{0}$. Rursus $\frac{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{m+n}{m+n}\right) = 1 \cdot 1$

$= \frac{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}{\left(\frac{m+n}{m+n}\right)} \cdot \left(\frac{m+n}{m+n}\right) = 1^{0} \cdot 1$: ergo $1 = 1^{0} = 1^{0} \cdot 1 = 1^{0+1}$

$= \left(\frac{m+n}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{m+n}{m+n}\right)$. Hoc ultimo vero modo transformata formula

mula non est nisi productum duorum coefficientium abstracte sumptorum, quorum nemo quantitatem geometricam linearem designat, atque ideo nec ipsorum productum. Ut igitur ad quantitatem linearem transitus fiat, necesse est ut alteruter ex coefficientibus $\frac{m+n}{m+n}$ quantitatis linearis naturam assumat: id vero

ex dictis Cap. I facile obtinetur si fiat $\frac{m+n}{m+n} = \frac{\frac{m\ a}{m+n} + \frac{n\ a}{n+m}}{\frac{m\ a}{m+n} + \frac{n\ a}{n+m}} = \frac{M+N}{M+N}$

$= \frac{a}{a} = a^{0}$. ergo æquatio superior erit $1^{0}.\ 1 = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a^{0}$. In hac æquatione si fiat $1^{0} = \frac{1}{1} = \frac{m+n}{m+n}$; erit $1 = m+n$, sive unitas abstracta (1) coefficientis convertitur in numerum quemcumque $m+n$ (tam enim ex $\frac{1}{1}$ quam ex $\frac{m+n}{m+n}$ exsurgit idem quotiens 1): at (1) æquabitur $a^{0}$ sive quantitati geometricæ abstractæ ex qua facta $1^{+1} = a^{0+1}$ oritur $a$ quantitas geometrica una & integra: eritque $1^{0}.\ 1^{+1} = \frac{1}{1}\ .\ 1 = \left(\frac{m+n}{m+n}\right).\ a$. Si vero in hac ipsa æquatione $1^{0}.\ 1 = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a^{0}$, fiat $1\ .\ 1^{0} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right).\ a^{0}$, sive fiat $1 = \frac{m+n}{m+n}$ coefficiens, erit $1^{0} = a^{0}$, & $1 = a$ quantitas geometrica: utrumque enim fieri posse quis neget? Verum primo modo $1^{0}$ coefficientem ræpresentat; (1) quantitatem constantem linearem, cujus in locum ex dictis quæcumque quantitas linearis geometrica substitui potest: secundo vero modo (1) sine exponente coefficientem $\frac{m+n}{m+n}$ designat; ($1^{0}$) quantitas geometrica quæcumque $a^{0}$ determinatur ad quantitatem linearem $a$: & æquatio $1^{0} = a^{0}$, & $1^{1+0} = 1\ .\ 1^{0} = a^{0+1} = \frac{a}{a}\ .\ a$: sed $\frac{a}{a} = \frac{M+N}{M+N}$

$$= \left\{\frac{\frac{m\ a}{m+n} + \frac{n\ a}{n+m}}{\frac{m\ a}{m+n} + \frac{n\ a}{n+m}}\right\} = \frac{m+n}{m+n} \text{ ergo } 1^{1+0} = 1\ .\ 1^{0} = 1\ .\ a^{0} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a^{0},$$

&

& $1 \cdot 1^{o+1} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a^{o+1} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$. Utroque modo res bene cedit; sed in formula $1^{o} \cdot 1$ unitas sine exponente officium linearis quantitatis gerens est ad unitatem determinata, indeterminata vero unitas exponente zero affecta $1^{o} = \frac{1}{1} = \frac{m+n}{m+n}$. Secundo vero modo $1 . 1^{o} = 1^{1+o} = a^{1+o} = a . \left(\frac{m+n}{m+n}\right)$, unitas linearis est determinata ad valorem $a$, $1^{o} = a_{o} = \frac{m+n}{m+n}$ coefficientis unitate indeterminata manente. Verum cum loco $1^{o}$ substitui possit quicunque alius numerus $a^{o}$, $b^{o}$, $c^{o}$, &c. antequam exponens a zero transeat in $(o+1)$; patet esse

$$1^{o} . 1 = a^{o+1} = b^{o+1} = c^{o+1} = M^{o+1}, \&$$

$$\frac{1}{1} . 1 = \frac{a}{a} . a = \frac{b}{b} . b = \frac{c}{c} . c = \frac{M}{M} . M$$

$$\left(\frac{m+n}{m+n}\right) . 1 = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) . a = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) . b = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) . c = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) . M.$$

Hoc vero obtinetur sola æquatione $1^{o+1} = a^{o+1} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) . a$, dummodo per $a$ intelligatur quantitas quæcumque indeterminata quoad valorem, quæ tamen semper constantis & integræ quantitatis naturam retineat, atque unitatis munus adimpleat, quæ proinde potest esse & ipsa (1).

4. Ratio vero, cur functio $1^{o+1}$ legitime in $a^{o+1}$ transformari possit, hæc est, quod exponens suffixus quantitati jubet eamdem numero quantitatem, cui suffigitur, toties in se ducendam esse quot unitates, una excepta, in ipso exponente reperiuntur, & quantitas inde orta dicitur *potestas* sive *potentia* illius simplicis & identicæ quantitatis exponente affectæ: aliter si non identica sit quantitas, quæ multiplicatur, dabit quidem productum diversarum licet æqualium, non *potentia* sive *potestas* unius ejusdemque quantitatis, neque exponente affici poterit. Quantitas igitur exponente affecta erit semper *potestas* sive *potentia* illius ordinis, quem indicat exponens suffixus: hæc tamen potestas facile in productum converti potest, si exponente plures in partes diviso quantitas in plures factores dispertiatur: ita ex: gr: $a^{2}$ erit potestas secunda ipsius identicæ $a$, at $a^{1+1} = a^{1} . a^{1}$ est productum duorum factorum diversorum $a^{1}$, $a^{1}$ licet æqualium. Itaque in nostro casu si loco $1^{o}$ substituatur $a^{o}$, quemadmodum in formula $1^{o+1}$ exponens $o+1$ numericus afficit eamdem quantitatem (1), cui suffigitur; ita in $a^{o+1}$ exponens $o+1$ afficiat oportet $a^{o}$ in locum $1^{o}$ substituta. Sed $a^{o} 1 = a^{o} . a^{1}$, & $a^{o} = 1^{o}$, ergo erit $a^{o} . a^{1} = 1^{o} . a^{1}$: igitur si a producto iterum ad potestatem transitus fiat, vel ponenda est $a^{1} = 1^{1}$, vel $1^{o} = a^{o}$: in primo casu fit $1^{o} . a^{1} = 1^{o} . 1^{1} = 1^{o+1}$; in secundo $1^{o} = a^{o}$, & $1^{o} . a^{1} = a^{o} . a^{1} = a^{o+1}$. Hinc in posterum statuendum est $1^{o}$ indicare quamcumque quantitatem geometricam abstractam cujuscumque valoris ac dimensionis,

sionis, quæ in calculo quantitatem illam constantem & integram, quæ vices unitatis subit, repræsentat. Hujusce vero valor ac dimensio determinatur ab exponente finito, qui ciphræ *o* additur, vel subtrahitur, posita in $1^{\circ}$ loco ( 1 ) quacumque ad libitum quantitate: & hoc modo $1^{\circ} = a^{o}$ est quantitas abstracta, cui si addatur in exponente + 1 determinatur $1^{o+1} = 1 =$ quantitati geometricæ ( 1 ) lineari ob exponentem 1: at $a^{o+1} = a$ indicat quantitatem geometricam unam esse hîc *a*, atque linearem: De hac vero quantitate exponentiali $1^{\circ}$ plura suo loco, cum de altioribus potestatibus agemus. Interim statuendum, donec sic exprimitur $1^{\circ}$ semper ad quantitatem geometricam pertinere, atque esse elementum, sive radix, ex qua quantitates geometricæ cujuscumque valoris ac naturæ prorumpunt.

5. Quamborem donec ( 1 ) naturam quantitatis geometricæ induit, est quidem absolute indeterminata, quam §§ superioribus ope formulæ $1^{o+1}$ ad quantitatem geometricam linearem determinavimus, valorem vero ipsius indeterminatum a quocumque valore lineari determinari posse § superiori demonstravimus substitutione constantis *a*, in cujus loco quicumque valor singillatim poni potest. Verum diligenter est animadvertendum, hanc hujusce $1^{o+1}$ indeterminationem multum differre ab indeterminatione illius variabilis, quæ *fluentis* nomine donatur, quamque (Lib: I Cap: I §. 19) definivimus illam, *quæ per minimum spatium in data directione mota continuo mutatur, fluitque ea lege, qua minima fluxio & minimum spatium se se respiciunt*. Naturam enim hujusce indeterminationis, quæ est propria formulæ $1^{o+1}$ hac una sequenti definitione complecti posse mihi videor, si dixero unitate hac intelligendum esse *quemcumque numerum constantem & unum, quo tanquam communi mensura utamur oportet, ut ejusdem systematis species servetur*: cæteri qui dari possunt, non sunt nisi partes ipsius minores majoresve, qui singuli conflantur a coefficiente numerico in ipsum numerum eumdem & integrum ducto, qui proinde vere fluentes sunt, & ejusdem semper naturæ, qua gaudet hujusmodi numerus constans & integer unitatem repræsentans. Hæc unitas abstracte sumpta est numerus ille qui in calculo communi *Protonumerus* dicitur, sed nec ejus vera natura, nec officium, (ut suo loco ostendam) cognoscitur. Quoties vero unitas hæc abstracta geometrica $1^{\circ} = a^{\circ}$ in posterum usurpanda erit, hoc *Protonumeri* nomine designabimus. Hinc nulla quantitas linearis *Protonumerum* referens, licet abstracte sumpta valorem infinite variare possit, non potest tamen fluentis naturam assumere. Ut igitur recte, & ea, qua par est cautione in re tanti momenti procedamus, distinguendæ sunt in Calculo *variabiles* a *fluentibus*, cum *variabiles* vere & proprie loquendo non sint nisi quantitates geometricæ, quas litteris *a* vel *b* &c. indeterminatis mos est in Calculo communi repræsentare, & hîc a nobis formula $1^{o+1} = a^{o+1}$ &c potiori jure exprimuntur: quæ quidem infinitis valoribus sunt obnoxiæ, & singillatim singulos suscipere possunt, at fluere nullo modo possunt: atque ideo valorem illum, quo primum afficiuntur, perpetuo retinent in eodem systemate, quo valore mutato, cæteris intactis manentibus, mutatur quidem species systematis, non natura: hoc est mutatur valor Protonumeri, & magnitudo *Loci geometrici concreti*, quæ ab hoc protonumero tantum pendet.

§. 6.

§. 6. Et sane coefficientes numerici abstracti eodem prorsus modo quamcumque quantitatem cujuscumque tandem valoris ac naturæ, cui applicantur, afficiunt, ipsa integra ac una manente: ita coefficiens $\frac{1}{2}$ tam indicabit medietatem pedis linearis, quadrati &c quam hæxapedæ, miliaris &c, verbo illius quantitatis, cui coefficiens hic præfigitur. Ergo recte symbolo (1) designari potest quæcumque sit illa quantitas, cum sua natura intacta manente, illis tantum valoris modificationibus obnoxia sit, quas coefficientes, quibus applicatur, jubent. Et cum duplex sit coefficientium numerorum natura & forma utriusque systematis propria; constat absolute loquendo in utroque systemate illam æque bene aptari posse, & coefficientibus systematis, in quo est, recte applicari: hinc relata ad systema S A, cum coefficientes homologi istius systematis bini bini sumpti, totam unitatem adæquent, cuicumque ex istis applicetur, semper submultipla erit, ac divisa in partes ipsa minores. Quod si ad Sistema S Y referatur, dividitur semper a duobus coefficientibus homologis in duas partes hac lege, ut primus a limite minimo ipsi æqualis crescat semper major ipsa usque ad infinitum: secundus vero a zero usque ad ipsius valorem perveniat, atque inde usque ad infinitum progrediatur. In hoc igitur systemate partes ipsius quantitatis abstractæ (1) multiplas, & submultiplas uno eodemque tempore obtinemus: quod in aliquibus casibus multum conferre senties.

§. 7. Neque tamen putes eam, quam superius tribuimus unitati abstractæ (1) indeterminationem ita esse illi propriam, ut cuicumque dato numero minime convenire possit. Nam ex dictis ob eam rationem, qua, cum sit $1^{0+1} = a^{0+1}$, licet unitatem linearem (1) in linearem $a$ convertere; licet etiam $a$ in ipsam (1) & in quemcumque alium valorem ($b$) transmutare, cum sit $a^{0} = b^{0}$, & $a^{0+1} = b^{0+1}$. Quæ transmutatio unius linearis quantitatis in aliam, licet a communi methodo ignoretur prorsus, aut improbetur; tamen ita evidens est atque necessaria ut nihil difficultatis præseferat, dummodo concipiatur litteram ($a$) esse valore indeterminatam atque posse in ejus locum quemcumque alium valorem peculiarem substitui: qui valor cum possit esse & ipsa (1), necessario consequitur, hanc ipsam unitatem ad eum ipsum valorem, in cujus locum suffecta primum fuerat, iterum revocari posse. Hoc quod dico de hac unitate lineari, perfecte convenit cuicumque alii numero lineari determinato (2), (3) &c, ut legitima sit æquatio, si recte intelligatur, $1^{0+1} = 2^{0+1} = 3^{0+1} \ldots a^{0+1}$: hi enim non sunt nisi numeri determinati in locum numeri ($a$) indeterminati substituti, inter quos & ipsum zero & ejus inversum infinitum, limites quantitatis hinc inde extremos locum habere posse nemo poterit inficias ire. Hæc tamen æquatio, quæ nullo modo vulgo recipitur, si invertatur, ac fiat $M = a^{0+1} = 1^{0+1} = 2^{0+1} = 3^{0+1} \ldots\ldots\ldots$ necessario & ut sibi cohæreat, est a communi Methodo excipienda. Hoc enim modo M naturam quantitatis fluentis induens communi symbolo $x$, vel $y$ &c poterit repræsentari, & in locum ($a$) quovis numero determinato 1, 2, 3, &c. substituto, de sua necessitate ac veritate judicium tutissimum exhibere; ut omittam in Analysi communi omnium consensu doceri, quamcumque determinatam quantitatem in locum illius constantis substitui posse, quæ in calculo evanuerit: quod cum id in

nostro casu ex Cap: I §. 1. & hoc Cap: semper contingat, ab ipsa vulgari methodo quod hîc demonstramus, mirifice confirmatur.

§. 8. Profecto nulla alia ratione legitima dici potest æquatio frequentissime usurpata a vulgari methodo $x = a$ (nisi aliter præparetur, ut a me factum vides in Pe. Ia. Lib: I), in qua supponitur $x$ incognita & variabilis; nisi quia $x$ est indeterminata eo modo, quo ($a$): quæ ($a$), cum omnes qui dari possunt valores determinatos suscipere possit, nec tamen actu ad aliquem peculiarem sit determinata, nequit actu exhiberi atque construi, nisi prius peculiarem aliquem valorem ex infinitis assumat: quo facto determinatur basis systematis, atque ideo ipsa $x$, quæ eadem & constans in eodem systemate semper perseverat, & omnem omnino mutationem respuit, nisi systema novæ basis sumatur. Vide igitur quantum differat in hac æquatione *variabilis* $x$ ab illa, quæ vere *fluens* dicitur. Quare duo Corollaria maximi momenti ex dictis sequuntur. Primum; quoties in æquationibus *variabiles* $x$, $y$, &c. litteris ($a$), ($b$), ($c$) &c., quæ indicant quantitates geometricas indeterminatas, sed constantes, comparantur; hujusmodi $x$, $y$, &c nequeunt naturam *fluentium* induere, cum nequeant sensim ac per gradus minimos crescendo vel decrescendo ab uno ad alium valorem transferri: sed tantum ab uno ad alterum valorem, nulla infinitesima successione intermedia, prout determinantur ($a$), ($b$), ($c$), &c transitum faciunt. Secundo; constituto jam systemate si plures in æquatione litteræ ($a$), ($b$) &c. tanquam datæ reperiantur, una tantum ex istis vere constans esse potest, & basim systematis repræsentare: cæteræ non sunt nisi fluentes, sive portiones basis constantis ad aliquem valorem arbitrio, vel conditione problematis determinatæ intra tamen limites systematis: quibus prætergressis mutatur systema: quemadmodum enim constituto systemate determinantur limites; ita viceversa constitutis limitibus systema necessario determinatur.

§. 9. Quæ si vera sunt, verum est etiam unitatem abstractam (1), quam absolute & quoad omnia indeterminatam superius demonstravimus, si ipsi exponens zero suffigatur, ut sit $1^0 = a^0$; determinari ad quantitatem geometricam universim sumptam cujuscumque valoris ac dimensionis, nec posse, donec ita effertur, coefficientem numericum repræsentare, quia fluere nullo modo potest, sed tantum *Protonumerum* sive unitatem illam unam & integram cujuscumque valoris ac dimensionis significare. Addita vero exponenti $0$ unitate, ut sit $1^{0+1} = a^{0+1}$, determinatur ad protonumerum linearem exprimendum, quicumque sit valor $a$: omnesque quantitates geometricæ, quæ ex hac omnes descendunt, linearem naturam sive unius dimensionis, quocumque valore afficiantur, a protonumero mutuantur. Restat tamen hujusmodi functio $1^{0+1} = a^{0+1}$ adhuc indeterminata in systemate, in valore, & positione. Valor tamen facile substitutione cujuscumque valoris numerici peculiaris in locum (1) suffecti determinatur, atque ideo ipse Protonumerus: positio vero, licet universim negligi possit, cum nihil referat utrum sit *Protonumerus* positivus vel negativus respectu alterius, cui comparatur, quocum nullam habet intrinsecam ac necessariam relationem; tamen sæpe fit (ut suo loco patebit) ut positio respectu alterius in aliquibus circumstantiis sit servanda: in quo casu in locum (1), vel ($a$) positivæ substituatur quævis quan-

titas

titas negativa. Nihil igitur reliqui eſt ad hanc determinationem functionis $1^{0+1} = a^{0+1}$ abſolvendam, niſi ut proprio ſyſtemate concludatur. Ut vero id conſequamur, reducenda eſt functio ($1^0$) vel ($a^0$) quantitatem geometricam abſtractam repræſentans, ad numerum abſtracte ſumptum ſignificandum : quod hoc facili & eleganti artificio obtinetur, tranſmutando ſcilicet $1^0$ in fractionem $\frac{1}{1}$ vel $a^0$ in $\frac{a}{a}$ : quo facto quæ erat quantitas geometrica, naturam coefficientis numerici abſtracti *protonumero* applicandi aſſumit, a qua tantum utrumque ſyſtema erui poteſt. En igitur hoc modo unitas (1) abſtracta ad ſignificandum coefficientem numericum abſtractum hac ſola ſubſtitutione $\frac{1}{1} = \frac{a}{a}$ loco $1^0 = (a)^0$. in hoc vero caſu vere nullius dimenſionis cenſenda eſt : hoc eſt nullam repræſentat lineam geometricam, ſed numerum abſtracte ſumptum quantitati geometricæ cuicumque applicandum. Hoc vero ex ipſa fractionis natura ſponte fluit, in qua denominator ejuſdem dimenſionis ac numerator, eam, quam hic præſefert dimenſionem, omnino tollit.

§. 10. Hîc igitur in proprietates hujuſmodi unitatis tamquam coefficientis inquirens, ſumo ejus loco formulam $\frac{1}{1} = \frac{a}{a}$, ſed æqualem cuicumque conſtanti numero per ſe ipſum diviſo, a qua diviſione, quicumque ſit conſtans numerus, ſemper idem quotiens (1) exſurgit. Hujuſmodi formula, ut vidimus, in S A ſit $\frac{1}{1} = \frac{a}{a} = \frac{m+n}{m+n}$: in ſyſtemate vero S Y eſt $\frac{1}{1} = \frac{a}{a} = \frac{m-n}{m-n}$, poſito $m > n$, vel $= \frac{n-m}{n-m}$, poſito $n > m$. Hoc eſt in ſyſtemate S. A quicumque ſit numerator (1), vel ($a$) &c dividitur in duas partes ſive numeros, quorum ſumma æquatur (1): in ſyſtemate S Y in duos numeros, quorum differentia eſt ſemper (1). Quare in ſyſtemate S A unitas fractionis eſt $1 = m + n$, in ſyſtemate S Y, $1 = m - n$; ſive (1) convertitur in ($a$) quemcumque numerum, qui in S A eſt æqualis ſummæ $m + n$; in ſyſtemate S Y differentiæ $m - n$: quarum ſumma vel differentia cum quemcumque numerum repræſentare poſſit, patet hanc unitatem fractionis eſſe & ipſam indeterminatam, ac in ejus locum quemcumque numerum ſubſtitui poſſe, qui tamen ſemper in eadem formula ſi ſumatur, integer eſt $= a$, diviſus eſt $= m + n$ in S A, $= m - n$ in S Y: quæ proinde (1) in hoc caſu *variabilis* quidem poteſt eſſe $= a$, ſed fluere nullo modo poteſt. Determinato vero valore ſummæ $m + n$, vel $m - n$ differentiæ, remanent tamen indeterminatæ ſingulæ $m$, $n$: variare enim poſſunt ſingulæ, quin valor ſummæ vel differentiæ mutetur. Poſita enim ſumma, vel differentia harum ſimul ſumptarum, puta, 10, erit in ſyſtemate S A, $10 = 10 + 0 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 =$

$= 4 + 6 = 5 + 5$ &c; in ſyſtemate S Y, $10 = 10 - 0 = 11 - 1 = 12 - 2 = 13 - 3 = 14 - 4 = 15 - 5$ &c idque infinitis modis, manente ſemper conſtanti tam earum ſumma, quam differentia 10. Cum vero in S A poſita $n$ vel $m$ zero, ſit $m$, vel $n = 10$; qua quantitate creſcit $n$, vel $m$, eadem minuitur $m$ vel $n$: in ſyſtemate vero S Y poſita minori $n = 0$ cum ſit major $m = 10$; qua quantitate creſcit $n$ ſupra zero, eadem augetur & major $m$ ſupra 10 uſque ad infinitum. Patet igitur incrementum unius eſſe decrementum alterius & viceverſa in ſyſtemate S A: at in S Y incrementum minoris ſupra zero idem eſſe ac incrementum majoris ſupra differentiam: inſuper hujuſmodi incrementum vel decrementum a zero per gradus minimos ſucceſſive augeri vel minui poſſe: ita ut in primo caſu ſit $m + n = \left\{ \begin{matrix} (m + dm) + (n - dm) \\ (m - dn) + (n + dn) \end{matrix} \right\}$, hoc eſt creſcente $m$ per fluxionem minimam $dm$, neceſſario minuitur $n$ per eamdem $dm$ minimam: contra vero creſcente $n$ per minimam fluxionem $dn$, neceſſario decreſcit $m$ per eamdem $dn$. In ſyſtemate vero S Y $m - n = \left\{ \begin{matrix} (m + dm) - (n + dm) \\ (m + dn) - (n + dn) \end{matrix} \right\}$, hoc eſt creſcente majori $m$ per minimam fluxionem $dm$, vel creſcente minori $n$ per minimam fluxionem $dn$, creſcit per eamdem minimam $dm$ minor $n$, vel per eamdem $dn$ major $m$. Ex quo luce clarius patet $m$ & $n$ ex definitione tradita vere *fluentes* eſſe ea lege præditas, ut in primo caſu earum ſumma, in ſecundo earum differentia ſemper ſit æqualis illi primo valori, quem habebat quando in S A alterutra erat zero, alterutra maxima; in ſyſtemate S Y quando minor $n$ erat zero, altera item minima illi primo valori æqualis. Itaque ſumma $m+n$ vel differentia $m-n$ eſt quidem indeterminata cujuſcumque valoris capax, ſed non fluens: ſingulæ vero $m$, $n$ ſunt *fluentes* ea lege inter ſe comparatæ, ut manente earum ſumma vel differentia, in ſyſtemate S A minimo decremento, quo decreſcit una, augeatur altera vel viceverſa: in ſyſtemate S Y vero eodem incremento vel decremento minimo utraque e ſuo relativo limite prorumpens, afficiatur: in quo caſu cum ſint ſingulæ in ſuo proprio ſyſtemate partes ejuſdem ($a$) cujuſcumque, hoc communi vinculo conſociatæ erunt ſemper *fluentes homologæ*, & earum fluxiones minimæ æquales. Quare hujuſmodi fluentes homologæ cujuſcumque ſyſtematis dicentur fractiones illæ, quæ eodem denominatore afficiuntur: earum vero numeratorum ſumma in ſyſtemate S A, differentia in ſyſtemate S Y communi denominatori æquatur.

§. 11. Verum cum ſumma coefficientium in ſyſtemate S A, earum differentia in ſyſtemate S Y debeat eſſe æqualis huic abſtractæ unitati (1); hujuſmodi (1) in duas fractiones dividatur oportet ejuſdem denominatoris $m + n$ in ſyſtemate S A; $m - n$ in ſyſtemate S Y, in duas partes $m$, $n$ diviſi, quarum una numeratorem habeat $m$, altera partem alteram $n$: ita ut ſit in ſyſtemate S A, $1 = \frac{1}{1} = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}$; in ſyſtemate S Y,

1 =

$1 = \frac{1}{1} = \frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n}$. Hisce servatis conditionibus, hujusmodi fluentes fractiones, in quas dividitur unitas primi membri æquationis superioris, coefficientes numericos homologos, sive *fluentes homologas abstractas* appellamus: quæ si in eumdem protonumerum ducantur, constituunt quantitates illas geometricas *fluentes homologas*, in quibus utrisque denominator est constans & idem, atque eædem ejus partes $m$, $n$ fluentes in quas dividitur; idemque protonumerus: numerator vero in singulis diversus, & unus æqualis fluenti $m$, alter fluenti $n$. Vera causa igitur cur quantitates geometricæ sive partes protonumeri fiunt *fluentes* non est nisi a numeratore $m$, vel $n$ fluente coefficientis, in quem ducitur constans & idem protonumerus systematis, repetenda. Ex ipsa hujusmodi fluentium forma unius systematis S A, multum diversa a forma alterius systematis S Y, quisque videt quantum hujusmodi fluentes systematis unius distent natura, origine, officio a fluentibus alterius systematis, licet in calculo communi iisdem symbolis $x$, $y$ in utroque systemate designentur: de quibus diligentius inferius agemus. Quamobrem ex æquationibus superioribus $1 = \frac{1}{1} = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}$ S A $= \frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n}$ S Y eruitur, ( 1 ) sive unitatem primi membri esse quidem constantem, sed multum differre ab unitate constanti $1 = 1^{\circ} = a^{\circ}$, quæ in hoc casu significat quantitatem geometricam abstractam, vicem protonumeri gerentem: illa vero semper est unitas numerica, quæ in duas fractiones numericas fluentes dividitur, diversas pro diversitate systematis, ad quod pertinent.

§. 12. Nolim tamen putes hanc unitatem numericam $1 = \frac{1}{1}$ coefficientis natura præditam, quam supra constantem ac semper sibi æqualem demonstravimus, utpote æqualem summæ in S A, vel differentiæ in S Y, fluentium homologorum coefficientium, non posse in fluentem converti, eo quia $1^{\circ}$ quantitas geometrica abstracta, sive Protonumerus nequit ullo modo fluere. Hæc enim sumpta tamquam coefficiens in infinitos valores successive & per gradus minimos transmutari, ac fluentis naturam assumere potest, cum possit esse unus vel alter coefficiens homologus fluens in limite constitutus. Idque vero duobus modis fieri potest, quando scilicet in æquatione $1 = \frac{1}{1}$, vel $1 = \frac{g}{g}$ denominator fractionis idem semper assumitur, ut ejus divisio in duas partes infinitimode varietur: & quando & denominator & ejus divisio in duas partes infinite variare ponuntur. Primo modo cum numerator fractionis sive fluentis sit una ex illis partibus, in quas dividitur idem denominator, hujusmodi numerator toties valorem mutet oportet, quoties mutantur partes ejusdem denominatoris, atque

atque ideo infinitis singillatim valoribus affici potest. Ita ex. gr. in systemate S A posita $1 = \frac{10}{10}$, erit fluens abstracta $1 = \frac{10}{10+0} = \frac{9}{9+1} = \frac{8}{8+2} = \frac{7}{7+3}$ $= \frac{6}{6+4} = \frac{5}{5+5} = \frac{4}{4+6} = \frac{3}{3+7} = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{1+9} = \frac{0}{0+10}$: & ejus homologa $1 = \frac{0}{0+10} = \frac{1}{1+9} = \frac{2}{2+8} = \frac{3}{3+7} = \frac{4}{4+6} = \frac{5}{5+5}$ $= \frac{6}{6+4} = \frac{7}{7+3} = \frac{8}{8+2} = \frac{9}{9+1} = \frac{10}{10+0}$, & in S Y $1 = \frac{10}{10-0}$ $= \frac{11}{11-1} = \frac{12}{12-2} = \frac{13}{13-3} = \frac{14}{14-4} = \frac{15}{15-5} \ldots\ldots \frac{10+\infty}{(10+\infty)-\infty}$, cui respondet $1 = \frac{0}{10-0} = \frac{1}{11-1} = \frac{2}{12-2} = \frac{3}{13-3} = \frac{4}{14-4}$ $= \frac{5}{15-5} \ldots\ldots\ldots \frac{\infty}{(10+\infty)-\infty}$

Ergo in systemate S A, quae erat in primo casu maxima $1 = \frac{10}{10}$ divisione successiva denominatoris per gradus minimos transit ad quemcumque valorem medium inter maximum ( 1 ) & minimum ( 0 ): atque ideo in hoc casu est una vel altera ex fluentibus homologis. In hoc systemate bene explorata denominatoris divisione eruitur, coefficientem, sive fluentem maximam $\frac{10}{10}$ homologam esse cum minima $\frac{0}{0+10}$; $\frac{9}{9+1}$ cum $\frac{1}{1+9}$; $\frac{8}{8+2}$ cum $\frac{2}{2+8}$, & sic successive procedendo donec denominatore bifariam diviso sit $\frac{5}{5+5}$ homologa cum $\frac{5}{5+5}$ primo aequalis, sed diversa. Quare patet si primam originem unius fluentis a puncto A ( *Fig.* 12. ) versus B sumamus, huic homologam ab altero puncto B versus A suae homologae obviam occurrere: nec posse homologas simul ex eodem originis puncto simul prorumpere: atque ideo licet, denominatore bifariam diviso, inter se aequentur fluentes homologae, tamen sunt diversae, a diverso originis puncto manantes. Ut igitur in hoc systemate quae sunt fluentes vere homologae simul uniantur, praeter ipsarum numeratorum summam aequalem denominatori, consideranda est etiam diligenter punctorum diversorum

ſorum origo, & contraria ſingularum directio invicem ſibi obviam occurrentium. Tunc igitur erunt fluentes ſuperioris exempli homologæ, ſi fiant $\left(\frac{10}{10+0}\right.$
$\left.+\frac{0}{0+10}\right)AB = \begin{Bmatrix} AB+B \\ BA+A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AD+BD \\ BD+AD \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AC+BC \\ BC+AC \end{Bmatrix}$
$= \begin{Bmatrix} AE+BE \\ BE+AE \end{Bmatrix} = \left(\frac{5}{5+5} + \frac{5}{5+5}\right) AB$ ſcilicet ſemper inter ſe diverſæ.

§ 13. Quod ſi ad homologas fluentes numericas ſyſtematis S Y noſmet convertamus, noverimus ſingulas a diverſo originis puncto A ( *Fig.* 13. ) & B prorumpentes, per eamdem directionem ſimul procedere: ita ut facto $1 = \frac{1}{1}$
$= \frac{10}{10-0}$ & $AB = \frac{10}{10-0} AB$, ſit ejus homologa $B = \frac{0}{10-0} AB$,
& facta $AD = \frac{11}{11-1} AB$ reſpondeat ei homologa $BD = \frac{1}{11-1} AB$,
& ſic ad infinitum ſemper per eamdem directionem A D ſimul progredientes. Quod ſi velimus earum directionem mutare, id obtinere non poſſumus niſi permutatione valorum coefficientium fluentium homologorum, ita ut qui major afficiebat A D, fiat coefficiens homologus minor, & A D tranſmutetur in A d, & qui erat minor fiat major, & B D convertatur in B d: idque jubente fluentium differentia conſtanti = A B. Si enim B D in mutatione directionis a B D in B d procederet per zero B intra puncta B, & A, homologa A D fieret A D', & tunc non amplius differentia fluentium conſtans eſſet, ſed ſumma: hoc eſt a ſyſtemate S Y tranſitus fieret ad ſyſtema S A. Ut igitur mutata directione, in eodem ſyſtemate S Y perſiſtamus, neceſſe eſt, ut fluentium coefficientium permutatio fiat, & fluens homologa major fiat minor, & viceverſa. Id etiam evincitur hac una animadverſione, quod ſcilicet hujuſmodi fluentes homologæ a diverſis punctis A, & B prorumpentes, ac ſemper in eadem ſimul directione fluentes, concurrunt ambæ in punctum commune D. Itaque facta A D negativa fit ipſa A d, & punctum fluens commune, in quod ambæ concurrere debent a D tranſit in *d*, ideoque ejus homologa B D ut concurrat in *d*, convertatur oportet in B d: ergo B D, quæ in primo caſu erat minor ſua homologa A D quantitate conſtanti A B, fiat neceſſario major oportet negativa A D, ſcilicet poſitiva A d eadem quantitate B A, per quam decreſcit A D facta negativa, hoc eſt facta Ad. Quare ſeries §. ſuperioris $1 = \frac{1}{1} = \frac{10}{10-0}$ &c, in qua continentur coefficientes fluentis majoris,

qui

qui ducti in A B dant fluentem majorem A D, e puncto A enatam, si A D in oppositam plagam A d transferatur, necesse est, ut ipsa ex majori in minorem conversa, scilicet facta A d, repræsentetur singillatim a terminis seriei secundæ $\frac{0}{10-0}$, $\frac{1}{11-1}$ ductis singulis in constantem B A, ac fiat $\frac{0}{10-0}$ B A $=$ A; $\frac{1}{11-1}$ B A $=$ A d &c, & homologa B D, quæ erat minor, fiat major, coefficientibus primæ seriei affecta. Quibus diligenter animadversis, luce clarius patet, hanc unitatem abstractam ( 1 ) quando coefficientem numericum repræsentat, tam summæ in S A, quam differentiæ in S Y coefficientium fluentium homologorum æquari, in quo casu constans semper est: quando vero alterutrius coefficientis fluentis systematis naturam induit, tantum abesse ut sit constans, ut per omnes omnino valores systematis fluendo transcurrat, atque vel alterum coefficientem homologum significet. Ita in S A ab unitate usque ad zero & hinc a zero ad unitatem: in systemate vero S Y ab unitate minima ( 1 ) usque ad infinitum $\frac{\infty + 10}{(10 + \infty) - \infty}$; vel facta directionis permutatione, a ( 0 ) minima usque ad $\frac{\infty}{(10 + \infty) - \infty}$ ascendit.

§. 14. Quod si denominator & ipse sit indeterminatus (qui est secundus modus quem innuimus §. 11) sitque $1 = \frac{z}{z}$, erit in S A $1 = \frac{(z-n)+n}{(z-n)+n}$, & in S Y $1 = \frac{(z+n)-n}{(z+n)-n}$, & coefficientes numerici fluentes, in quos dividitur ( 1 ) in S A eruut $\frac{(z-n)}{(z-n)+n}$, $\frac{n}{n+(z-n)}$; in S Y $\frac{z+n}{(z+n)-n}$ major; $\frac{n}{(z+n)-n}$ minor, in quibus si fiat $n = o$, erit in S A $\frac{z-n}{(z-n)+n} = \frac{z}{z} = 1$; $\frac{n}{n+(z-n)} = \frac{o}{z}$: & in S Y major $\frac{z+n}{(z+n)-n} = \frac{z}{z} = 1$; $\frac{n}{(z+n)-n} = \frac{o}{z}$ minor. Si vero fiat $n = z$, erit in S A $\frac{z-n}{(z-n)+n} = \frac{o}{z}$; $\frac{n}{(z-n)+n} = \frac{z}{z} = 1$, in S Y $\frac{z+n}{(z+n)-n} = \frac{2 \cdot z}{z} = 2$ major; $\frac{z}{(z+n)-n} = \frac{z}{z} = 1$ minor, Itaque in primo casu fluentes systematis S A erunt æquales fluentibus respectivis systematis S Y valore quidem, non natura; cum, quæ æqualis est ( 1 ), sit maxima in S A, mini-

minima in S Y; quæ vero sunt zero, ambæ minimæ, sed omnes a diversa generali formula profiscifcuntur. In secundo vero casu minor systematis S Y, quæ æquatur unitati, est æqualis maximæ systematis S A, ipsa vero est media, quæ usque ad infinitum progreditur. Valor vero peculiaris (1), qui in S A eruitur a formulà $\frac{z-n}{(z-n)+n}$, vel ab homologa $\frac{n}{n+(z-n)}$ facta $n=o$, vel $n=z$; & in S Y a minima $\frac{z+n}{(z+n)-n}$ facta $n=o$, vel a media $\frac{n}{(z+n)-n}$ facta $n=z$; aperte declarat in hoc casu (1) esse fluentem natura, & unum ex valoribus, quibus sua respectiva fluens affici potest. Itaque quemadmodum supra ostendimus, posito denominatore $g$ valoris determinati, (1) & naturam constantis, & fluentis naturam habere posse; ita & in hoc casu; in quo denominator symbolo $z$ expressus, variabilem repræsentat. Igitur in hac etiam suppositione $z$ est ejus naturæ ac $g$, & uterque cujuscumque valoris capax, hoc est uterque variabilis, sed neuter fluens: ac proinde unus pro altero promiscue in calculo usurpari potest. Naturam vero fluentis habet in formulis superioribus littera $n$, cum sit in S A $-n+n=o$; $n-n=o$ in S Y: atque ideo $n$ a zero per gradus minimos quemcumque valorem successive assumere potest, cum zero additus vel subtractus a quocumque numero ejus valorem non immutet; dummodo tamen in S A $n$ non superet valorem $z$, ne systema mutetur, ut inferius declarabitur.

§. 15. A valore igitur determinato, quem exhibent formulæ analyticæ, nihil tuti atque certi erui potest ad secernendos constantes numeros a fluentibus: cum quæcumque fluens in aliquo peculiari casu, (ut supra unitati contigisse vidimus) peculiarem numerum referre possit. Similiter nulla incognita symbolis $x$, $z$, &c. in calculo communi notata, tamquam fluens sumenda est, quia nullo peculiari valore determinatur: cum possit esse quidem valore indeterminata, hoc est (ut definivimus) *variabilis*, sed tamen non fluere, ut est $z$ in formulis superioris §, in quibus nullam constantem reperies ac determinatam, & tamen demonstravimus $z$ vicem constantis gerere, licet valorem quemcumque sumere possit, $n$ vero fluentem esse. Aliud igitur indicium nobis est comparandum, ut judicium tutum ferri possit, utrum formulæ & litteræ in formulis contentæ, quemcumque numerum referentes, quibuscumque symbolis $x$, $y$ &c. vel $(a)$, $(b)$ &c. exprimantur, sint constantes, an fluentes, & cui potissimum systemati formulæ pertineant, ac tandem quomodo ab uno ad alterum systema legitimus transitus possit obtineri. Criterium vero hoc tutum ac universale a varia ratione, qua formulæ modificantur, tantum est petendum, cum non nisi a varia forma, qua exhibentur hujusmodi formulæ & systema, & natura singularum litterarum indeterminatarum, ac ipsæ formulæ omnino pendeant. Ita in §°. superiori $1=\frac{z}{z}$ coefficiens est abstractus; littera $z$ numerus variabilis quidem, quia loco $z$ qui-

vis numerus substitutus eamdem æquationem constantem retinet; at semel substitutus idem manere debet ad obtinendos coefficientes homologos alterutrius systematis. Verum $1 = \frac{z}{z}$ est indifferens ad alterutrum systema suscipiendum, quæ ideo varie est præparanda ut ad alterutrum determinetur. Si fiat igitur $1 = \frac{(z-n)+n}{(z-n)+n}$, vidimus ab unitate constanti, summæ duorum coefficientium $\frac{(z-n)}{(z-n)+n}$, $\frac{n}{n+(z-n)}$ æquali, ortum ducere systema S A; at a formula $1 = \frac{(z+n)-n}{(z+n)-n}$, differentiæ fluentium $\frac{(z+n)}{(z+n)-n}$, $\frac{n}{(z+n)-n}$ æquali, systema S Y derivare. Littera vero $n$ in utroque systemate est fluens, qua una coefficientes, quos afficit, naturam fluentium acquirunt, diversis tamen valorum limitibus in diverso systemate circumscripti: quos si singillatim suscipiant, constantis naturam mentiuntur, sed a formula natura sua fluente profecti hanc fluentium naturam, a qua manarunt, licet ad aliquem valorem intra limites arbitrio determinentur, perpetuo conservant. Quamobrem majus quidem negotium, atque difficilius suscipiendum est in huiusce scientiæ principiis recte ac solido fundamento firmandis, quam quod hactenus Methodus nota sibi finxerat, quæ a sola substitutione litterarum $x$, $y$, $z$ &c. in locum earum quantitatum, quas ignorat, fluentes determinat: quemadmodum a substitutione $(a)$, $(b)$, $(c)$ &c. loco earum quantitatum, quas novit, constantes declarat, nihil sollicita de natura systematum, ac de diversis limitibus, quibus concluduntur, neque de ratione secernendi quantitates geometricas a coefficientibus numericis, nec de varia formularum transformatione: cum in maxima harum rerum omnium, præter ea, quæ inferius maximi momenti tradentur, ignoratione versetur. Quæ cum ita sint quisque videt quantum laboris, atque industriæ adhuc supersit ad prima hujusce tam sublimis Scientiæ elementa jacenda, ac in tuto collocanda.

§. 16. Ut vero in tanta rerum novissimarum copia, difficultate, atque præstantia, qua melius ratione, & quantum possumus sensim & ordine progrediamur, illud in primis animadvertendum, si quantitas quæcumque geometrica in duas partes quascumque sit dividenda, ipsam in hac divisione constantis naturam assumere: est enim ea ipsa identica, cujus quæritur divisio. Cum vero hujusmodi partes duæ infinitis modis variare possint, ut vidimus, quin ipsa quantitas mutetur, hujusmodi partes *fluentium* nomine recte designavimus: quas proinde singulas ex coefficiente numerico in ipsam integram quantitatem constantem ducto constare ostendimus, ut simul sumptæ quantitatem primam, quam diviserunt, in integrum iterum restituant: quod obtineri nequit, nisi coefficientes simul sumpti unitatem adæquent. Formula igitur ad hasce singulas conditiones simul adimplendas ita est conformanda, ut in ipsa tam quantitas integra, quam partes, in quas dividitur, con-

continèantur, ac ipsa quantitas a coefficientibus singulis, quibus afficitur, secernatur. Hoc posito, sit dividenda quantitas geometrica $g$ in duas quaslibet partes: fiat primum $(g-n)+n$, quæ certe quidem æquatur $g$ diviso in partes $(g-n)$, & $n$: at in hoc casu $n$ necessario est productum ipsius quantitatis $g$ in coefficientem numericum quemcumque, ut a $g$ sublato $n$, exsurgat ea portio ipsius quantitatis geometricæ $g$, quæ iterum addita quantitatem $g$ iterum restituat: est igitur segregandus ab $n$ coefficiens numericus à quantitate geometrica $(g)$. Id vero facile obtinetur si fiat $(g-n)+n=g\left(\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}\right)$ $=g\left(\left(\frac{g-n}{g}\right)+\frac{n}{g}\right)$: hoc enim artificio partes erunt $\left(\frac{g-n}{g}\right)g$, $\frac{n}{g}\cdot g$: & in prima $\frac{g-n}{g}$ est coefficiens numericus, in secunda $\frac{n}{g}$, ductus uterque in quantitatem geometricam $(g)$: & hoc modo quantitas a numero abstracto remanet distincta. Insuper si simul hujusmodi coefficientes sumantur, semper unitati æquales erunt, cum sit $\left(\frac{g-n}{g}\right)+\frac{n}{g}=\frac{g}{g}=1$: quicumque sit numerus $(n)$ a zero usque ad infinitum excurrens. Verum donec $(n)$ intra limites $(o)$ & $(g)$ continetur, erit semper $\frac{g-n}{g}$ positivus, atque summa hujusmodi coefficientium erit semper constans, & unitati æqualis: hinc ortum ducit Systema, quod appellavimus basis datæ S. A. Hisce vero limitibus prætergressis, (ut si fiat $n=g+b$); erit $\frac{g-n}{g}=\frac{g}{g}-\left(\frac{g+b}{g}\right)=-\frac{b}{g}$, idest coefficiens negativus; & $\left(\frac{g-n}{g}\right)+\frac{n}{g}=-\frac{b}{g}+\left(\frac{g+b}{g}\right)$, & formula superior in hanc convertitur $g\cdot\left(\left(\frac{g+b}{g}\right)-\frac{b}{g}\right)$, sive $=g\cdot\left(\left(\frac{g+n}{g}\right)-\frac{n}{g}\right)$, quæ non est amplius summa, sed differentia, in qua cum $(n)$ a zero usque ad infinitum progredi possit, eadem manente differentia $=1$, exsurgit Systema S. Y, basis variabilis a nobis appellatum. Hac igitur una formulæ superioris præparatione & quantitas geometrica, quæ protonumeri vicem gerit, a suis coefficientibus numericis separatur, & necessitas utriusque systematis nova hac ratione evidentissime demonstratur.

§. 17. Hinc deducitur coefficientes numericos semper fractionem repræsentare oportere, in qua si numerator æqualis est denominatori, fractio est aggregatum coefficientium peculiarium, quorum summa in systemate S. A, vel differentia in systemate S. Y constans est & æqualis unitati. Quæ tamen unitas tamquam coefficiens considerata naturam fractionis sequatur oportet. Facta enim $1-n+n$ $=$

$= 1 \cdot \left(\frac{1-n+n}{1 \quad 1}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1-n+n}{1}\right)$, (1) solitaria erit quantitas geometrica; unitas vero coefficiens, erit $1 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1} = \frac{(1-n)+n}{1}$;

ergo $1 - \frac{n}{1} = \frac{1-n}{1}$ fractio, in quâ numerator $= 1-n$, denominator (1), eritque $1 - \frac{n}{1} = \frac{(1-n)}{(1-n)+n}$ & $1 = \frac{(1-n)+n}{(1-n)+n} = \frac{1}{1}$

$$= \frac{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}} = \frac{(g-n)+n}{(g-n)+n} = \frac{g}{g}$$ : quo in casu ultimo

$1 = \frac{g}{g}$, & denominator constans ($g$), qui non est amplius (1). Sed in locum ($g$) quivis numerus substitui potest, ergo unitas coefficiens, erit $1 = \frac{1}{1} = \frac{g}{g} = \frac{b}{b}$ &c., & in primo casu unitas numeratoris dividitur in duas fluentes, in secundo numerator ($g$), in tertio numerator ($b$); manente constanti in primo casu denominatore (1), in secundo ($g$), in tertio ($b$). Itaque $\frac{g-n}{g-n+n} = \frac{g-n}{g}$ est fractio in qua numerator est $g-n$, denominator ($g$) constans, at si fiat $\frac{g-n}{g} = \frac{1-\frac{n}{g}}{\frac{g}{1}} = \frac{\frac{1-n}{g}}{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}$ convertitur in fractionem, cujus numerator est $\left(1-\frac{n}{g}\right)$, denominator vero constans $= 1$: intacto manente utrobique fractionis valore. Et sane $\frac{g-n}{(g-n)+n}$ $= \frac{1-n}{(g-n)+n}$, facta more communi divisione, sed $\frac{g-n}{(g-n)+n}$

=

$$= \frac{1-\frac{n}{g}}{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}} = \frac{1-\frac{n}{g}}{\frac{(1-n)+n}{g \quad g}}$$ ergo in primo casu

$$\frac{g-n}{(g-n)+n} + \frac{n}{(g-n)+n} = \frac{g}{g} = 1$$ : in secundo

$$\frac{1-\frac{n}{g}}{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}} + \frac{\frac{n}{g}}{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}} = \frac{1}{1} = 1$$ : in primà $(g)$ denominator, in secunda $(1)$. Idem omnino consequitur ex formula $(2^a)$ $g-n+n = g \cdot \left( (1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g} \right) = g \cdot \left( \frac{(g-n)+n}{(g-n)+n} \right)$, a qua eruitur $1 = \frac{(g-n)+n}{(g-n)+n} = \frac{g}{g} = \frac{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}} = \frac{1}{1}$.

§. 18. Ergo tam ex $(1.)^a$ $1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \cdot \frac{g}{g}$; quam ex $(2.)^a$ $g \cdot \frac{g}{g} = g \cdot \frac{1}{1}$ & $1^{0+1} = 1 \cdot g^0$; & $g^{0+1} = g \cdot 1^0 = g \cdot \frac{b}{b} = g \cdot b^0$

& $b^{0+1} = b \cdot \frac{b}{b} = b \cdot \frac{g}{g} = b \cdot g^0$

Hinc si protonumerus $(g)$ eligatur, sumenda erit formula $g \cdot b^0 = g \cdot g^0 = g^{0+1}$; at si sit $(b)$, sumatur $b \cdot g^0 = b \cdot b^0 = b^{0+1}$. Licet igitur exponens $0+1$ non nisi uni tantum quantitati $(1)$, vel $(g)$, vel $(b)$ &c. suffigi possit, quo nomine quantitas hoc exponente affecta *potestas* sive *potentia* dicitur; tamen si separentur exponentes, atque fiat vel $g^0 \cdot g$, vel $b \cdot b^0$ &c. erit etiam $g^0 \cdot g = b^0 \cdot g$; & $b^0 \cdot b = g^0 \cdot b$: sed hoc artificio a *potestate* ad productum duorum factorum diversorum translati fuimus. Ergo viceversa, si datis $b^0 \cdot g$, $g^0 \cdot b$, iterum ad *potestatem* unius quantitatis transitum fieri velimus, vel $(b)$ convertatur in $(g)$, vel $(g)$ convertatur in $(b)$; ut sit in primo casu $b^0 \cdot g = g^0 \cdot g = g^{0+1}$; in secundo $g^0 \cdot b = b^0 \cdot b = b^{0+1}$: in primo casu protonumerus fit $(b)$; in secundo $(g)$. Itaque quæcumque sit ea quantitas linearis, quam vicem protonumeri gerere velimus,

( puta

( puta $g$ ) fiat primum $(g - n) + n$, ex qua $g \cdot \left( \left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g} \right)$ $= g \left( \frac{(g - n) + n}{g} \right) = g \cdot g^{0} = g^{0+1}$: & hoc modo formula exponentialis $g^{0\pm 1}$ protonumeri ($g$) præparatur ad utrumque ſyſtema. Nam $g^{1}$ ſemper eadem & una in ſyſtemate perſeverans protonumerum refert: at $g^{0} = \frac{1}{1}$ $= \frac{g}{g} = \frac{h}{h}$ &c. aggregatum coefficientium fluentium in utroque ſyſtemate ræpreſentat, quorum ſinguli infinite variare poſſunt, aggregato eorum eodem manente $= 1$ in utroque ſyſtemate, ut ſit $g^{0+1} = g \cdot \left( \frac{(g - n) + n}{(g - n) + n} \right)$

$$= g \left( \frac{(h - n) + n}{(h - n) + n} \right) = g \cdot \left[ \frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}}{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}} \right]$$

$$= g \cdot \left[ \frac{\left(1 - \frac{n}{h}\right) + \frac{n}{h}}{\left(1 - \frac{n}{h}\right) + \frac{n}{h}} \right] \quad \text{S A} = g \cdot \left( \frac{(g + n) - n}{(g + n) - n} \right)$$

$$= g \left( \frac{(h + n) - n}{(h + n) - n} \right) = g \cdot \left[ \frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}}{\left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}} \right]$$

$$= g \left[ \frac{\left(1 + \frac{n}{h}\right) - \frac{n}{h}}{\left(1 + \frac{n}{h}\right) - \frac{n}{h}} \right]$$

S Y. &c. uſque ad infinitum in utroque ſyſtemate. Ex quibus conſequitur quamcumque quantitatem geometricam poſſe in infinita paria fluentium homologarum diſpertiri, quæ ſingula ( prout fractiones ) gaudent eodem conſtanti denominatore, ſed ab aliis, quæ non ſunt homologæ, prorſus diverſo.

§. 19. Conſequitur etiam, protonumerum quemcumque ($g$), qui conſtans & invariatus quantitatem geometricam primo ſumptam, in quam cadit diviſio, re-

præ-

præſentat, poſſe etiam ab unitate ( 1 ) abſtracta univerſim exhiberi. Quæ enim una & eadem atque integra ſemper perſiſtit, quæcumque illa ſit, nomine *unitatis* jure deſignanda eſt. Si enim aliam huic unitati abſtractæ ( 1 ) notionem, diverſam ab ea, quam modo dixi, notionem tribuere quis velit, mihi exhibeat rogo eam unitatem abſolutam, quam ab hoc ſymbolo ( 1 ) ſignificari contendit. Cum enim nihil abſoluti in quantitate ( niſi ejus limites extremos ( *o* ) & *infinitum* ) demonſtraverimus CAP. I. P. I., id profecto nomen hoc ſibi vindicat, quod licet natura ſua compoſitum in alias partes dividi poſſit, tamen ſemper unum integrum ſumitur atque tamquam communis menſura, cui cæteræ partes majores, minoreſve comparantur. In noſtro vero caſu linea illa duobus tantum punctis extremis terminata, quæ baſim ſyſtematis conſtituit, atque una in toto ſyſtemate dominatur, quæ nomine protonumeri a nobis definitur, cujuſcumque valoris illa ſit, ea eſt, quæ hoc nomine *unitatis* affici debet, donec intra vel extra duo puncta data primo ſumpta nullo alio puncto dato dividatur.

§. 20. Ut vero veritas §. 17 inaudita prorſus, & a communi opinione longe remota, ab omni prorſus erroris ſuſpicione liberetur, ſimulque novus hinc rerum exoriatur ordo, attente animadvertamus oportet, quod ſuperius demonſtravimus, quamcumque ſcilicet fluentem numericam utriuſque ſyſtematis, in quam ducitur protonumerus quantitatis integræ vicem gerens, in utroque ſyſtemate naturam fractionis induere, cum non ſit niſi pars multipla vel ſubmultipla protonumeri: quo poſito ſequitur etiam e converſo quamcumque fractionem in utroque ſyſtemate fluentem eſſe. Hinc quivis numerus licet integer, major, minorve protonumero, cui comparatur, ſemper tamquam fractio conſiderari debet: poteſt tamen licet fractus tamquam integer uſurpari, ſi ſit ipſe protonumerus, ſive quantitas illa geometrica, quæ eſt communis menſura, cui partes reliquæ, in quas dividitur, comparantur. Hoc bene ſtatuto poſita $\frac{1}{1}$, quæ naturam fractionis repræſentans, coefficientem abſtractum, ut diximus, refert, fiat $\frac{1}{1} = \frac{(1-n)+n}{1}$ S A $= \frac{(1+n)-n}{1}$ S Y, ut ſit in primo caſu ſumma conſtans coefficientium fluentium abſtracte ſumptorum $\frac{1-n}{1}$, $\frac{n}{1}$; in ſecundo caſu differentia conſtans fluentium $\frac{1+n}{1}$, $\frac{n}{1}$: quæ ſunt fractiones, quarum numeratores fluentes oſtendunt quot partes aſſumptæ fuerint denominatoris conſtantis $= 1$. Sed eſt etiam $\frac{1}{1} = \frac{(1-n)+n}{(1-n)+n}$ S A $= \frac{(1+n)-n}{(1+n)-n}$ S Y:

&

& $\frac{1.\left(\frac{(1-n)+n}{1}\right)}{1.\left(\frac{(1-n)+n}{1}\right)}\ SA = \frac{1.\left(\frac{(1+n)-n}{1}\right)}{1.\left(\frac{(1+n)-n}{1}\right)}\ SY = \frac{1.\frac{1}{1}}{1.\frac{1}{1}}$: quo artificio peracto, quæ erat initio unica fractio abstracta, dividitur in duas fractiones singulas protonumero ( 1 ) applicatas, scilicet $1.\left(\frac{(1-n)+n}{1}\right) SA$, $1.\left(\frac{(1+n)-n}{1}\right) SY$, quæ singulæ solitariæ cum integrum systema & quoad protonumerum, & quoad coefficientes omnino compleant, nec una in alteram influat, possunt invicem dissociari, & singillatim sumi.

§. 21. Simul tamen sumptæ erit $\frac{1.\frac{1}{1}}{1.\frac{1}{1}} = \frac{1.\frac{g}{g}}{1.\frac{g}{g}} = \frac{1.\left(\frac{(g-n)+n}{g}\right)}{1.\left(\frac{(g-n)+n}{g}\right)}\ SA$

$= \frac{1.\left(\frac{(g+n)-n}{g}\right)}{1.\left(\frac{(g+n)-n}{g}\right)}\ SY = \frac{1.((g-n)+n)}{1.((g-n)+n)}\ SA = \frac{1.((g+n)-n)}{1.((g+n)-n)}\ SY,$

sive $\frac{1.\frac{1}{1}}{1.\frac{1}{1}} = \frac{1.\frac{g}{g}}{1.\frac{g}{g}} = \frac{\frac{g\left((1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}\right)}{1}}{\frac{g\left((1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}\right)}{1}}\ SA = \frac{\frac{g\left((1+\frac{n}{g})-\frac{n}{g}\right)}{1}}{\frac{g\left((1+\frac{n}{g})-\frac{n}{g}\right)}{1}}\ SY = \frac{g.\frac{1}{1}}{g.\frac{1}{1}}$

ac tandem $\frac{1.\frac{1}{1}}{1.\frac{1}{1}} = \frac{1.\frac{g}{g}}{1.\frac{g}{g}} = \frac{g.\frac{1}{1}}{g.\frac{1}{1}} = \frac{g.\left(\frac{(g-n)+n}{g}\right)}{g.\left(\frac{(g-n)+n}{g}\right)}\ SA = \frac{g.\left(\frac{(g+n)-n}{g}\right)}{g.\left(\frac{(g+n)-n}{g}\right)}\ SY$

hoc est $\frac{1.\frac{1}{1}}{1.\frac{1}{1}} = \frac{1.\frac{g}{g}}{1.\frac{g}{g}} = \frac{g.\frac{1}{1}}{g.\frac{1}{1}} = \frac{g.\frac{g}{g}}{g.\frac{g}{g}}$. Ergo

$$1^{o}\left(\frac{1}{1}\right)^{o}=1^{o}\left(\frac{g}{g}\right)^{o}=g^{o}.\left(\frac{1}{1}\right)^{o}=g^{o}.\left(\frac{g}{g}\right)^{o}$$ : ſive

$1^{o}\,(1^{o}\,)^{o}=1^{o}\,(g^{o}\,)^{o}=g^{o}\,(1^{o}\,)^{o}=g^{o}\,(g^{o}\,)^{o}$: ut quiſque facile videt. Sed $1^{o}\,(1^{o}\,)^{o}=1.\,(1\,)^{o}$: ergo erit etiam

$$1\,(1\,)_{o}=1^{o+1}=1\,(g_{o})=g\left(\frac{1}{1}\right)^{o}=g\,(g^{o}\,)=g^{o+1}$$, ſive

$$1.\frac{1}{1}=1.\frac{g}{g}=g.\frac{1}{1}=g.\frac{g}{g}.$$ Q. E. D.

Hoc vero idem eſſet ac ſi fractiones ( ut §. ſuperiori adverti ) perfectum & abſolutum ſyſtema ſingulæ continentes, quarum unam tam numerator, quam denominator ſeorſim complectitur, ſolitarie ſumantur. Quemadmodum igitur loco $\frac{1}{1}$ poni poteſt quivis $\frac{g}{g}$, ita loco protonumeri ( 1 ) quævis quantitas ( $g$ ) ſumi poteſt: cum ( 1 ) abſtracta quantitatis cujuſvis protonumerum repræſentans, quovis protonumero ( $g$ ) determinatur: ex quo eruitur quemvis numerum etiam fractum, irrationalem, & cujuſcumque tandem naturæ etiam tranſcendentis, ( hoc eſt etiam zero & infinitum, ut ſuo loco demonſtrabitur ) tamquam communem menſuram in locum unitatis abſtractæ (1.) ſubſtitui poſſe. Quibus confirmantur etiam quæ diximus §. 4 & ſeq:

§. 22. Hinc novum Theorema maxime generale, fœcundum, & apprime neceſſarium conſequitur, quo oſtenditur ex ſimplici formula generali abſtractiſſima $1.\frac{1}{1}$ ( utpote neque in ſyſtemate, neque in protonumero, neque in coefficientis numeratore & denominatore determinata ) obtineri utrumque ſyſtema cujuſvis protonumeri, atque coefficientis cujuſvis denominatoris, ut inde fluentes homologæ propriæ cujuſvis ſyſtematis determinati aſſequantur. Nam erunt ex dictis formulæ generales $1.\frac{1}{1}=1.\left(\frac{(1-n)+n}{1}\right)$ S A $=1.\left(\frac{(1+n)-n}{1}\right)$ S Y tam arcto vinculo inter ſe conjunctæ, ut una ex altera, ſola tranſpoſitione ( $+n$ ) loco ( $-n$ ), & viceverſa, enaſcatur. Quare hoc primo artificio formula determinatur in genere ad alterutrum ſyſtema. Sed $1=g^{o}=h^{o}$ &c indefinite, & $\frac{1}{1}=\frac{g^{o}}{g^{o}}=\frac{h_{o}}{h^{o}}$ &c indefinite, dummodo numerator ſit idem ac denominator, quorum uterque nihil pendet a ſolitario ( 1 ) $=g^{o}=h^{o}$ &c, ac proinde hic poteſt eſſe etiam diverſus a

$g^{\circ} = h^{\circ}$ &c. fractionis $\frac{1}{1} = \frac{g^{\circ}}{g^{\circ}} = \frac{h^{\circ}}{h^{\circ}}$ &c. Ergo

$$1 \cdot \frac{1}{1} = g^{\circ} \cdot \frac{h^{\circ}}{h^{\circ}} = 1 \cdot \left(\frac{(1-n)+n}{1}\right) = g^{\circ} \cdot \left(\frac{(h^{\circ}-n)+n}{h^{\circ}}\right) \text{ S A}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{(1+n)-n}{1}\right) = g^{\circ} \cdot \left(\frac{(h^{\circ}+n)-n}{h^{\circ}}\right) \text{ S Y ; five}$$

$$1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{g \cdot \left(\frac{h}{h}\right)}{g \cdot \left(\frac{h}{h}\right)} = 1 \cdot \left(\frac{(1-n)+n}{1}\right) = \frac{g \cdot \left(\frac{(h-n)+n}{h}\right)}{g \cdot \left(\frac{(h-n)+n}{h}\right)} \text{ S A}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{(1+n)-n}{1}\right) = \frac{g \cdot \left(\frac{(h+n)-n}{h}\right)}{g \cdot \left(\frac{(h+n)-n}{h}\right)} \text{ S Y}$$

quo facto, præter systema in unoquoque systemate determinatur protonumerus, qui dat speciem systematis, semper constans in eodem systemate, & denominator ( $g$ ) vel ( $h$ ) &c, qui in eodem systemate infinite variare potest, atque ideo in eodem systemate infinita paria fluentium homologarum ab unoquoque denominatore exhibentur, scilicet $\left(\frac{h-n}{h}\right) \cdot g$, $\frac{n}{h} \cdot g$; $\left(\frac{f-n}{f}\right) \cdot g$, $\frac{n}{f} \cdot g$ &c in S A protonumeri ( $g$ ); $\left(\frac{h+n}{h}\right) g$, $\frac{n}{h} \cdot g$; $\left(\frac{f+n}{f}\right) \cdot g$, $\frac{n}{f} \cdot g$ &c in S Y ejusdem protonumeri ( $g$ ). Sic porro constituta formula cum sit quævis $\frac{g \cdot \left(\frac{(h-n)+n}{h}\right)}{g \cdot \left(\frac{(h-n)+n}{h}\right)} = 1$ &c, erit $g \cdot \left(\frac{(h-n)+n}{h}\right)$ $= g \cdot \left(\frac{(h-n)+n}{h}\right)$: atque ideo sumpto solitario numeratore, vel denominatore hujusce fractionis habetur systema, protonumerus, fluentes homologæ, prout intererit, determinatæ.

Sed

Sed quoniam est etiam $\dfrac{g\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right) SA}{g\cdot\left(\dfrac{(h+n)-n}{h}\right) SY} = 1$; erit etiam

$g\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right) SA = g\cdot\left(\dfrac{(h+n)-n}{h}\right) SY$: quo evincitur intima ac necessaria utriusque systematis inter se conjunctio. Consecutiones vere mirabiles, ac maximi momenti, quæ ex hoc novo principio descendunt inferius eruentur, quibus multa, quæ falsa sunt in communi Methodo tolluntur; quæ dubia, fallacia, impervia confirmantur, expediuntur, assequuntur.

§. 23. Hic loci interim addo quod (posito $\dfrac{g}{g} = \dfrac{(g-n)+n}{(g-n)+n} = \dfrac{(h-n)+n}{(h-n)+n}$ $= \dfrac{(f-n)+n}{(f-n)+n}$ &c ad infinitum in S A: & sic in alio systemate S Y; in quibus singulis tam numerator, quam denominator idem in duas partes divisus numeratores fluentium homologarum in unaquaque fractione designat) facile potest ad formulam generalem § superioris fractio revocari, ac in duo systemata solitaria dispertiri. Fiat modo $\dfrac{(g-n)+n}{(g-n)+n}$

$$= \frac{g\cdot\left(\dfrac{(g-n)+n}{g}\right)}{g\cdot\left(\dfrac{(g-n)+n}{g}\right)} = \frac{g\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right)}{g\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right)} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{h\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right)}{h\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right)} = \frac{h\cdot\left(\dfrac{(g-n)+n}{g}\right)}{h\cdot\left(\dfrac{(g-n)+n}{g}\right)} \text{ \&c},$$

& fractio in duas fractiones dividitur, quarum singulæ separatim sumptæ systema S A vel S Y integrum complectuntur cujuscumque protonumeri ac denominatoris.

Hinc in praxi dato systemate ex: gr: $g\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right)$, ut protonumerus ( $g$ ) in coefficientem, & coefficiens ( $h$ ) in protonumerum convertatur, fac $g = g^{o}$; & $h^{o} = h$, & erit $g\cdot\left(\dfrac{(h-n)+n}{h}\right)$

 =

$= h . \left( \frac{(g - n) + n}{g} \right)$. Nam in numeratore $h - n$ fractionis, quæ est una ex homologis fluentibus, ($h$) semper debet esse æqualis denominatori integro & in valore & in positione: ergo si mutatur denominator ($h$) in ($g$), debet etiam mutari in numeratore $h - n$ fractionis, ($h$) in ($g$); & viceversa si mutetur in numeratore $h - n$, ($h$) in ($g$), debet mutari denominator ($h$) in ($g$): in locum enim $\frac{g}{g}$ quamvis fractionem $\frac{h}{h}$ substitui posse quis non videt? At si velimus coefficientem $\frac{h}{h}$ in protonumerum convertere, ex demonstratis satis est ponere $\frac{h}{h} = h^{0}$, & exponenti (o) addere (1), ut sit $h^{0+1} = h = h . \frac{h}{h} = h . \left( \frac{(h - n) + n}{h} \right) = h . \left( \frac{(g - n) + n}{g} \right) = g . \left( \frac{(h - n) + n}{h} \right)$: quod indicat transitum factum ab unitate protonumeri ($h$) ad unitatem protonumeri ($g$): atque ideo fluentes homologæ unius systematis esse fluentibus homologis, hoc est ejusdem coefficientis systematis alterius protonumeri, in ratione $h : g$.

§. 24. Hujusmodi igitur formulæ erutæ a vera æquatione $g^{0} . \left( \frac{(h^{0} - n) + n}{h^{0}} \right) = h^{0} . \left( \frac{(g^{0} - n) + n}{g^{0}} \right)$, vel $g^{0} . \frac{h^{0}}{h^{0}} = h^{0} . \frac{g^{0}}{g^{0}}$, cujus unum membrum, donec exponente zero afficitur, alteri æquatur, nihil aliud nos docent, nisi quod quæcumque quantitas exponente zero affecta, donec coefficientis numerici naturam induit, (hoc est donec repræsentat fractionem ejusdem numeratoris ac denominatoris) semper cuicumque alteri quantitati eodem exponente zero affectæ, ac similem fractionem exhibenti, æquatur; quia semper est $g^{0} = \frac{g}{g} = h^{0} = \frac{h}{h}$ &c. $= \frac{1}{1}$. Verum si $(g)^{0}$ quantitatem abstractam vices protonumeri gerentem (ut diximus) repræsentet; tunc ut solitaria sumatur atque integra, liberanda est ab exponente zero, sive huic exponenti zero addendus est ille numerus, qui quantitatis geometricæ dimensionem indicet; qui in hoc nostro casu dimensionis linearis est (1): & tunc erit $g^{0+1} = g$; $h^{0+1} = h$: inter se non natura sed valore diversæ. Communis Methodus vero eidem formulæ $1^{0}$, vel $g^{0}$, quæ has duas notiones toto cælo inter se diversas continet, non nisi illam coefficientis numerici affigit: ex quo fit ut $1^{0}$ vel $g^{0}$ sem-

ſemper unitati æquet tam in caſu, in quo eſt Coefficiens $\frac{1}{1}$; $\frac{g}{g}$; tam quando ſignificat quantitatem abſtractam $1^{\circ}$, $g^{\circ}$, quæ ſublato zero determinatur ad ( 1 ), vel ( $g$ ). Et ſane facto $M^{\circ} = g^{\circ}$ ex §. 21 ſcimus $M^{\circ} = g^{\circ}. \frac{1}{1}$ $= g^{\circ}. \frac{h^{\circ}}{h^{\circ}}$; & $\frac{M}{M} = \frac{g . \frac{h}{h}}{g . \frac{h}{h}}$, & $M = g$: verum in methodo communi eſſet $M^{\circ} = g^{\circ} = 1$, ergo $M^{\circ} = 1$; & $\frac{M}{M} = 1 = \frac{1}{1}$, quæ fractio coefficientis numerici natura prædita, eſt quidem æqualis $\frac{g}{g}$, tamen M ( ſcilicet numerator vel denominator fractionis ) qui protonumerum repræſentat, falſo ponitur $= 1$, cum revera ſit ( $g$ ): & $M = g . \left( \frac{(h - n) + n}{h} \right)$ S A $= g . \left( \frac{(1 - n) + n}{1} \right)$ S A $= g . \left( \frac{(h + n) - n}{h} \right)$ S Y $= g . \left( \frac{(1 + n) - n}{1} \right)$ S Y: quando in Methodo communi haberetur ex noſtra Theoria $M = 1 . \left( \frac{(1 - n) + n}{1} \right)$ &c ſyſtema ſcilicet protonumeri ( 1 ), qui longe diſtare poteſt a valore ( $g$ ). Ergo conſtat eſſe $\frac{g}{g}$ coefficientem $= 1$; ſed $g^{\circ}$ quantitatem $= g^{\circ + 1} = g$. Origo vero hujuſce communis erroris non aliunde repetenda eſt, niſi a valore, quem in utroque caſu æqualem unitati functio $( 1 )^{\circ}$ exhibet, qui ſpecie tenus idem Analyſtas minus cautos hactenus decepit. Licet enim in utroque caſu ſit $1^{\circ} = \frac{1}{1} = 1$: tamen unitas primi $\frac{1}{1}$ eſt unitas coefficientis numerici abſtracti ſummam in ſyſtemate S A, vel differentiam in S Y fluentium abſtractarum exhibens: at in ſecundo eſt $1^{\circ + 1} = 1^{1} = 1$, protonumerum linearem referens, natura toto cælo diverſa a natura ſuperioris unitatis. Hoc tamen non ſatis bene advertens communis Methodus ab æqualitate valoris ( 1 ), quem in utroque caſu præſefert formula ( $1^{\circ}$ ), licet in alterutro natura diverſum, decepta eumdem ſemper valorem ( 1 ) tribuit etiam formulæ $g^{\circ}$, $h^{\circ}$ &c, quando ſignificat fractionem

nem $\frac{g}{g}$, $\frac{h}{h}$ &c, & quando est fractio abstracta $(g)^{\circ}$, $(h)^{\circ}$ quantitatis geometricæ $(g)$; $(h)$, ac semper ponit $g^{\circ} = h^{\circ} = (-1)^{\circ} = 1$. In quibus tamen æquationibus, si identitas valoris in utroque membro ( ut vulgo contenditur ) semper requiratur, veritas longe abest. Nec alio modo verificari possunt, nisi in eo sensu a nobis superius demonstrato; ut scilicet indicet τὸ ( 1 ) eam quantitatem abstractam, quæ vicem protonumeri adimplet, quæ potest determinari ad quemcumque valorem exhibitum a numeratore vel denominatore fractionis $\frac{g}{g} = \frac{h}{h} = \frac{-1}{-1} = 1$; si loco $\frac{g}{g}$ ponatur $\frac{h}{h} = h^{\circ}$, vel $(-1)^{\circ}$, vel $(1)^{\circ}$, quantitas $(g)^{\circ}$ transmutatur in $h^{\circ}$, $(-1)^{\circ}$, $(1)^{\circ}$: ex quibus singulis eruitur $(h)$, $(-1)$ &c, vel denique quivis numerus, qui est communis mensura sive protonumerus in quovis peculiari systemate: ideo $(g)^{\circ}$ vel $(h)^{\circ}$, &c symbolo unitatis abstractæ ( 1 ) universim exhiberi potest, ita tamen ut in casibus peculiaribus a formula requisitis substituatur in ejus locum suus determinatus protonumerus $(g)$, vel $(h)$ vel &c. Quæ tamen substitutio, cum tamquam piaculum numquam luendum a communi methodo semper vitetur, manifeste evincitur a communi methodo ( 1 ), quam educit ab æquatione $g^{\circ} = 1$, tamquam valorem peculiarem ab aliis omnibus distinctum usurpari, neque in ejus locum alium substitui posse. Si tamen ab ea quæras quæ sit hæc unitas, & cujus naturæ? statim hæret, neque quo se vertat sciens *ex casuum peculiarium circumstantiis pendere* dictitat, ut difficultatem prorsus inexsuperabilem aliquo modo effugiat. Incredibile dictu est, quinam ex hac infecta tamquam radice errorum surculi undique succreverint, atque in omnes Analyseos partes se se propagaverint, qui omnino eradicari nequeunt, nisi prius ipsa errorum radix penitus evellatur: hoc vero sensim & ordine non sine magno labore hæc nostra Theoria horum artificiorum auxilio præstare nititur.

§. 25. Antequam tamen progrediar, ut in ipso statim hujusce novæ Theoriæ limine, quantum hæc veteri præstet judicium ferri certissimum possit, mecum quæso animadvertatur. Methodum communem, quæ universim contendit esse $1^{\circ} = (-1)^{\circ} = g^{\circ} = (-g)^{\circ} = \frac{1}{1}$, non solum omnem omnino aditum sibi intercludere ad alterutrum systema sibi comparandum protonumeri determinati in duas fluentes homologas dispertiendum ( circa quæ omnia & singula in maxima ignoratione versatur ); sed etiam plurimis ac gravissimis difficultatibus implicari adeo, ut quo magis sese expedire conatur, eo magis irrito conatu se se irretiat. Nam vera quidem erit æquatio superior ab ipsa unice recepta si ita efferatur $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{g}{g} = \frac{-g}{-g} = 1$, sed in hoc casu a quantitate geometrica ad coefficientes abstractos transitum inscia facit, neque

que modum cognoſcit, quo protonumerum quemvis applicare poſſit, & propoſito ſyſtemati aptare: huic igitur æquationi tamquam ſaxo adhæret, nec ultra progredi poteſt, cum neque quid ipſa velit, neque quomodo formula præparari poſſit, ſciat. Quod ſi huic exponenti zero addatur unitas, ut habeatur protonumerus quæſitus, tunc æquatio erit $1^{0+1} = (-1)^{0+1} = g^{0+1} = (-g)^{0+1} = 1^1$, ſive $1 = -1 = g = -g$, quam ipſa ut abſurdam repudiat, hac falſa præoccupata opinione, quod ſequeretur non ferendum abſurdum, nempe quivis numerus poſitivus ſuo negativo, & cuicumque alteri negativo æqualis: atque ideo neget etiam oportet exponenti zero in ſuperioribus æquationibus addi poſſe unitatem. En igitur Methodus nota ad incitas redacta: ſi enim ad primum, quod unice amplectitur, modum efferendi æquationem ſuperiorem confugiat, quantitate geometrica, cui applicari debent coefficientes, prorſus evaneſcente, quam ſubſtituere debeat in protonumeri locum omnino ignorat. Hoc ita verum eſt, quod unitatem poſitivam ſtricte ſumptam loco protonumeri ſemper uſurpat etiam in illis caſibus, in quibus vel negativa unitas, vel alia poſitiva, vel negativa quantitas non niſi locum habere poteſt. Ex quo quid mali ſequatur (quod eſt graviſſimum in omnibus Analyſeos partibus) inferius oſtendam.

§. 26. Contra vero quam libero ſemper gradu noſtra hæc Theoria duplices notiones, quæ neceſſario huic formulæ $(1)^0$, $(g)^0$ tribuendæ ſunt, aſſecuta, ex una in alteram utilem ac miram conſecutionem procedat, ſatis ex antecedentibns ac præcipue ex §. 21 quiſque colligere poteſt. Juvat tamen hîc in æquatione $(-g)^0 = g^0$ paullulum immorari. Sumpta igitur $(-g)^0$, erit

$$\frac{-g}{-g} = \frac{(-g-n)+n}{(-g-n)+n} = \frac{-g\cdot\left\{\dfrac{\left(1-\dfrac{n}{-g}\right)+\dfrac{n}{-g}}{1}\right\}}{-g\cdot\left\{\dfrac{\left(1-\dfrac{n}{-g}\right)+\dfrac{n}{-g}}{1}\right\}}$$

$$= \frac{-g\cdot\left(\dfrac{(-g-n)+n}{-g}\right)}{-g\cdot\left(\dfrac{(-g-n)+n}{-g}\right)} = \frac{-g\cdot\left(\dfrac{-g}{-g}\right)}{-g\cdot\left(\dfrac{-g}{-g}\right)} = \frac{-g\cdot\dfrac{g}{g}}{-g\cdot\dfrac{g}{g}}$$

$$= \frac{-g\cdot\left(\dfrac{(g-n)+n}{g}\right)}{-g\cdot\left(\dfrac{(g-n)+n}{g}\right)}\ \text{S A vel} = \frac{-g\cdot\left(\dfrac{(g+n)-n}{g}\right)}{-g\cdot\left(\dfrac{(g+n)-n}{g}\right)}\ \text{S Y};$$

quæ prima dat tam in numeratore, quam in denominatore idem S A, ſecunda idem

idem S Y; & utraque $= (-g)^{\circ} . \frac{g^{\circ}}{g^{\circ}}$, cujus exponenti zero si addatur (1), erit $= (-g)^{\circ+1} . \left(\frac{g}{g}\right)^{\circ+1}$, sive $= (-g)^{1} . \left(\frac{g}{g}\right)^{1} = -g . \frac{g}{g}$, quo artificio alterutrum systema numeratoris vel denominatoris se se offert protonumeri ( $-g$ ) negativi. En igitur demonstrata veritate, ac necessitate formulæ $(-g)^{\circ} = (-g)^{\circ+1}$, ex qua oritur tam $-g . \left(\frac{(g-n)+n}{g}\right)$ S A, quam $-g . \left(\frac{(g+n)-n}{g}\right)$ S Y. Poterat etiam hoc alio modo tractari formula; scilicet $\frac{(-g-n)+n}{(-g-n)+n} = \frac{g . \left\{\frac{(-1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{-1}\right\}}{g . \left\{\frac{(-1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{-1}\right\}}$:

scimus enim ex §. 22. denominatorem integrum fractionis debere semper esse æqualem constanti numeratoris $-1-\frac{n}{g}$ unius fluentis, quæ cum sit hic ( $-1$ ), etiam denominator erit ( $-1$ ). Sed $\frac{g . \left\{\frac{(-1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{-1}\right\}}{g . \left\{\frac{(-1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{-1}\right\}}$

$$= \frac{g}{g} \; \frac{\left(\frac{(-g-n)+n}{-g}\right)}{\frac{(-g-n)+n}{-g}} = g^{\circ} \left(\frac{-g}{-g}\right)^{\circ} = g^{\circ} , \left(\frac{g}{g}\right)^{\circ}; \; \&$$

$$g^{\circ+1} . \left(\frac{-g}{-g}\right)^{\circ+1} = g^{\circ+1} . \left(\frac{g}{g}\right)^{\circ+1} = (-g)^{\circ+1} . \left(\frac{g}{g}\right)^{\circ+1} =$$

$1^{\circ+1} . \left(\frac{1}{1}\right)^{\circ+1} = (-1)^{\circ+1} . \left(\frac{1}{1}\right)^{\circ+1}$ &c. : quæ est ea ipsa æquatio,

quam

quam §. 25. diximus repudiari a Methodo communi tamquam absurdam. Facile tamen & evidenter veritas hujusce æquationis assequitur, si quid ipsa velit, intelligatur. Nam posita A B $= g$; erit ( *Fig:* 14 ) $-g \cdot \frac{g}{g} = -AB. \frac{AB}{AB} = BA. \frac{AB}{AB} = BA. \left(\frac{AD+BD}{AD+BD}\right)$ & $g \cdot \left(\frac{-g}{-g}\right) = AB. \left(\frac{-AB}{-AB}\right) = AB. \frac{BA}{BA} = AB. \left(\frac{BD+AD}{BD+AD}\right)$; ergo prima $-g \cdot \frac{g}{g}$ est eadem ac $g \cdot \frac{g}{g} = \frac{AD}{AD+BD}. BA + \frac{BD}{BD+AD}. BA$ : B A enim non est $= -g$, nisi respectu A B, sed absolute sumpta B A est $= +g$ positivæ suo proprio & absoluto valori. At $g \cdot \left(\frac{-g}{-g}\right) = \frac{BD}{BD+AD}. AB + \frac{AD}{AD+BD}. AB$, quæ vere significat directionis inversionem, ut quæ in primo casu ducebat originem ab A versus B, altera a B versus A; nunc facta inversione, prima origine sumpta a B procedit versus A, contra altera homologa ab A versus B. Ergo formula, quæ vere inversionem directionis significat, est $g \cdot \left(\frac{-g}{-g}\right)$ : at $-g \cdot \frac{g}{g}$ est eadem ac $g \cdot \frac{g}{g}$, cum $-g = -AB$, vere & absolute loquendo est $= BA = g$. Quare $M^o = (\pm g)^o. \left(\frac{\pm h^o}{\pm h^o}\right) = (\pm g)^o. \left(\frac{(\pm h^o) - n) + n}{(\pm h)^o}\right) SA = (\pm g)^o. \left(\frac{(\pm h^o) + n) - n}{(\pm h)^o}\right) SY$ est formula maxime universalis ad utrumque præparata systema cujuscumque protonumeri ac denominatoris capax, qui in locum $(g), (h)$ substitui possunt, utpote exponente zero affecti. Quæ ut determinetur ad utrumque systema lineare satis est exponenti zero addere unitatem ( intactis manentibus $n - n = o$, qui semper tolli ac addi possunt peracta operatione ) ut habeatur $M^{o+1} = (\pm g)^{o+1}. \left(\frac{(\pm h)^{o+1}}{(\pm h)^{o+1}}\right) =$

$$= (\pm g) \cdot \left(\frac{(\pm h - n) + n}{\pm h}\right) S.\ A$$

$$= (\pm g) \cdot \left(\frac{(\pm h + n) - n}{\pm h}\right) S.\ Y =$$

$$\pm f \left(\frac{(\pm h - n) + n}{\pm h}\right) S.\ A = (\pm e) \left(\frac{(\pm d + n) - n}{\pm d}\right) S.\ Y;$$

hoc eſt cujuſcumque protonumeri ac denominatoris. Denominator vero $\frac{-d}{-d}$ oppoſitum originis punctum fluentis deſignat. Hinc $M = \pm g = \pm f = \pm e$ &c. quæ tantum abeſt ut ſit abſurda, ut etiam declaret quemcumque numerum M cujuſcumque valoris vicem quantitatis geometricæ ſubire poſſe, & ad utrumque ſyſtema revocari. Hæc mire congruunt cum iis, quæ diximus Lib. I. P. I, & oſtendunt mutationem directionis ſumendam eſſe a coefficiente numerico, non a quantitate, quæ ſemper poſitiva ſumenda eſt. Quo cognito imaginarium ſemper neceſſario expungitur: nunquam enim $\frac{-g}{-g}$ quantitatem negativam poteſt repræſentare: cætera vero in utroque ſyſtemate remanent poſitiva.

§. 27. Hiſce demonſtratis nunc in limites denominatoris $(g)$ utriuſque ſyſtematis inquiramus, quod præbet fractio numerica $\frac{g}{g}$ ſummam vel differentiam fluentium abſtractarum exhibens. Ac primum animadvertas velim $(g)$ in fractione $\frac{g}{g}$ eſſe ſemper numerum integrum poſitivum: ſi enim poneretur $g = \frac{f}{h}$, eſſet $\frac{g}{g} = \frac{fh}{fh}$, & tunc $g = fh$ numerator vel denominator fit ſemper numerus integer poſitivus, hoc eſt $(fh)$. Nunc ſumpta formula $\frac{(g-n)+n}{(g-n)+n}$ ſummam fluentium abſtractarum ſyſtematis S. A referente, ſi ſit $n = g$ maxima, erit $g - n = o$ minima, & fluens $\frac{g-n}{g} = \frac{o}{g}$ minima, & ejus homologa $\frac{n}{g} = \frac{g}{g}$ maxima: at facta $n = o$ minima, erit viceverſa $\frac{g-o}{g} = \frac{g}{g}$ maxima, & ejus homologa $\frac{o}{g}$ minima. Ergo $(n)$ non poteſt ſuperare in hoc ſyſtemate denominatorem $(g)$, ſed intra limites $(o)$ & $(g)$ coercetur. Ergo e converſo denominator $(g)$ non poteſt eſſe minor $(n)$, quem in limite maximo ipſius $(n)$ æquare poteſt, cum $g - n$ debeat eſſe vi ſyſtematis ſemper poſitivus, & ſemper debeat ſupera-

re

re $(n)$; qui non nisi in limite maximo potest, æquare $(g)$. Verum minimus valor $(n)$ est zero, ergo $(g)$ qui ex dictis est numerus integer positivus non potest esse minor $(o)$: potest tamen ad infinitum evehi ita ut sit fluens una $\frac{\infty - n}{\infty}$, & ejus homologa $\frac{n}{\infty}$, & $(n)$ fluens intra limites $(o)$ & $(\infty)$, & maxima $\frac{\infty - n}{\infty} = 1$, quando $n = o$, & $\frac{\infty - \infty}{\infty} = \frac{\infty \cdot o}{\infty} = o$ minima ut supra. Quare valor denominatoris in hoc systemate, qui constans & integer in singula additione fluentium homologarum perseverat, potest assumere quemcumque valorem usque ad infinitum, qui tamen non potest esse minor unitate. Nam si ponatur $g = o$, $(n)$ perpetuo zero esse debet: nam est

$$\frac{(g - n) + n}{(g - n) + n} = \frac{(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}}{(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}}$$, in quo casu fluentes homologæ sunt $\frac{1 - \frac{n}{g}}{1}$, $\frac{\frac{n}{g}}{1}$, & si ponatur $g = o$, cum $(n)$ intra limites $(o)$ & $(g)$ fluere debeat, limites in hac suppositione essent ambo $(o)$, atque ideo $(n)$ perpetuo $= o$, & $\frac{(1 - \frac{n}{g})}{1} + \frac{\frac{n}{g}}{1} = \frac{(1 - \frac{o}{o})}{1} + \frac{\frac{o}{o}}{1} = \frac{(o - o) + o}{o}$ $= \frac{o \cdot o + o}{o \cdot o + o}$; & $\frac{1}{1} = \frac{o}{o} = \frac{(o - o) + o}{o} = \frac{o \cdot o + o}{o}$: & divisione facta per $o$, erit $\frac{(1 - 1) + 1}{1} = \frac{o + 1}{1}$ in quo casu prima fluens est minima $\frac{o}{1}$, altera maxima $\frac{1}{1}$: atque ideo ut formula, posito denominatore $(o)$, etiam casus medios comprehendat, ita erit efferenda $\frac{(o - on) + on}{o} = \frac{o}{o} \cdot \frac{(1 - n) + n}{1} = \frac{(1 - n) + n}{1}$: nunc enim utraque $\frac{1 - \frac{n}{1}}{1}$, $\frac{\frac{n}{1}}{1}$ vere est fluens media, cum $(n)$ limiti-

bus gaudeat ($o$), & 1: & facto $n = o$, $\frac{\left(1-\frac{o}{1}\right)}{1}+\frac{\frac{o}{1}}{1}$ $=\frac{(1-o)}{1}+\frac{o}{1}$. Repugnat igitur in hoc ſyſtemate $\frac{n}{o}=\infty$: in hoc enim caſu debet eſſe $n=o$, & fractio $\frac{n}{o}=\frac{o}{o}$. $n=\frac{n}{1}$, & ($o\ n$) intra limites $o\,.\,o$ & $o\,.\,1$: ergo ($n$) poteſt decreſcere uſque ad zero, non vero creſcere ſupra ($g$), ſit ($g$), ſi lubet, etiam zero. Creſcere tamen poteſt ($g$) a valore ſuo minimo (1) uſque ad infinitum: nam cum ſit $\frac{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}{1}$ quo magis creſcit ($g$) eo minor fit $\frac{n}{g}$, donec facta $g=\infty$, erit $\frac{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}{1}=\frac{\left(1-\frac{n}{\infty}\right)+\frac{n}{\infty}}{\infty}$ $=\frac{(\infty-n)+n}{\infty}$. Limites vero ($n$) in hoc caſu erunt ($o$) & ($\infty$), ac poſito $n=o$ erit $\frac{n}{\infty}=\frac{o}{\infty}$ omnium minima, hoc eſt abſolute zero $=\frac{o\,.\,o}{1}$; $\frac{n}{\infty}=\frac{1}{\infty}$ item minima, ſed infinite major $\frac{o}{\infty}$, cum hæc ſit $\frac{o\,.\,o}{1}$ illa $\frac{1\,.\,o}{1}$: atque ideo $\frac{1}{\infty}:\frac{o}{\infty}::1:o$. Rurſus minima $\frac{2}{\infty}$, $\frac{3}{\infty}$, &c. donec ($n$) finitus eſt: facto vero ($n$) maximo $=\infty$ erit $\frac{n}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$, & $\frac{\left(1-\frac{n}{\infty}\right)+\frac{n}{\infty}}{1}=\frac{\left(1-\frac{\infty}{\infty}\right)+\frac{\infty}{\infty}}{1}$ $=\frac{(1-1)+1}{1}=\frac{(\infty-\infty)+\infty}{\infty}$. Ergo fluens prima $=\frac{1-\frac{\infty}{\infty}}{1}=\frac{1-1}{1}$, & ejus homologa $\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{1}$. At facta

(1-

$\frac{\left(1-\frac{o}{\infty}\right)+\frac{o}{\infty}}{1}=\frac{(\infty-o)}{\infty}$ ; prima $\frac{1-\frac{o}{\infty}}{1}=\frac{\infty-o}{\infty}$ $=\frac{1}{1}$, & ejus homologa $\frac{\frac{o}{\infty}}{1}=\frac{o}{\infty}=\frac{o\,.\,o}{1}$ & in casibus mediis $\frac{\left(1-\frac{n}{\infty}\right)+\frac{n}{\infty}}{1}=\frac{(\infty-n)+n}{\infty}$. Quare $\frac{n}{\infty}$ potest esse zero posita $n=o$; potest esse finita sed minor 1, sive media, posita $n=\frac{\infty}{g}$, & maxima, posita $n=1\,.\,\infty$. Quare fractio $\frac{g}{g}$ in systemate S A ab $\frac{1}{1}$ crescit usque ad $\frac{\infty}{\infty}$, atque ideo denominator $(g)$ integer ab $(1)$ pervenire potest usque ad $(\infty)$: $(n)$ vero qui limitibus $(o)$ & $(g)$ circumscribitur, quo minor erit $(g)$ angustioribus terminis continebitur: donec facto $g=1$ minimo, erit $\frac{n}{g}=\frac{n}{1}$ & $(n)$ intra limites $(o)$ & $(1)$, ergo $(n)$ in casibus mediis fractio unitate minor, major zero. Sed hujusmodi fractio media ipsius $(n)$ intra limites $(o)$ & $(1)$ est fractio vera, cujus denominator major semper numeratore ab $(1)$ usque ad infinitum pervenire potest; ergo hujusmodi denominator fractionis erit $(g)$, numerus scilicet ille qui in formula $\frac{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}{1}$ ductus in $(1)$, convertit formulam in $\frac{(g-n)+n}{g}$:

Ergo in hisce formulis tam $(g)$ quam $(n)$ erunt semper numeri integri. Si enim ponas $n=\frac{fn}{h}$ in formula $\frac{(1-n)+n}{1}$ erit $\frac{1-\frac{fn}{h}+\frac{fn}{h}}{1}$ $=\frac{\left(1-\frac{n}{\frac{h}{f}}\right)+\frac{n}{\frac{h}{f}}}{1}=\frac{\left(\frac{h}{f}-n\right)+n}{\frac{h}{f}}=\frac{\frac{h}{f}}{\frac{h}{f}}=\frac{hf}{hf}$

=

$= \frac{(bf - n) + n}{bf} = \frac{\left(1 - \frac{n}{bf}\right) + \frac{n}{bf}}{1}$ : vel si mavis

$\frac{\left(1 - \frac{fn}{b}\right) + \frac{fn}{b}}{1} = \frac{(b - fn) + fn}{b} = \frac{(b - n) + n}{b}$. In

formula vero $\frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}}{1}$ erit $\frac{\left(1 - \frac{fn}{bg}\right) + \frac{fn}{bg}}{1}$

$= \left(1 - \frac{n}{\frac{bg}{f}}\right) + \frac{n}{\frac{bg}{f}} = \frac{\left(\frac{bg}{f} - n\right) + n}{\frac{bg}{f}} = \frac{(bgf - n) + n}{bgf}$.

Ergo sufficit in hoc systemate ut in formula $\frac{(1 - n) + n}{1}$ sit ($n$) fractio vera, semper minor (1), ut reducatur ad $\frac{(g - n) + n}{g}$ scilicet ad numeros integros ($g$), & ($n$); ita ut ($n$) sit saltem minor ($g$) per (1), ejusque valor maximus sit $g - 1$.

§. 28. Ut vero formula utraque superior utriusque systematis scilicet $\frac{g}{g} = \frac{(g - n) + n}{g}$ S. A $= \frac{(g + n) - n}{g}$ S. Y, opportuna adhibita substitutione loco fluentis ($n$), ita conformetur, ut in ipsa limites intra quos contineri debet valor ($n$) in proprio systemate clare & oculis ipsis conspiciantur, nec in substitutione valorum, quorum capax est fluens ($n$) in systemate assumpto decipiamur, atque limites qui sunt proprii alterius systematis perperam ei, quod præ manibus habemus, tribuamus; (ex quo errore uno tantum, ut sæpius in P. I tot modis invictissime demonstravimus, oritur positivum æquale negativo, & reale imaginario); maneat alta mente repostum non posse ex §°. superiori valorem fluentis ($n$) in systemate S A superare valorem ($g$) in formula $\frac{(g - n) + n}{g}$, quem non attingit nisi in limite maximo; ergo erit $n = g - m$, in qua formula ($m$) semper minor ($g$) ut ($n$) maneat positivus, & facto $m = g$ fit $n = 0$ minimus valor, & e contra facto

$m =$

$m = o$, erit ( $n$ ) maximus $= g$. Substituta igitur in locum ( $n$ ) fluente $g - m$, erit formula superior $\frac{(g-n)+n}{g} = \frac{g-(g-m)+(g-m)}{g}$, ex qua cognoscitur esse $\frac{n}{g} = \frac{g-m}{g}$, & $n = g - m$, atque ideo $n + m = g$ scilicet S. A; in quo nec ( $n$ ), nec ( $m$ ) potest superare ( $g$ ). Et hæc est formula $= \frac{g}{g}$, in qua dividitur numerator ( $g$ ) in duas fluentes $\frac{g-(g-m)}{g}$, $\frac{g-m}{g}$; manente constante & integro denominatore ( $g$ ). Quod si fiat $\frac{g-(g-m)+(g-m)}{g} = \frac{g}{g}$.

$$\left[\frac{1-(1-\frac{m}{g})+(1-\frac{m}{g})}{1}\right] = \frac{1-(1-\frac{m}{g})+(1-\frac{m}{g}}{1} = \frac{1}{1},$$

hæc erit fractio, in qua tam numerator quam denominator fit $= 1$, qui est minimus valor, ad quem ( $g$ ) deprimi potest. Et cum $\frac{m}{g}$ hîc nequeat superare ( $1$ ), loco $\frac{m}{g}$ ponatur ( $m$ ), & erit fractio systematis S A ad minimum valorem $\frac{1}{1}$ depressa, quæ coefficientem numericum summam fluentium systematis exhibentem, designat: & formula $\frac{1}{1} = \frac{1-(1-m)+n}{1}$, & $1 - m = n$, & $m + n = 1$ S. A in qua in hoc casu nec ( $m$ ), nec ( $n$ ) potest superare ( $1$ ): & formula $\frac{(1-n)+n}{1} = \frac{1-(1-m)+(1-m)}{1}$ S A: in qua nullus terminus naturam fluentis induit nisi ( $n$ ) in prima, ( $m$ ) in secunda; quorum valores proinde arbitrio nostro relinquuntur, dummodo tamen semper intra limites ( $o$ ) minimum, & ( $1$ ) maximum contineantur: dummodo scilicet sint singulæ fractiones unitate minores. Posita $m = o$ minima, est $n = 1$ maxima, & formulæ $\frac{(1-1')1}{1} = \frac{1-(1-o)+(1-o)}{1}$; & posita $m = 1$, $n = o$, erit $\frac{(1-o)+o}{1} = \frac{1-(1-1')+(1-1')}{1}$:

in

in quibus evidenter deprehenditur ( I′ ) lineola signatam fluentem natura esse ( $n$ ), vel ( $m$ ) ad maximum valorem ( I ) evectam.

§. 29. Nunc in revocata formula S. Y $\frac{g}{g} = \frac{(g+n)-n}{g}$, in qua una ex fluentibus $\frac{g+n}{g}$ major semper $\frac{g}{g}$: ( fit enim minima, quando $n = o$ ), $g + n = m$ constituit systema S. Y, in quo $n$ minima $= o$, & $m$ minima $= g$, & maxima $n = \infty$, & maxima $m = g + \infty$: eritque $\frac{g}{g} = \frac{(g+n)-n}{g} = \frac{g+(m-g)-(m-g)}{g}$, in qua ultima ($m$) semper major $g$, & intra limites ($g$), & $\infty + g$, determinat limites $n = m - g$ intra ($o$) & $(\infty + g) - g = \infty$. Quod si loco ($g$) ponatur (I), sive si in locum $\frac{g}{g}$ substituatur æqualis fractio $\frac{I}{I}$, erit coefficiens numericus differentiam fluentium exhibens ad simplicissimam formam & ad minimam fractionem $\frac{I}{I}$ reductus, scilicet $\frac{I}{I} = \frac{(I+n)-n}{I} = \frac{I+(m-I)-(m-I)}{I}$ & $n = m - I$; & $m = n + I$, hoc est major fluens ( $m$ ) intra limites ( I ), & $I + \infty$, & ( $n$ ) minor intra limites ( $o$ ) & $(I + \infty) - I = \infty$. Ergo posita $m = I$ minima, erit $n = o$ minima, & $\frac{(I+o)-o}{I} = \frac{I+(I'-I)-(I'-I)}{I}$: & posita $m = I + \infty$ maxima, erit $n = \infty$ maxima, & $\frac{(I+\infty)-\infty}{I} = \frac{I+(\infty-I)-(\infty-I)}{I}$.

Ergo fluens major $\frac{I+n}{I} = \frac{I+(m-I)}{I}$, & minor $\frac{n}{I} = \frac{m-I}{I} = \frac{m-I}{-(m-I)+(I+(m-I))} = \frac{-I}{I} + (\frac{I+(m-I)}{I})$, hoc est æqualis maiori detracta $\frac{I}{I}$: sed major $\frac{I+(m-I)}{I} = \frac{I+n}{I}$, est semper fractio major unitate ( quæ vulgo dicitur spuria ); ergo & minor fractio majoris naturam sequetur. Si comparentur inter se maxima & minima

S. A,

S. A, cum minimis systematis S. Y, erit in S. A $\frac{(1-1')+1'}{1}$ $=\frac{1-(1-o)+(1-o)}{1}$, vel $\frac{(1-o)+o}{1}=\frac{1-(1-1')+(1-1')}{1}$; & minimæ S Y $\frac{(1+o)-o}{1}=\frac{1+(1'-1)-(1'-1)}{1}$, quæ cum ultimis systematis S. A maximam habent similitudinem. Nam $\frac{(1-o)+o}{1}$ S. A $=\frac{(1+o)-o}{1}$ S. Y, ac differunt tantum in signis præfixis ( $o$ ): hoc tamen sufficit ad diversitatem systematum constituendam; nam $\frac{1-o}{1}$ est maxima; & $\frac{1+o}{1}$ est minima: prima fluendo decrescit, secunda fluendo crescit; & prima decrescit usque ad zero, secunda crescit usque ad infinitum. Ergo primæ S. A $\frac{1-o}{1}$ decrescenti, ut $\frac{1}{1}$ sit constans, addenda est fluens altera, per quam ipsa decrescit: contra vero a majori $\frac{1+o}{1}$ S. Y, quæ crescit usque ad infinitum, demenda est ea quantitas, per quam major supra $\frac{1}{1}$ crescit. Et hæc est vera ratio, cur in S. A summa fluentium, in S. Y differentia debeat esse constans, & cur hæc relativa proprietas essentiam systematum, eorumque intimam societatem ac necessitatem constituat. Majorem etiam similitudinem inter se præseferunt cæteræ duæ $\frac{1}{1}=\frac{1-(1-1')+(1-1')}{1}$ S.A $=\frac{1+(1'-1)-(1'-1)}{1}$ S. Y, ac talem, ut sit prima $=\frac{1+(1'-1)-(1'-1)}{1}$, secunda $=\frac{1-(1-1')+(1-1')}{1}$, unaque in aliam promiscue convertatur. Si tamen facta hac diversa præparatione, in eodem systemate ac prius ( ut vulgo fit ) permanere credamus, misere decipimur; cum in prima S. A minima $\frac{1-1'}{1}$, fluens ( $1'$ ) a zero usque ad ( 1 ) crescere possit, atque ideo $\frac{1'}{1}$ est maxima; & in casibus mediis fra-

ctio vera unitate minor; & viceversa in $\frac{1' - 1}{1}$, fluens ( 1′ ) ab ( 1 ) usque ad infinitum excurrere possit; atque ideo ( 1′ ) est minima; ergo in casibus mediis semper unitate major, & $\frac{1'}{1}$ fractio semper unitate major, quæ vulgo dicitur spuria. Hac igitur diversa tantum dispositione transitus fit a systemate ad systema, hoc est a summa ad differentiam, & e contra, fluentium homologarum. Hinc ab una tantum formula $= \frac{1 - (1 - n) + (1 - n)}{1}$ utrumque necessario profluit systema: si enim est fractio vera, erit semper $1 - n$ positivus; hinc formula semper pertinebit ad S A; si vero ( $n$ ) sit major semper ( 1 ), $1 - n$ erit negativus, & formula $\frac{1 + (n - 1) - (n - 1)}{1}$ ad S. Y; & e contra.

§. 30. Hoc artificio quæcumque fractio $\frac{o}{o} = \frac{g}{g} = \frac{h}{h} \ldots\ldots \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1}$ ( quicumque sit numerus ( $g$ ), non excluso zero nec infinito ) summam vel differentiam homologarum fluentium abstractarum, sive coefficientium amplectens ad eam simpliciorem formam $\frac{1}{1}$ reducitur, ad quam pervenire potest, eadem manente conditione necessaria; ut scilicet numerator sit æqualis denominatori, ac ejusdem naturæ, quæcumque, licet cujusvis generis, sit quantitas ( $g$ ) fractionis $\frac{g}{g}$: in cujus proinde locum substitui potest simplicissima fractio $\frac{1}{1}$. Nam si recte animadvertas, formula $\frac{(g - n) + n}{g}$ S. A $= \frac{(g + n) - n}{g}$ S. Y nihil aliud nos docet, nisi quod in primo casu ( $g$ ) in duas partes est divisa, quarum summa, in secundo earum differentia totam ( $g$ ) adæquat: ergo in systemate S. A pars, quæ ab integra ( $g$ ) subtrahitur, ac postea iterum additur, & in S Y pars, quæ additur, ac postea subtrahitur, ejusdem naturæ sit oportet, ac est ipsa ( $g$ ). Ergo si ( $g$ ) sit ( $o$ ), vel ( $\infty$ ), pars quæ additur ac subtrahitur sit & ipsa ejusdem naturæ ac ( $o$ ) vel ( $\infty$ ) oportet, sed submultipla in primo, multipla in secundo, ut in primo addita, in secundo subtracta eadem ( $g$ ), vel ( $o$ ), vel ( $\infty$ ) in integrum

grum restituatur. Quare erit semper $\frac{(o - on) + on}{o}$ S. A $= \frac{(\infty - \infty n) + \infty n}{\infty}$ S. A $= \frac{(o + on) - on}{o} = \frac{(\infty + \infty n) - \infty n}{\infty}$ S. Y $= \frac{(g - gn) + gn}{g}$ S. A $= \frac{(g + gn) - gn}{g}$ S. Y. Quæ singulæ, facta respectiva divisione per $o, \infty, g$, reducuntur ad hanc $\frac{1}{1} = \frac{(1-n)+n}{1}$ S. A $= \frac{(1+n)-n}{1}$ S. Y. Erit igitur $\frac{1}{1}$ coefficiens ille universalis & abstractus divisus in duos coefficientes numericos fluentes, prout requirit alterutrum systema, applicandus postea cuicumque protonumero $g = o = \infty$, ut intelligatur hunc dividendum esse in duas fluentes eo modo, quo (1) abstracta coefficientis numerici a suis fluentibus dividitur. Itaque in formula $\frac{(o - n) + n}{o} = \frac{(o + n) - n}{o} = \frac{(\infty - n) + n}{\infty} = \frac{(\infty + n) - n}{\infty} = \frac{\left(1 - \frac{n}{o}\right) + \frac{n}{o}}{1}$ $= \frac{\left(1 + \frac{n}{o}\right) - \frac{n}{o}}{1} = \frac{\left(1 - \frac{n}{\infty}\right) + \frac{n}{\infty}}{1} = \frac{\left(1 + \frac{n}{\infty}\right) - \frac{n}{\infty}}{1}$; (n) debet esse ejusdem naturæ ac (o), vel (∞). Ergo $\frac{\left(1 - \frac{on}{o}\right) + \frac{on}{o}}{1}$ $= \frac{\left(1 + \frac{on}{o}\right) - \frac{on}{o}}{1} = \frac{\left(1 - \frac{\infty n}{\infty}\right) + \frac{\infty n}{\infty}}{1} = \frac{\left(1 + \frac{\infty n}{\infty}\right) - \frac{\infty n}{\infty}}{1}$ $= \frac{(1 - n) + n}{1} = \frac{(1 + n) - n}{1}$ tam posito (o), quam (∞): scilicet idem coefficiens numericus, eadem fluentium divisio, quæ convenit (1). Male igitur quis crederet (ut vulgo fit) esse $\frac{n}{o} = \infty$, vel $\frac{n}{\infty} = o$, nisi prius cognoscat cujus naturæ debeat esse (n). In nostro enim casu $\frac{n}{o}$

$= \frac{0\,n}{0} = n$; $\frac{n}{\infty} = \frac{\infty\,n}{\infty} = n$: ac ideo vi ſyſtematis S. A $\frac{n}{0}$ nunquam poteſt eſſe ( $\infty$ ), bene vero ( $\infty$ ) quando $n = 0$; in ſecundo vi ſyſtematis S. Y $\frac{n}{\infty} = n$ poteſt eſſe zero, finita, & infinita quantitas. Igitur quando de linearibus quantitatibus agitur tam $\frac{0}{0}$, quam $\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1}$; hoc eſt tam ( $0$ ) quam ( $\infty$ ) intra naturam linearis quantitatis continetur, atque oſtendit iiſdem prorſus affectionibus tam lineam ( $0$ ), quam lineam ( $\infty$ ) ſubjici poſſe, atque ad utraque ſyſtemata revocari, quorum capax eſt ( 1 ) abſtracta, vel ( $g$ ) linearis finita. De hac fractione $\left(\frac{0}{0}\right)$ multa ſane ab Analyſtis & quidem celebrioribus dicta ſunt, ſed quia univerſim hanc ſine determinatione naturæ ſeu dimenſionis, neque ſyſtematis ( quibus ſine omnino & abſolute indeterminata eſt ) conſiderarunt, quicquid dixerunt, irritum ac fallax cenſendum eſt. De hac CAP. III ſuo loco fuſius agemus.

§. 31. Hiſce demonſtratis nullo negotio quivis protonumerus, ſeu quævis quantitas ( $g$ ) cujuſvis naturæ, etiam tranſcendentis ſive ( $0$ ), vel ( $\infty$ ) ad utrumque ſyſtema, opportuna formulæ diſpoſitione, poterit præparari: ſufficit enim ut data ( $g$ ) fiat $= g^{0+1} = g.\frac{g}{g} = g.\frac{1}{1} = g.\left\{\frac{(1-n)+n}{1}\right\}$ $= g.\left\{\frac{(1-(1-n))+(1-n)}{1}\right\}$ S. A $= g.\left\{\frac{(1+n)-n}{1}\right\}$ $= g.\left\{\frac{(1+(n-1))-(n-1)}{1}\right\}$ S. Y; & hoc modo dividitur ( $g$ ) univerſim in S. A in duas fluentes $\left(\frac{1-n}{1}\right).g = \left\{\frac{1-(-n)}{1}\right\}.g$; $\frac{n}{1}.g = \left(\frac{1-n}{1}\right).g$, quarum ſumma $= g$; in S. Y vero dividitur ( $g$ ) in haſce duas fluentes $\left(\frac{1+n}{1}\right).g = \left\{\frac{1+(n-1)}{1}\right\}.g$; $\frac{n}{1}.g = \frac{(n-1)}{1}.g$. In quibus formulis una tantum eſt quantitas geometrica totius ſyſtematis dominatrix ( $g$ ), quæ ſemper ut una & integra accipitur coefficiente numerico affecta ſimpliciſſimo $\frac{1}{1}$: cæteræ fluentes non ſunt

nisi

nisi partes ipsius coefficientis numerici $\frac{1}{1}$ applicatæ ipsi quantitati constanti ( $g$ ): ac proinde, cum hoc vere simplici artificio coefficientes numerici a protonumero semper segregentur, oculis ipsis patet veram originem fluentium non nisi a coefficiente numerico repetendam esse, manente in eodem systemate eodem protonumero. Quare quoniam in locum ( $g$ ) quivis numerus substitui potest, semper a coefficiente suo distinctus, quocumque signo, ac etiam illo ( 1 ) unitatis abstractæ symbolo exprimi poterit, ( ut supra diximus ); in casibus peculiaribus postea determinandus operatione peracta. Cura vero omnis, omnisque labor, atque industria collocanda est in varia coefficientium fluentium abstractorum natura, ordine, dispositione, prout res postulat, rite instituenda, a quibus omnibus & singulis tantum pendet tota hæc sublimis, & abstractissima Theoria. Tandem evincitur hujusmodi coefficientes numericos in utroque systemate fractiones esse in superioribus formulis eodem denominatore integro ( 1 ) simplicissimo affectas, qui tamen semper ut fractiones sumendi sunt: indicant enim numeratorem hujusce fluentis non posse repræsentare nisi unam ex illis partibus, in quas dividitur denominator ( 1 ): ex quo respectivo officio tam denominator quam numerator nomen sumpsit. Hujusmodi tamen fluentes fractiones sunt diversæ naturæ in unoquoque systemate, quemadmodum est diversa earum proprietas: cum in systemate S. A earum summa, earum differentia in systemate S. Y totam fractionem $\frac{1}{1}$ complere debeant. Hinc illæ dicentur homologæ, quarum numeratorum summa in systemate S. A, quarum numeratorum differentia in systemate S. Y ( 1 ) adæquat. Conferat quisque ( si lubet ) hujusmodi notiones tam claras atque distinctas, quæ in limine hujusce nostræ Theoriæ sponte sua manant, cum illis fallacibus, falsis, atque confusis principiis, quibus nititur Analysis communis, ut mirari desinat cur in hujusce Scientiæ progressu tot impervia, falsa, absurda identidem occurrant nullo, quod adhuc prostat remedio sananda: dum interim ego ad sequens exemplum numericum tradendum me confero.

§. 32. Sit linea A B integra protonumeri vicem gerens $= 17$, quæ ad utrumque systema sit præparanda: fiat $17 = 17^{0+1} = \frac{17}{17} \cdot 17 = \frac{1}{1} \cdot 17$;

$$\& \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(1-n)+n}{1}\right) \cdot 17 = \left(\frac{1-(1-m)+(1-m)}{1}\right) \cdot 17 \text{ S. A.} \\ \left(\frac{(1+n)-n}{1}\right) \cdot 17 = \left(\frac{1+(m-1)-(m-1)}{1}\right) \cdot 17 \text{ S. Y.} \end{array} \right\}$$

&

& vocatis M, N fluentibus homologis utriusque systematis, erit in systemate S.A

$$M+N=\left(\frac{1-n}{1}\right).17+\frac{n}{1}.17=\left(\frac{1-(1-m)}{1}\right).17+\left(\frac{1-m}{1}\right).17:$$

$$\text{in S.Y, } M-N=\left(\frac{1+n}{1}\right).17-\frac{n}{1}.17=\left(\frac{1+(m-1)}{1}\right).17-\left(\frac{m-1}{1}\right).17.$$

$$\text{Ergo in S.A}\begin{cases}M=\left(\frac{1-n}{1}\right).17=\left(\frac{1-(1-m)}{1}\right).17=AD\\ N=\left(\frac{n}{1}\right).17=\left(\frac{1-m}{1}\right).17=BD:\end{cases}$$

(*Fig.* 15.)

$$\text{in S.Y}\begin{cases}M=\left(\frac{1+n}{1}\right).17=\left(\frac{1+(m-1)}{1}\right).17=AD'\\ N=\left(\frac{n}{1}\right).17=\left(\frac{m-1}{1}\right).17=BD'\end{cases}$$

quæ sunt fluentes homologæ propriæ sui systematis. Ergo in systemate S.A summa $M+N=\frac{1}{1}.17$; differentia in S.Y, $M-N=\frac{1}{1}.17$. Verum si ponatur in utroque systemate $n=o=1-m$: erit tam in S.A, quam in S.Y, $M=\frac{1}{1}.17=\left\{\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right\}$, $N=\frac{o}{1}.17=\left\{\begin{matrix}B\\A\end{matrix}\right\}$; sed in S.A, M maxima, N minima; in S.Y ambæ minimæ: facta vero $n=1$, erit in S.A $1-m=1$, & $m=o$: in S.Y, $n=1=m-1$; & $m=2$: ergo in systemate S.A, $M=\frac{o}{1}.17=\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}$: $N=\frac{1}{1}.17=\left\{\begin{matrix}BA\\AB\end{matrix}\right\}$; & in S.Y, $M=\frac{2}{1}.17=\left\{\begin{matrix}AB+BD\\BA+Ad\end{matrix}\right\}$; $N=\frac{1}{1}.17=\left\{\begin{matrix}BD'\\Ad\end{matrix}\right\}$. Quare in systemate S.A quæ erat minima in primo casu, fit maxima $=17$, & quæ erat maxima, fit minima: at in S.Y ambæ sunt mediæ, & minor æquatur ma-

maximæ systematis S.A. Quare (17) non solum est summa, vel differentia fluentium homologarum, sed in S.A una aut altera fit (17) maxima: & in S.Y præter differentiam A D' − B D' = B $d$ − A $d$ = 17, est etiam B D' = A $d$ = 17, quæ in hoc casu differt positione minimæ M = A B = B A: cum sit in hoc casu $\left(\frac{m-1}{1}\right).17=\left(\frac{2-1}{1}\right).17$ una ex fluentibus ad hunc valorem arbitrio determinata, sitque natura sua vera fractio. Cæteri valores intra ($o$) & (17) in systemate S.A, licet numeris integris æquentur, ab alterutra tamen fluente exhibentur, atque fractiones sunt censendæ. Verum in systemate S.Y fractio major M intra limites 17, & ∞ . 17, & N intra limites ($o$), & ∞ . 17 continetur. Itaque si velimus in utroque systemate invenire ex. gr. (1), fac in systemate S.A $n=\frac{16}{17}$, vel $n=\frac{1}{17}$, & erit in primo casu M $=\frac{\left(1-\frac{16}{17}\right)}{1}.17$ $=\left(\frac{17-16}{17}\right).17$ = A D, & N $=\frac{16}{17}.17$ = B D: vel M $=\frac{\left(1-\frac{1}{17}\right)}{1}.17$ = A D; N $=\frac{1}{17}.17$ = B D. At in systemate S.Y non nisi minor N $=\frac{n}{1}.17=\left(\frac{m-1}{1}\right).17$ potest fieri (1), si ponas $n=\frac{1}{17}$, hoc est $m=1+\frac{1}{17}$, & erit N $=\frac{1}{17}.17$, cui respondet homologa major M $=\left(\frac{1+n}{1}\right).17$ $=\frac{\left(1+\frac{1}{17}\right)}{1}.17=\frac{18}{17}.17$. Ergo in utroque systemate unitas non potest esse numerus integer, sed est vera fractio orta in systemate S.A a coefficiente numerico $\frac{1}{17}$, qui est fractio unitate minor, ducto in protonumerum (17), & in systemate S.Y a coefficiente numerico $\frac{\frac{18-17}{17}}{1}=\frac{18-\frac{1}{17}}{1}$,

in

in quo $\frac{18}{17} = m$ est fractio unitate major ducta in eumdem protonumerum ( 17 ) . Sic velim dicas de aliis singulis numeris valoris integri excepto protonumero ( 17 ), qui tamen singuli sunt in hoc systemate protonumeri (17) veræ fractiones ejus naturæ , quam systema requirit . Itaque in posterum statuendum, quamcumque linearem quantitatem semper naturam fluentis induere, quotiescumque protonumerum non repræsentat, qui solum ut numerus integer censendus est ductus in coefficientem $\frac{1}{1}$ , summæ fluentium coefficientium in systemate S. A; differentiæ in systemate S. Y æqualem. Quare tam unitas, quam quivis alius numerus integer , vel fractus, nisi ut protonumerus systematis accipiatur, semper est una, vel altera fluens systematis ad eum valorem arbitrio determinata, qui intra limites assumpti systematis continetur. Contra vero quicumque numerus protonumeri munus fungens licet sit fractio , semper tamen unitatis vicem subit, cum semper integer & indivisus ducatur in coefficientem numericum vere fractum , & fluentem , qui indicat quot vicibus hæc unitas sumenda sit. Hinc superius hoc generali symbolo 1° hanc unitatem sive protonumerum designavimus, quod cum sit $= a^{\circ}$, sublato exponente zero, quemcumque numerum integrum vel fractum cujuscumque naturæ repræsentat.

§. 33. Quamobrem cum demonstratum sit quamcumque linearem quantitatem semper naturam *fluentis* induere quotiescumque protonumerum non repræsentat: jam originem & naturam *fluentium* statim affecuti fuimus . Cum enim in hoc casu hujusmodi quantitas sit una ex homologis, quæ simul additæ in systemate S. A, invicem subtractæ in systemate S. Y totum protonumerum exhauriunt; & cum eadem summa vel differentia in eodem systemate constanter perseveret , licet valores singularum fluentium homologarum infinitis modis mutentur, servata lege superius tradita; patet singulam ex homologis intra limites systematis propositi contentam per minimos gradus perpetuo successivo fluxu minimo ad maximum, vel viceversa ad minimum in eodem systemate augeri vel minui, proindeque vere fluentis naturam & nomen desumere. Verum cum singulæ hujusmodi fluentes eodem semper protonumero tamquam factore constanti afficiantur; ratio cur fluentes fiunt, non aliunde petenda est , quam a coefficiente numerico , qui solum successivo infinitesimo fluxu per omnes valores , intra limites systematis constitutos, excurrere potest. Cum vero in systemate S. A coefficientium summa, in S. Y eorum differentia sit semper æqualis unitati; diversa sit oportet natura, indoles, & forma hujusmodi singularum fluentium , prout diversum est systema , ad quod referuntur : & ita diversa , ut repugnet formam fluentium unius systematis cum fluentibus alterius systematis congruere posse, & unam pro altera usurpari, licet valore sæpe inter se æquentur. In systemate enim S. A singuli coefficientes numerici sunt fractiones unitate minores , cum simul unitatem æquare debeant; coefficiens vero systematis S. Y fluentis majoris sit semper

per major unitate; a qua proinde, ut remaneat unitas, detrahenda est fluens minor, quæ proinde æquatur fractioni majoris fluentis unitate subtracta. Quare cujuscumque valoris integri, fracti; reductione ultimo facta, se se offerat fluens alterutrius systematis, semper tamen ea forma illi tribuenda est, quam systema, ad quod pertinet, necessario requirit. Contra vero quæcumque fractio, si assumatur ut protonumerus systematis, semper tamen, cum constans & indivisa & singulis fluentibus sit communis, unitatem abstractam repræsentat.



# CAPUT III.

*De geometrica utriusque Systematis lineari descriptione.*

§. 1. Hæc Capitis superioris doctrina, qua origo *fluentium* & earum diversa natura pro diversitate systematis, ad quod pertinent, explicatur, ab intima rei, de qua agimus essentia atque quantitatis natura ita pendet, ut nullus arbitrio locus relinquatur. Nam nemo non videt, nullum alium superesse modum dividendi ( 1 ) in duas partes, quin ejus valor mutetur, nisi ut simul addatur atque subtrahatur ab ipsa unitate idem numerus, quem diximus ( $n$ ), qui, cujuscumque valoris sit, a zero usque ad infinitum excurrens, numquam unitatis valorem turbabit: est enim semper $\frac{1}{1} = \frac{1 - on}{1} = \frac{(1 - n) + n}{1}$. In qua formula si ( $n$ ) sit minor unitate oriri systema S A; si major, systema S Y necessario constitui superiori Cap: §. 15. demonstravimus. Verum ut intimius assequamur necessitatem absolutam duorum superioris Capitis systematum, mutuamque inter se communionem, nec non fluentium originem, diversamque harum naturam prout diversum est systema, cui applicantur; altius res est repetenda, ad primum scilicet usque fundamentum, quo nititur hæc nostra Theoria: quod illud est, ut nempe quæcumque lineares æquationes duabus necessario fluentibus constent, quarum summa vel differentia basim linearem integram adæquat, ac propterea hujusmodi fluentes a diverso originis puncto fixo, ab alterutra scilicet basis datæ extremitate prorumpant necesse est. Hinc cum hujusmodi extrema puncta semper arbitrio relinquantur, prima & indefinita linearis dimensionis notio a linea recta X Z ( Tab. 5. *Fig.* 16. ) prius mente concepta, hinc inde usque ad infinitum progrediente, ac nullis punctis datis definita, nec ullo præcipuo puncto dato distincta exhibetur, ut ex hac cujuscumque magnitudinis basis abscindi possit: quæ præexistens X Z ideam illius *infiniti absoluti* linearis, ( ut diximus LIB. I. Cap: IV. P$^{e}$ I$^{a}$. §. 18. & seq. ) menti offert hinc inde infinities excurrentis, quin ullus reperiatur terminus absolutus, in quem necessario desinat. Si igitur in hac absoluta infinitate, ubi lubet, duo puncta A, C dato intervallo dissita concipiantur, sive abscindatur A C datæ longitudinis cujuscumque, erit A C inter duo extrema data ac fixa puncta A, C constituta illa una data, ad quam tamquam communem mensuram cæteræ referantur oportet, quo nomine protonumerum appellavimus.

§. 2. Profluat nunc punctum C versus Z ( idem dicas de A versus X ), & pro-

progressum in B dabit CB fluentem in principio motus minorem A C, quæ C B nullo alio modo determinari potest nisi respectu A C jam arbitrio primum definitæ, estque CB portio aliqua indefinita illius A C, quæ una dati valoris est. Animadvertendum tamen CB ab originis puncto C fixo prorumpentem totam fluere extra A C versus Z, quæ C B ulterius progrediens semper indeterminata manebit, donec ad punctum D perventa eodem intervallo dissitum a C, quo A est ab ipso C, fit æqualis protonumero A C, & C B fit C D = A C: æqualis quidem, sed non identica cum A C, quæ (ut dixi) donec indivisa concipitur, est una communis mensura, ad quam cæteræ fluentes referri debent. Ergo C B vere & proprie est portio fluens ipsius C D = A C, (non ipsius A C constantis) quæ licet ad valorem C D = A C datum perveniat, semper tamen fluentis naturam conservat, cum semper in continuo fluxu censenda sit.

Vocetur itaque C B = $n$ C D, eritque $\frac{1}{1} \cdot AC = \frac{(AC+CB)-CB}{1}$
$= \frac{(AC+nCD)-nCD}{1}$
$= \left\{\frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{nCD}{AC}\right)-\frac{nCD}{AC}}{1}\right\} \cdot AC = \left\{\frac{(1+n)-n}{1}\right\} \cdot AC$
$= \left(\frac{m-n}{1}\right) AC = M - N$, & M major fluens $= \frac{1}{1} \cdot AC$
$+ \frac{nCD}{1} = \left\{\frac{\frac{AC}{AC}+\frac{nCD}{AC}}{1}\right\} \cdot AC = \left(\frac{1+n}{1}\right) \cdot AC = \frac{m}{1} \cdot AC$:

& N minor $= CB = nCD = \frac{\frac{nCD}{AC}}{1} \cdot AC = \frac{n}{1} \cdot AC$, quarum

differentia vere æquatur identicæ A C, cum $\frac{nCD - nCD}{1}$ fit revera zero (identica enim subtracta ab identica vere fit zero): & major M incipiens a puncto originis A fit minima $= \left(\frac{\frac{AC}{AC}+\frac{oCD}{AC}}{1}\right) AC = AC + C$,

quando minor fluens $N = \frac{n}{1} \cdot \frac{CD}{AC} \cdot AC = \frac{n}{1} \cdot CD$ fit minima

$\frac{0}{1} \cdot CD = C$ puncto originis ipsius N versus eamdem partem *Z* profluenti.

Facta vero $M = \frac{AC+CD}{1} = \frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{CD}{AC}\right)}{1} AC$, patet CB fluentem ad valorem $CD = AC$ fluxu suo perventam: ergo vere, licet facta æqualis AC, fluens est, intacta & indivisa manente AC. Erit igitur $M = \frac{AC+CD}{1} = \frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{CD}{AC}\right)}{1} AC = \left(\frac{1+1'}{1}\right) AC$

(1' lineola suffixa indicat fluentem (*n*) ad valorem (1) perventam): & $N = \frac{CB}{1} = \frac{nCD}{1} = \frac{nCD}{AC}.AC = \frac{1'}{1}.AC = CD$, & sic procedendo fluxus toties determinatur, quoties (*n*) fluendo ad valorem (1) iterum pervenit, quo modo determinantur etiam puncta D, E, ....... F, G &c usque ad infinitum. Quare erit $M = \frac{AC+CD+DE\ldots\ldots+FB'''}{1} = \frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{CD}{AC}+\frac{DE}{AC}\ldots\ldots+\frac{nFG}{AC}\right)}{1}.AC$ in qua, excepta AC, cæteræ CD, DE, .... FG fluentes sunt, estque $M = \left(\frac{1+1'+1''\ldots\ldots+n}{1}\right) AC$: singulis (1') diversis, & prima tantum (1) manente constanti; quibus indicatur prima AC tantum constans; cæteræ (1'), (1') &c fluentes & diversæ: facta $\frac{n}{1} = \frac{0}{1} = \frac{0+n}{1} = \frac{1'+n}{1} = \frac{1'+1'\ldots+n}{1}$, ut sit $\left(\frac{1+1'+1'\ldots+n}{1}\right)AC = \frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{CD}{AC}+\frac{DE}{AC}\ldots+\frac{FG}{AC}\right)}{1}.AC$: posita $FB''' = \frac{n}{1}.\frac{FG}{AC}.AC$. Minor vero fluens N erit $= \frac{\left(\frac{CD}{AC}+\frac{DE}{AC}\ldots+\frac{nFG}{AC}\right)}{1}.AC = \left(\frac{1'+1'\ldots\ldots+n}{1}\right).AC$, in qua nulla constans reperitur, ideoque successive minuendo usque ad zero deprimi potest, quemadmodum successiva

1'+1'

$\frac{1'+1'+1'}{1}$ . . . . . . progressione usque ad infinitum elevari. Differentia vero $M - N = \left(\frac{AC + CD + DE \ldots + n\,FG}{1}\right) - \left(\frac{CD + DE \ldots + n\,FG}{1}\right) = \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} \ldots + \frac{n\,FG}{AC}\right)}{1} . AC - \left(\frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} \ldots + \frac{n\,FG}{AC}\right) . AC = \left(\frac{1 + 1' + 1' \ldots + n}{1}\right) . AC - \left(\frac{1' + 1' \ldots + n}{1}\right) . AC = \frac{1}{1} . AC$ subtractis identicis; & M majoris coefficiens intra limites ( 1 ) minimum & ( $\infty$ ) maximum; coefficiens vero N minoris intra limites ( $o$ ) minimum, & ( $\infty$ ) maximum: ita ut in limite minimo $M - N = \frac{1}{1} AC - \frac{oAC}{1} = AC - C$, cum sit $\frac{oAC}{1} = \frac{oCD}{1} = C$: in limite maximo $M - N = \left(\frac{1 + \infty}{1}\right) AC - \frac{\infty}{1} . AC = \left(\frac{1 + \infty - \infty}{1}\right) . AC = \frac{1}{1} . AC = AC$, & in casibus mediis $M - N = \left(\frac{1 + 1' + 1' \ldots + n}{1}\right) . AC - \left(\frac{1' + 1' \ldots + n}{1}\right) . AC = AC$. Quo facto, non solum valor fluentium, sed etiam earum positio ac protonumerus determinatur, & diversa utriusque fluentis M; N origo & natura; nec non situs & ordo fluentium partialium coefficientis ( $n$ ), quæ sibi invicem succedentes ad valorem $\left(\frac{1' + 1' \ldots + n}{1}\right)$ AC pervenerunt. Ac denique demonstratum ex ipsa formulæ conformatione, qua protonumerus a coefficiente disjungitur, fluentium caussam, & originem in coefficiente tantum numerico inesse. Hæc vero superior formula ex diversa ratione, qua tractari & conformari potest, novas & quidem maximi momenti veritates exhibet, quas diligentius pro re nata persequemur, postquam hic ejus utilitatem & necessitatem demonstraverimus. Necesse est enim in re nova a communi opinione prorsus remota, ac difficultatibus undique circumsepta ejus notionem sensim in animos legentium inferre, ut facilius ad penitiora intelligenda atque amplectenda se præstent.

§. 3. Nunc antequam progrediar, in fluentem numericam $\frac{n}{1}$ superioris §. di-

ligenter est inquirendum. Ac primum adverto fractionem hanc $\frac{n}{1}$ denominatore ( 1 ) affectam constanti, & numeratore ( $n$ ) fluente determinare tantum puncta C, D, E . . . . F, G, & sic successive ad infinitum, intervallo A C dato semper inter se dissita, hoc est, CD; CD + DE; CD + DE . . . + FG &c; non vero C B; C B' = C D + D B'; CB'' = CD + DE + E B' &c.; nisi ( $n$ ) sit fractio $= \frac{n}{g}$, & $\frac{n}{1} = \frac{\frac{n}{g}}{1}$, ut facile est videre. Cum enim in fractione $\left(\frac{n}{1}\right)$, posito $n = o$ in principio motus fluxus sit nullus, crescens vero fluxus, antequam ( $n$ ) ad unitatem perveniat, ( in quo casu fit $\frac{n}{1} = \frac{1'}{1} = 1'$ ) sit unitate minor; erit $\frac{n}{1}$ in hoc casu fractio infinitimode indeterminata constans tam numeratore, quam denominatore indeterminato: quæ ut aliquo modo determinetur quin impediatur fluxus, determinetur oportet ad libitum denominator, ut sit $n = \frac{n}{g}$, ( numeratore fluente, denominatore ( $g$ ) constanti ), fiatque $\frac{n}{1} = \frac{\frac{n}{g}}{1}$. Sed $\frac{\frac{n}{g}}{1} = \frac{n}{g}$: ergo idem est sumere ( 1 ) vicibus $\frac{n}{g}$, quam dividere ( 1 ) in partes ( $g$ ) quascumque datas, atque ex hisce partibus tot inde excipere, quot unitates continentur in numero integro ( $n$ ); qui in punctis a serie numerorum naturalium exhibitis o, 1, 2, 3 . . . . $g$, $g + 1$, $g + 2$, . . . . $2g$, $2g + 1$ . . . 3 $g$ &c usque ad infinitum progrediens determinatur. Si enim poneretur in fractione $\frac{n}{g}$ numerator ( $n$ ) iterum fractus $= \frac{n}{h}$, erit $\frac{n}{g} = \frac{\frac{n}{h}}{g} = \frac{n}{gh}$, quæ fractio numeratore ( $n$ ) integro, & $gh$ denominatore item integro constat. Verum denominator $gh$ supponit unitatem divisam in partes datas numero $gh$ a primis longe diversas, quas totidem excipit numerator integer ( $n$ ), quot unitatibus hic constat. Sed ( $n$ ) est fluens usque ad infinitum; ergo $\frac{n}{g\,h}$ intra limites o, 1, 2, 3, . . . $g$ . . . . $g\,h$, $g\,h + 1$, $g\,h + 2$, $2\,g\,h$, $2\,g\,h + 1$, . . . . . usque ad infinitum determinatur. Igitur cuicumque

que fractioni ponatur ( $n$ ) æqualis in formula $\frac{n}{1}$, semper hæc reducitur ad fractionem numeratoris & denominatoris integri, in qua fluente numeratore ($n$) per seriem numerorum naturalium, denominator constans ex. gr. $gh$ indicat in quot partes divisa intelligatur unitas, ut hujusmodi partes a fluente numeratore ( $n$ ) integro determinentur: qui ad numerum $gh$ perventus totam unitatem exhaurit; atque inde nova instauratur series æqualis primæ huic addenda. Ita in nostro casu

$$\frac{n}{g} = \frac{0}{g}, \frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \frac{3}{g} \ldots\ldots \frac{g}{g}, \frac{g}{g} + \frac{1}{g}, \frac{g}{g} + \frac{2}{g}, \ldots\ldots \frac{2g}{g} + \frac{1}{g}, \frac{2g}{g} + \frac{2}{g}, \ldots\ldots \text{usque ad infinitum.}$$

$$\frac{n}{gh} = \frac{0}{gh}, \frac{1}{gh}, \frac{2}{gh}, \frac{3}{gh} \ldots\ldots \frac{g}{gh}, \frac{g+1}{gh}, \frac{g+2}{gh}, \ldots\ldots \frac{gh}{gh}, \frac{gh}{gh} + \frac{1}{gh}, \ldots\ldots \frac{2gh}{gh} + \frac{1}{gh}, \ldots\ldots \text{usque ad infinitum.}$$

Igitur manente eodem denominatore fluxus numeratoris ( $n$ ) non determinatur nisi sit ( $n$ ) unus ex numeris integris seriei 0, 1, 2, 3,..... numerorum naturalium: sed minor erit pars intercepta unitatis quæ innotescit, quo major erit denominator, posito in utraque fractione eodem numeratore ( $n$ ): ita ut quando prima facta $\frac{g}{g}$ totam unitatem exhaurierit, secunda $\frac{n}{gh} = \frac{g}{gh}$, non nisi $\frac{1}{h}$ adæquaverit, sitque prima ad secundam, ut $h : 1$. Nisi igitur ponatur determinatus valor denominatoris, nequit haberi divisio unitatis, neque consequenter quam partem & quotam intercipiat numerator ( $n$ ) fluendo a zero usque ad infinitum. Itaque numeratori ( $n$ ) cujuscumque denominatoris determinati & constantis applicanda est successive tota series numerorum naturalium, ut cognita per denominatorem divisione unitatis, habeatur successive valor fluxionis, atque ejus situs usque ad infinitum, qui respondeat denominatori ad libitum sumpto: quo mutato mutatur fluxus, licet eadem sit series numeratoris ( $n$ ) a zero usque ad infinitum excurrentis. Quare universim ponenda est fluens $\frac{n}{1} = \frac{n}{\frac{g}{1}} = \frac{n}{g}$ denominatoris ( $g$ ) cujuscumque valoris, sed determinati: si enim ($g$) esset indeterminatus, reliqui termini omnes fluentes essent indeterminati, & ipsa unitatis divisio; nisi prius determinetur denominator ( $g$ ): cujus determinatio cum pendeat a nostro arbitrio, a nostro arbitrio pendet etiam divisio unitatis abstractæ, atque etiam fluxus determinatio: quo artificio

ficio manente eadem unitatis divisione ope denominatoris constantis, fluxus tamen non tollitur.

§. 4. Necesse igitur est, ut denominator ( 1 ) coefficientis abstracti $\frac{n}{1}$ dividatur in partes numero ( $g$ ) ad libitum quidem sed definito, ut fluens a puncto C ( *Fig.* 17 ) prorumpens possit etiam determinari in punctis intermediis quibuscumque a denominatore ( $g$ ) indicatis intra puncta C & D; D & E &c. constitutis, sitque $\frac{\frac{n}{g} \cdot \frac{CD}{AC}}{1} \cdot AC = \frac{n}{g} \cdot CD = \frac{n}{1} \cdot \frac{CD}{g}$, in qua posito ( $g$ ) dato dividitur C D = A C in tot partes, quot unitates continentur in ( $g$ ): atque ideo continuus ac nunquam interrumptus fluxus fluentis ( $n$ ) tunc omnimode tantum determinatur in punctis intermediis C D, D E, &c. quando ( $n$ ) fit $o$, 1, 2, 3, 4, ..... $g$, $g+1$, $g+2$, &c. Posito enim $n = o$, erit $\frac{n}{g} \cdot \frac{CD}{1} = \frac{o}{1} \cdot \frac{CD}{g} = \frac{C}{g} = C$; posito $n = 1$, fit $\frac{n}{1} \cdot \frac{CD}{g} = \frac{1}{1} \cdot \frac{CD}{g} = CB$, & sic successive $\frac{2}{1} \cdot \frac{CD}{g} = Cb = CB + Bb$, donec facto $n = g$, fiat $\frac{n}{1} \cdot \frac{CD}{g} = \frac{g}{1} \cdot \frac{CD}{g} = \frac{g}{g} \cdot CD = 1 \cdot CD = CD$. Cum vero idem sit $\frac{n}{1} \cdot \frac{CD}{g}$ ac $\frac{\frac{n}{g}}{1} \cdot CD = \frac{n}{g} \cdot CD$: hoc est idem sit dividere C D in partes datas ( $g$ ), ac ducere in $\frac{n}{1}$, & dividere in easdem partes ( $g$ ) unitatem abstractam denominatoris coefficientis numerici abstracti $\frac{n}{1}$, ut fit $\frac{n}{g}$, postea applicandus lineæ C D æquali protonumero A C, ut oriatur $\frac{n}{g} \cdot CD = \frac{n}{1} \cdot \frac{CD}{g}$; manifeste patet cur artificia omnia analytica in sola unitatis abstractæ divisione, compositione, verbo modificatione versari debeant; cum ab hujus unius unitatis conformatione pendeat diversa natura systematum abstracte sumptorum; diversa natura fluentium; quorum tantum species applicatione

tione coefficientis abstracti ad protonumerum quemcumque determinatur: ut mea ordine vestigia sequentibus in progressu semper magis patebit. Hoc uno simplicissimo quidem, universali atque elegantissimo artificio impedimenta omnia, atque falsæ fallaces consecutiones, in quas identidem offendit Methodus nota perfunctorie agendo omnia prorsus de medio tolluntur: cum nunquam errore systematis vel directionis ac positionis, ignorata natura & specie fluentium, neque in negativum æquale positivo, neque in absurdas systematis species mea Theoria hisce suffulta principiis incidere possit.

§. 5. Hisce bene perpensis ac memoriæ consignatis, si in generali fractione numerica $\frac{n}{g}$ denominatoris ( $g$ ) ad libitum dati, numeratoris ( $n$ ) fluentis, ponatur $g = 1$, erit $\frac{n}{1}$ fractio, cujus denominator ( 1 ) docet unitatem abstractam sumendam esse indivisam, atque ideo ($n$) a zero successivo continuo incremento non determinari nisi in punctis a serie numerorum naturalium $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ usque ad infinitum indicatis: ita ut series ordinata, in qua æquali intervallo ( 1 ) fluens ( $n$ ) determinatur, fit $\frac{n}{1} = \frac{0}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \ldots\ldots$ usque ad infinitum, quæ applicata protonumero A C dabit $\dfrac{n \cdot \frac{AC}{AC} \cdot AC}{1} = \dfrac{\left(\frac{0AC}{AC} + \frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} \ldots\right) \cdot AC}{1}$

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} \ldots\ldots\right) \cdot AC}{1} = AZ$$ posita infinita. Hoc vero modo non determinantur nisi puncta A, C, D, E, F.... quibus tota A Z dividitur in partes infinitas, quarum singula æquatur quidem A C, sed una alteri ordinatim succedit: fluxus vero medii inter hæc puncta data nequeunt hac divisione determinari, ut innotescere possit C B, D B′, E B″ &c.

Ut igitur hoc etiam consequamur, fiat $\dfrac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} \ldots\right) \cdot AC}{1}$

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CZ}{AC}\right) AC}{1} = \frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right) AC}{1}$$



=

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \ldots + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \ldots + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \ldots\right) . AC}{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CB}{AC} + \frac{Bb}{AC} + \frac{bb'}{AC} \ldots + \frac{DB'}{AC} \ldots + \ldots + \frac{EB''}{AC} \ldots\right) AC}{1}$$

in quo casu A C est indivisa utpote orta a fluente $\frac{n}{1}$ posita $n = 1$ : sed C D dividitur in tot partes æquales singulas $\frac{1}{g}$ . C D, quot unitates continentur in denominatore ($g$); quæ partes sibi invicem ordinate succedunt, & in quas successive dividuntur reliquæ D E, E F, F G &c., quot vicibus series $\frac{o}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \ldots = \frac{g}{g}$ repetitur, quibus si addatur pars intermedia $\frac{1}{g} + \frac{1}{g}$ &c. quæ immediate consequitur ultimum æqualem A C, habetur quæcumque finita $AC + CB''' = AC + CD + DE \ldots\ldots + EF + FB'''$

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} \ldots + \frac{EF}{AC} + \frac{FB'''}{AC}\right) . AC}{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} \ldots + \frac{EF}{AC} + \frac{n}{g}\frac{FG}{AC}\right) . AC}{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{1} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} \ldots \frac{g}{g} + \frac{n}{g}\right) AC}{1}$$ cum $\frac{n}{g}$ F G

nequeat esse nisi una, aut plures ex partibus aliquotis $\frac{1}{g}$, in quas dividitur F G, quæ determinatur si loco ($n$) ponatur unus ex valoribus seriei $o, 1, 2, 3 \ldots g$ usque ad $g$: in quo ultimo casu fit integra $FG = AC$. Donec igitur idem denominator ($g$) perseverat, præter integras CD, DE, &c. singulas æquales A C, nequeunt haberi nisi tot partes $\left(\frac{1}{g}\right)$, quot unitates continet numerator ($n$). Sed nullo negotio partes submultiplæ ipsius $\frac{n}{g}$

obti-

obtinentur, si facias $\frac{n}{g} = \frac{n}{\frac{h}{g}} = \frac{n}{gh}$, in quo casu ( $n$ ) continetur intra limites $o$, $1$, $2$, $3$ . . . usque ad $gh$, & $\frac{n}{gh} = \frac{gh}{gh} = 1$ : & $\frac{gh}{gh}$ . F G = F G = A C : multiplæ vero, facto $n = h$; ut fit $\frac{n}{gh} = \frac{h}{gh} = \frac{1}{g}$, quæ fluendo convertitur in $\frac{n}{g}$. Vel data $\frac{n}{g}$ fiat $n = g$, ut fit $\frac{n}{g} = \frac{g}{g}$; sed $\frac{g}{g} = \frac{h}{h}$ : ergo posita ( $h$ ) numeratoris fluente, transitus fit ad fractionem $\frac{n}{h}$; in qua si ( $h$ ) est minor ( $g$ ), $\frac{1}{h}$ est multipla ipsius $\frac{1}{g}$; si vero ( $h$ ) est major ( $g$ ), $\frac{1}{h}$ est submultipla ejusdem $\frac{1}{g}$. Hoc tamen modo conformata formula coefficiens numericus minimus est $\frac{1}{1}$; maximus $\frac{1+\infty}{1}$, cum fit:

$$\frac{n}{1} AC = \frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right) AC}{1} = \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{n}{g} \cdot \frac{CD}{AC}\right) AC}{1}$$

$= AC + \frac{n}{g} CD = AC + \frac{o}{g} CD = AC$ in limite minimo, $= AC + \frac{\infty}{g} CD$ in limite maximo; cum A C indivisa supponatur, utpote protonumerus unitatem indivisam repræsentans. Ergo formula M

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{n}{g} \frac{CD}{AC}\right) AC}{1} = \frac{AC + \frac{n}{g} CD}{1}$$

ræpresentat M fluentem majorem, quæ intra limites A C, & $\frac{\infty}{g}$ C D continetur ope coef-

 ficien-

ficientis $\frac{1+\frac{n}{g}}{1} = \frac{1}{1} + \frac{n}{g} = 1 + \frac{n}{g}$ æqualis scilicet unitati abstractæ ( 1 ) constanti, ac fluenti $\frac{n}{g}$, in qua ( $n$ ) a zero usque ad in finitum nullis terminis circumscriptum continuo fluxu progreditur.

§. 6. Ad obtinendam vero minorem fluentem N, satis est coefficientem numericum $\frac{1+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}}{1}$ .... &c. ad eumdem denominatorem reducere, ut fit $\frac{\frac{g}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}}{1}$ ......, qui statim evolvitur in $\frac{\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots\right)+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}}{1}$ ........ qua evolutione ostenditur ( 1 ) primitivam, quæ naturam constantis in primo casu induebat, hac facta reductione fieri fluentem usque ad zero, totamque formulam in unum collectam esse $= \frac{\frac{n}{g}}{1}$, fluente ( $n$ ) a zero usque ad infinitum: ideoque peracta hac reductione, qui erat coefficiens majoris fluentis in coefficientem fluentis minoris transmutari. Male igitur te gesseris in hoc negotio, si ea, quam semper adhibet Methodus nota, reductione ad eumdem denominatorem utaris, dum quæris coefficientem majoris: hoc enim pacto semper ad coefficientem fluentis minoris, cujus minimus valor est zero, inscius te contuleris; licet hac nova ratione efferendi formulam nulla in ejus natura immutatio facta videatur. Ut vero coefficiens hic $\frac{\frac{n}{g}}{1}$ rite applicetur quantitati ad obtinendam fluentem minorem N, ita evolvendus est hic coefficiens, ut sit

$$\frac{\frac{n}{g}}{1} = \frac{\frac{0}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots}{1}$$

=

$$= \frac{\frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} \ldots + \frac{n}{g}}{1}; \ \& \ N = \frac{\frac{n}{g}}{1} \cdot AC$$

$$= \left( \frac{g}{g} \cdot \frac{CD}{AC} + \frac{g}{g} \frac{DE}{AC} + \frac{g}{g} \frac{EF}{AC} \ldots + \frac{n}{g} \frac{FG}{AC} \right) \cdot AC$$

$$= CD + DE + EF \ldots + \frac{n}{g} FG = CD + DE + EF \ldots + FB''$$

$= CB''$ fluens minor, quæ a puncto C usque ad infinitum producitur: &, quod caput est, determinatur situs diversus, in quo fluentes homologæ initium sumunt, & in quem desinunt; & identicæ a diversis distinguuntur; ne differentia cum additione, & viceversa fallaci signi ( $\pm$ ) criterio confundatur. Hac enim formulæ superioris conformatione oculis ipsis patet fluentem minorem suum originis punctum in C figere, in quo $CD = AC$ dividitur in partes ( $g$ ), ac totam fieri identicam cum ea portione fluentis majoris, quæ vere fluit, quando fluens major a puncto A ( per indivisam AC remoto a puncto C originis fluentis minoris ) originem ducens non habet cum fluente minori lineam AC communem, qua possit vere obtineri earum differentia zero. Ipsa vero fluens major antequam limites ipsius AC prætergrediatur, non potest determinari nisi in punctis A, C, cum sit $M = \frac{\left( 1 + \frac{n}{g} \right)}{1} \cdot AC$

$$= \frac{\left( \frac{AC}{AC} + \frac{n}{g} \frac{CD}{AC} \right)}{1} \cdot AC,$$ in qua facta $n = o$ fit $M$

$$= \frac{\frac{AC}{AC}}{1} \cdot AC = \frac{\left( \frac{o\,AC}{AC} + \frac{AC}{AC} \right)}{1} \cdot AC = A + AC$$

$= AC$, qua determinatur punctum originis A & ejus extremum C. Hinc fit ut differentia $M - N = \frac{\left( \frac{m}{g} - \frac{n}{g} \right)}{1} \cdot AC = \frac{\left( 1 + \frac{n}{g} \right)}{1} \cdot AC$

$$- \frac{\frac{n}{g}}{1} \cdot AC = \frac{\left( \frac{AC}{AC} + \frac{n}{g} \frac{CD}{AC} \right)}{1} \cdot AC - \frac{\left( \frac{n}{g} \frac{CD}{AC} \right)}{1} \cdot AC$$

=

$$=\frac{\left(AC+\frac{n}{g}CD\right)}{1}-\frac{\frac{n}{g}CD}{1} \text{ sit semper constans } = \frac{1}{1}.AC = AC.$$

§. 7. Ex hisce principiis deducitur certa ac manifesta demonstratio duplicis transitus ad finitum, per zero scilicet & per infinitum absolutum, quæ in I[a]. P[e]. nomine quantitatum *transcendentium* designavimus. Nam in primo casu posita $\frac{\frac{n}{g}}{1}.AC = \frac{\frac{n}{g}.\frac{CD}{AC}}{1}.AC = \frac{\frac{n}{g}}{1}.CD$, facta $n = o$, habetur punctum fixum C tamquam principium quantitatis: at fluente puncto C versus Z, & manente eodem denominatore ( $g$ ), non prius determinatur ejus fluxus, nisi determinetur ( $n$ ) ad valorem ( 1 ), ut sit ejus primus fluxus, qui determinari potest, $= \frac{\frac{1}{g}.\frac{CD}{AC}}{1}.AC = \frac{1}{g}.CD = CB$. Sic vero procedens fluxus fit $\frac{\left(\frac{n}{g}.\frac{CD}{AC}\right)}{1}AC =$

$$\left[\frac{\left(\frac{o}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots+\frac{o}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots+\frac{o}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots\&c\right)}{1}.\frac{CD}{AC}\right].AC$$

$$= \frac{\left(\frac{g}{g}.\frac{CD}{AC}+\frac{g}{g}.\frac{DE}{AC}\ldots+\frac{g}{g}.\frac{EF}{AC}+\frac{n}{g}.\frac{FG}{AC}\right)}{1}.AC =$$

$CD + DE \ldots\ldots + EF + FB'''$: in qua certe quidem antecedentes termini $\frac{g}{g}+\frac{g}{g}+\&c$, quocumque numero sint, nullum afferre possunt impedimentum ad novam sequentem seriem $\frac{o}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\ldots\ldots$ instituendam: quæ enim sequitur nullam habet cum antecedentibus necessariam connexionem, ut nequeat vi antecedentium ulterius produci. Licet igitur quocumque ordine infinitorum numerus antecedentium $\frac{g}{g}$, $\frac{g}{g}$ &c ponatur, semper erit possibilis, perinde ac si nulla esset $\frac{g}{g}$ præposita, sequens series $\frac{o}{g}+\frac{1}{g}+\frac{1}{g}+\&c$ æquali, si lubet, numero terminorum prioribus conflata, vel

etiam

etiam inæquali, prout idem sit denominator ($g$), vel diversus in fluente $\frac{n}{g}$, vel $\frac{n}{gb}$. En igitur demonstrata necessitas illius infiniti nullis termini circumscripti a zero tamquam principio generationis quantitatis per quantitates finitas progrediente geniti, quod nos *infinitum absolutum* appellavimus. Porro si in unum hujusmodi inexhausta terminorum series collecta concipiatur, erit

$$\frac{\left(\frac{n}{g} \cdot \frac{CD}{AC}\right)}{1} AC = \frac{\frac{o}{g} CD + \frac{\infty g}{g} CD}{1} = \frac{\infty}{1} \cdot (C + CD)$$

$$= \frac{\infty}{1} CD = CZ$$ infinitæ: qua formula supponitur primum mente existens hoc infinitum absolutum, ex quo facilis est usque ad zero C descensus. Formulæ enim hujusce $\frac{\frac{n}{g}}{1} \cdot CD$ ope inverso ordine, sed eadem facultate qua a zero per *quantum* continuo successivo augmento transitus fuerat ad infinitum, eadem, inquam, ab infinito continua successiva diminutione *quanti* ad punctum tandem C sive ad zero devenitur. Quod si primus seriei terminus ponatur $\frac{1}{1}$, tunc $M = \frac{\left(\frac{n}{g} \cdot \frac{AC}{AC}\right)}{1} \cdot AC = \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{o}{g}\frac{CD}{AC}\right)}{1} \cdot AC$

$$= \frac{\left(1 + \frac{o}{g}\right)}{1} \cdot AC$$ in limite minimo; a quo, methodo superiori successive ad $\frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{\infty}{g}\frac{CD}{AC}\right)}{1} \cdot AC = AC + CZ$ infinitum absolutum maximum: & ab hoc maximo iterum inverso ordine ad minimum $\frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{o\,CD}{AC}\right)}{1} \cdot AC = AC$ restituitur. Ex hac vero duplici a minimo ad maximum, & a maximo ad minimum via, qua ad quantitates medias sive finitas transitus æque fieri potest; patet (quod sæpe in P. I Cap. I & alibi inculcavimus) illud quod dicitur infinitum absolutum esse in eo genere quantitatis transcendentis, in quo diximus esse zero: ideoque uno sublato, aut tam-

tamquam absurdo repudiato, alterum repudietur oportet. Verum si data $M = \frac{1}{1} . AC$ ad zero devenire velis, ut sit $M = \frac{1'}{1} . AC = \frac{n}{1} . AC$

$= \frac{o}{1} . AC = A$; animadvertas velim in nostro systemate SY eam conditionem necessario requiri, ut differentia fluentium sit semper constans $= CA$, sive ut differentia coefficientium, quibus afficiuntur singillatim fluentes, sit constans $= 1$. Quare necessario consequitur formulam fluentis homologæ N, facta M minima zero æquali, fieri nunc $N = \frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right)}{1} . CA =$

$\frac{\left(\frac{CA}{CA} + \frac{n}{g}\frac{Ad}{CA}\right)}{1} CA = CA + \frac{n}{g} Ad$; &

$M = \frac{n}{g} . Ad = \left(\frac{n}{g} . \frac{Ad}{CA}\right) CA$, earumque differentia $N - M$

$= \frac{\left(\frac{CA}{CA} + \frac{n}{g} \frac{Ad}{CA}\right) . CA - \left(\frac{n}{g} \frac{Ad}{CA}\right) . CA}{1} = CA$: qua facta permutatione majoris fluentis in minorem, & minoris in majorem transitus fit ad oppositam plagam: manente utraque, ut antea, signo affecta positivo, licet utriusque fluxus in opposita directione procedat.

§. 8. Ut id vero pleniori in luce collocetur, videamusque quo modo eadem facilitate qua a zero ad infinitum fit ascensus, eadem ab hoc ad zero fieri possit descensus; revocetur primum fundamentum, quo niti diximus systema hoc SY, quo monemur unitati abstractæ coefficientis addendam primum esse, deinde detrahendam quantitatem quamcumque numericam a zero usque ad infinitum, ut eadem semper differentia constans (1) perseveret. Hoc posito sumatur differentia fluentium, quæ a diversis punctis originis datis A, C prorumpentes desinunt in punctum commune fluens arbitrio tantum definiendum: quæ differentia erit ex dictis $M - N = \frac{\left(\frac{m}{g} - \frac{n}{g}\right)}{1} . AC$

$= \left[\frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}}{1}\right] . AC$, quæ evoluta exhibet successivas illas fluxiones. quæ in fluxu continuo ope denominatoris ($g$) determinantur, scilicet (*Fig.* 18.)

M—N

$$M - N = \left\{ 1 + \left( \frac{\frac{o}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \dots + \frac{\infty}{g}}{1} \right) \right\} . AC$$

$$- \left( \frac{\frac{o}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \dots + \frac{\infty}{g}}{1} \right) . AC,$$

quarum nulla pars actu usque ad infinitum evolvi potest: remanet enim semper pars infinita $\frac{\infty}{g}$ A C evolvenda, cum hoc infinitum, quod intelligimus absolutum ex parte Z nullo necessario termino concludatur. Verum cum in hac formula in duas divisa partes, singuli termini primæ, si excipias ( 1 ) indivisam, ( incipiendo scilicet a $\frac{o}{g}$ ) sint singulis secundæ partis ( servato ordine quo sibi succedunt ) æquales, identici, & contrario signo affecti, possunt qui identici sunt a formula vel omnes, vel aliqui hinc inde expungi, vel æque hinc inde addi, vel tandem in unum colligi. Expuncto itaque primum a formula hinc inde $\frac{\infty}{g}$, eadem manebit differentia, cum sit $\frac{\infty}{g} - \frac{\infty}{g} = o$, utpote identici, eritque

$$M - N = \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + \frac{\frac{o}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g}}{1} \dots \right) . AC \\ - \left( \frac{\frac{o}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g}}{1} \dots \right) . AC \\ \left( \frac{AC}{AC} + \frac{o}{g} CD + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} \dots \right) AC \\ - \left( \frac{o}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} + \frac{1}{g}\frac{CD}{AC} \dots \right) AC \\ ( AC + C + CB + Bb + bb' + b'b'' + b''D \dots ) \\ - ( C + CB + Bb + bb' + b'b'' + b''D \dots\dots ) \end{array} \right.$$

unde, si hoc ordine progrediamur, postquam tot $\frac{1}{g}$. A C, quot unitates continentur in ( $g$ ), exhauserint totam C D, fit transitus ad D E, a qua divisa & ipsa in partes ( $g$ ), ( vel si mavis in partes ( $b$ ) mutato denomina-


tore

tore ( $g$ ) in ( $h$ ), cum sit $\frac{g}{g} = \frac{h}{h}$ ) repetitis terminis tot vicibus, quot unitates continentur in denominatore, fit transitus ad E F, & sic successive ad F G, inde ad G H &c; & formula erit

$$
M - N = \left\{
\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{\frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{n}{g}}{1}\right) . AC \\
&- \left(\frac{\frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{n}{g}}{1}\right) . AC = \\
&\left(1 + \frac{\frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{n}{g}}{1}\right) . AC \\
&- \left(\frac{\frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{n}{g}}{1}\right) . AC = \\
&\left(\frac{\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} + \frac{FG}{AC} + \frac{nGH}{AC}}{1}\right) . AC \\
&- \left(\frac{\frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} + \frac{FG}{AC} + \frac{nGH}{AC}}{1}\right) . AC = \\
&(AC + CD + DE + EF + FG + GB^{IV}) \\
&- (CD + DE + EF + FG + GB^{IV}) = AC
\end{aligned}
\right.
$$

in qua termini indivisi æquantur singuli A C, sed sunt singuli diversi ac determinant punctum G, in quod concurrit fluens major integra A G, ac sua homologa minor item integra C G. Restat $\frac{\frac{n}{g}}{1}$ . A C, in qua donec ( $n$ ) continetur intra limites ( $o$ ) & ( $g$ ), obtinentur totidem partes aliquotæ numero ( $g$ ), quæ simul exhauriunt sequentem & ipsam $=$ A C, innotescunt scilicet

licet puncta ipsius intermedia a zero usque ad $\frac{g}{g} = 1$. At situs, in quo sumenda est, pendet ab antecedentibus integris G F, F E, E D, D C, C A æqualibus singulis A C, quas ipsa antevertit: ac proinde in nostro casu est sexta in ordine, scilicet G H = A C: eritque $\frac{\frac{n}{g}}{1} . AC = \frac{\frac{n}{g} . \frac{GH}{AC}}{1} . AC$

$= \frac{n}{g} GH = GB^{IV}$. At si sit M — N

$$= \left(\frac{\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} + \frac{n}{g}\frac{FG}{AC}}{1}\right) AC$$

$$- \left(\frac{\frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} + \frac{n}{g}\frac{FG}{AC}}{1}\right) . AC, \text{ fit } \frac{\frac{n}{g}}{1} . AC$$

$= \frac{n}{g} . \frac{FG}{AC} . AC = \frac{n}{g} . FG$ æqualis quidem (facta $n$ ejusdem valoris) $GB^{IV}$, sed posita in $FB''$. Additione itaque vel detractione $\frac{1'}{1}$ adduntur vel detrahuntur tot partes integræ unitatis, quæ applicatæ protonumero A C, ac superiori methodo conformata formula, indicant quæ pars A F integra fluentis majoris, quæ C F minoris sumenda sit, quibus si addatur communis $\frac{\frac{n}{g}}{1} . AC$, erit ipsa $\frac{n}{g} . \frac{FG}{AC} . AC = \frac{n}{g} . FG = FB'''$, tot partibus aliquotis ipsius F G composita, quot unitates continentur in ($n$) intra limites ($o$) & ($g$) contento.

§. 9. Hisce intellectis non erit difficile eruere differentiam quæ intercedit maxima inter hasce sequentes formulas.

Iª. $M - N = \left\{\frac{\left(1 + \frac{o}{g}\right) - \frac{o}{g}}{1}\right\} . AC$ procedente zero fluxu continuo infinitum versus: &

IIª. $M - N = \left(\frac{\left(1 + \frac{\infty}{g}\right) - \frac{\infty}{g}}{1}\right) AC$, posito ($n$) absoluto in-

finito, a quo non nisi decrescendo regredi potest. In (I[a]) enim est $\left(\frac{o}{g}\right)$ A C $=$

$$\frac{\left(\frac{o}{g}\ \frac{CD}{AC}\right)}{1} AC = \frac{o}{g}\ CD = \frac{o}{g}\ CD = C,$$ quod est punctum originis fluentis versus Z ad infinitum progredientis, & M$-$N$=$ $\left\{\frac{\left(1+\frac{o}{g}\right)-\frac{o}{g}}{1}\right\}$ A C

$$= \left\{\frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{o}{g}\ \frac{CD}{AC}\right)-\frac{o}{g}\ \frac{CD}{AC}}{1}\right\} AC = (AC + C) - C,$$

& $M = AC + \frac{o}{g}\ CD = AC + C$; $N = \frac{o}{g}\ CD = C$.

Posito vero $\frac{o}{g} = \frac{n}{g} = \frac{1}{g}$ hoc est fluente puncto C ex C in B per spatium $CB = \frac{1}{g}\ CD$, erit

$$M - N = \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{1}{g}\ \frac{CD}{AC} + \frac{o}{g}\ \frac{BB'}{AC}\right)}{1} AC$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{g}\ \frac{CD}{AC} + \frac{o}{g}\ \frac{BB'}{AC}\right)}{1} AC = (AC + CB + oB) - (CB + oB)$$

posita $BB' = AC$: in qua hypothesi punctum zero originis fluentis ($n$), cui præmittitur $\frac{1}{g}$, non est amplius ut superius in C, sed progressum est in B per totum spatium $CB = \frac{\frac{1}{g}}{1}.\ AC = \left(\frac{1}{g}\ .\ \frac{BB'}{AC}\right).\ AC = \frac{1}{g} BB'$ æquale quidem valore $\frac{1}{g}$ A C, non positione. Sic successive progrediendo per seriem punctorum datorum $\frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g}$ . . . . . . usque ad numerum ($g$), ut sit $\frac{n}{g} = \frac{g}{g}$, & ex hac iterum in aliam æqualem, si idem denomina-

minator ( $g$ ) retineatur ( vel mutato denominatore in $b$ per seriem $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ldots\ldots$ usque ad $b$ ut sit $\frac{n}{b} = \frac{b}{b}$ ); erit

$$M - N = \begin{cases} \dfrac{\left(1 + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{g} + o\right)}{1} \cdot AC \\ - \dfrac{\left(\frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{g} + o\right)}{1} \cdot AC = \\ \dfrac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} + \frac{1}{g} \cdot \frac{FG}{AC} + \frac{o}{g} \cdot \frac{B''' B^{IV}}{AC}\right)}{1} \\ - \dfrac{\left(\frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{EF}{AC} + \frac{1}{g} \frac{FG}{AC} + \frac{o}{g} \frac{B''' B^{IV}}{AC}\right)}{1} AC = \\ ( AC + CD + DE + EF + FB''' + B''' ) \\ - ( CB + DE + EF + FB''' + B''' ) = \\ ( AB''' + B''' ) - ( CB''' + ) : \end{cases}$$

& $\dfrac{\frac{n}{g}}{1}$ A C non est amplius idem ac C B, vel D B′, vel E B″ licet singulis æqualis, sed est F B‴: & fluxus ( $n$ ) a C progrediens per puncta data D, E, F (in quo casu sit numerus integer C F $= 3$ A C) tandem pervenit ad punctum B‴ determinatum a $FB''' = \left(\frac{1}{g} \cdot \frac{FG}{AC}\right) \cdot AC = \frac{1}{g} . FG$, & initium fluxus ( $n$ ), quod erat in puncto dato F determinato ab antecedentibus jam determinatis transfertur in B‴: & hoc modo remanet determinatum & ipsum punctum ( $o$ ). Hac igitur methodo oritur formula, in qua quoties ad libitum determinatur fluens $\frac{n}{g}$, ( hoc est quoties $n$ unum ex valoribus seriei $1, 2 \ldots\ldots g$ assumit ) toties determinatur situs puncti ( $o$ ): ideo-

ideoque semper pro $\frac{n}{g}$ in formula ponendum est ( $o$ ): ita erit $\frac{n}{g} + o = \frac{1}{g} + o = \frac{1}{g} + \frac{n}{g} + o = \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + o = \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{n}{g} + o = \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{1'}{1} + \frac{3}{g} + o$. In prima, tertia, & quinta punctum ( $o$ ) quoad situm indeterminatum est: determinatur in secunda quarta, & sexta. Insuper punctum hoc ( $o$ ) continuato fluxu fieri potest $\frac{n}{g}$, vel $\frac{b}{b}$, & rursus usque ad infinitum fluere potest eo prorsus modo, quo poterat antequam a valore quocumque ad libitum determinato praeiretur. Hac ratione fluxus $\frac{n}{g}$ a zero versus infinitum successiva ac per omnes gradus continuata serie progreditur, quin ipsum infinitum unquam attingat: determinatur vero in transitu punctorum datorum, in quae dividitur ( 1 ) a denominatore ad libitum sumpto ( $g$ ).

§. 10. Sumatur nunc formula ( II$^a$. ) M — N = ( ( 1 + ∞ ) — ∞ ). A C: hanc enim legitimam esse nemo inficias ibit, qui advertat ab hac eamdem constantem differentiam A C exhiberi, quam nobis praebuit ejus inversa ( I$^a$ ) ( ( 1 + $o$ ) — $o$ ). A C = A C. Nam quemadmodum in hac a zero tamquam primo fluxionis puncto, sive a non quanta ad quantam fluxio legitimum transitum facit; ita contrario modo posito ( ∞ ), sive tota, quae dari potest, quantitate lineari in unum mente comprehensa, & symbolo ( ∞ ) repraesentata, ad finitam, hoc est a tota possibili ad partem transitus legitimus existat oportet: qui inveniendus proinde est. Si igitur in infinita ab utraque parte X Z arbitrio eligatur punctum C, ( *Fig.* 18. ) ex quo hinc inde concipiantur productae ad infinitum C Z, C X, quarum utraque nullis terminis definita concipiatur, neutra nisi in puncto C, in quo initium sumere ponitur, atque ideo est zero, determinari poterit, cum nullum fixum punctum in hac infinita ab utraque parte extensione praeter C conceptum fuerit. Hinc hujusmodi ab utraque parte infinitum positione puncti C dividitur in duo infinita C Z, C X, quorum singulum initium sumens in puncto C est quidem infinitum versus Z vel X, sed utrumque definit in punctum C. Quodcumque igitur hujusmodi infinitum mente conceptum, quod symbolo ( ∞ ) designamus, habet initium determinatum, sed non finem, cum nunquam possit dextrorsum, vel sinistrorsum ejus fluxus determinari, nisi nova adjungatur conditio, nisi scilicet quodcumque aliud punctum ad libitum eligatur. Sed mente prius concepta existentia hujusce infiniti, non nisi ex parte C, in quo initium sumit hoc infinitum, additione vel detractione alicujus finitae partis, innotescere potest positio partis additae vel substractae cum punctum Z infinite distans a C nullo modo determinari possit. Sumatur itaque punctum A dato intervallo a puncto C dissitum, ut sit A C quan-

quantitas linearis arbitrio sumpta, ex qua statim colligitur, infinitum C Z auctum esse quantitate determinata A C, atque (ut diximus) esse $= \left(\frac{1+\infty}{1}\right) . AC$

$$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \infty . \frac{CD}{AC}\right)}{1} . AC = AC + CZ$$ posito denominatore

$= 1$: in qua A C est semper indivisa & constans protonumeri vicem gerens, C Z a puncto C originem ducens infinitum ex parte Z. Erit itaque vi nostri Systematis S Y, $M - N = \left(\frac{(1+\infty) - \infty}{1}\right) . AC$

$$= \frac{\left(\left(\frac{AC}{AC} + \infty \frac{CD}{AC}\right) - \infty \frac{CD}{AC}\right)}{1} . AC = (AC + CZ)$$

$- CZ = AC$, & $M = \frac{\left(\frac{AC}{AC} + \infty \frac{CD}{AC}\right)}{1} . AC = AC + CZ$

$N = \frac{\left(\infty \frac{CD}{AC}\right)}{1} . AC = \infty CD = CZ$, quibus determinatur tantum earum differentia, utpote æqualis semper protonumero A C; ipsæ vero singulæ utpote infinitæ nunquam determinari poterunt. Ex quo eruitur prima ac necessaria conditio hujusce systematis S Y, quæ in eo sita est, ut sit differentia constans, summa vero fluentium infinitarum ita indeterminata, ut nunquam possit determinari. Donec ita in coefficiente reperitur infinitum ( $\infty$ ), semper singulæ fluentes persistent infinite indeterminatæ: nec nostro arbitrio aliud relinquitur, nisi ut additione, vel detractione alicujus constantis ex parte C arbitrio sumptæ originem primam hujusce infiniti in quocumque alio puncto a C diverso constituamus. Si igitur ab hujusmodi infinito $\left(\frac{\infty}{1}\right)$ A C detrahatur $\frac{1}{g}$ erit $\frac{\left(\infty - \frac{1}{g}\right)}{1} . AC = CZ - CB = BZ$ infinita, & punctum originis hujusce infiniti non amplius in C, sed translatum in B: quod

si fiat

si fiat $\dfrac{\left(\infty - \frac{g}{g}\right)}{1} . AC = \left(\dfrac{\infty - 1}{1}\right) . AC$, erit $CZ - CD = DZ = \infty$, & punctum originis hujusce infiniti excurrens per seriem totam $\frac{1}{g} + \frac{1}{g} \ldots$ ut sit $\frac{n}{g} = \frac{g}{g}$, translatum in D. Quod si in eadem positione ac antea velimus protonumerum AC, tot partes addendæ sunt finitæ $\frac{1}{g} \ldots$ &c. $\left(\frac{1'}{1}\right)$&c., quot detrahuntur ab infinito, eritque

$$M - N = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(1 + \left(\frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{1}{g} \ldots\right) + \left(\infty - \frac{g}{g} - \frac{g}{g} - \frac{1}{g} \ldots\right)\right) AC}{1} \\ - \dfrac{\left(\infty - \frac{g}{g} - \frac{g}{g} - \frac{1}{g} \ldots\ldots\right) AC}{1} = \\ \dfrac{\left(1 + \frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{1}{g} \ldots + \infty\right) AC}{1} \\ - \dfrac{\left(\frac{g}{g} + \frac{g}{g} + \frac{1}{g} \ldots + \infty\right) AC}{1} = \\ \dfrac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{n}{g}\frac{EF}{AC} + \infty\right) AC}{1} \\ - \dfrac{\left(\frac{CD}{AC} + \frac{DE}{AC} + \frac{n}{g}\frac{EF}{AC} + \infty\right) AC}{1} = \\ (AC + CD + DE + EB'' + B''(b) + (b)Z) \\ - (CD + DE + EB'' + B'(b) + (b)Z) = \\ (AC + C(b) + (b)Z) - (C(b) + (b)Z): \\ \& (b)Z = \frac{\infty}{1} . AC = \infty : \text{atque ideo fluentes sin-} \end{array} \right.$$

gulæ

gulæ semper infinitæ ut antea, & præcise æquales $\frac{\infty}{1} \cdot A\,C$. Hac enim formula $\frac{\left(\infty - \frac{g}{g} \ldots\right)}{1} \cdot A\,C$ nihil detrahitur a concepto primum $\frac{\infty}{1}\,A\,C$, sed tantum ejus origo, quæ erat in C, versus Z promovetur, (ut hîc in ($b$)) eadem manente infinita illa lineari extensione primum concepta $\frac{\infty}{1}\,A\,C = C\,Z$, translata in ($b$) Z; & C Z, ($b$) Z non nisi positione differre censendæ sunt: ut recte a nobis in superiori formula secunda omissæ fuerint quantitates finitæ signo negativo affectæ subtractæ ab ($\infty$). Formula igitur generalis infinitum hoc complectens erit

$$M - N = \begin{cases} \dfrac{\left(\left(1 + \frac{n}{g}\right) + \left(\infty - \frac{n}{g}\right)\right)}{1} \cdot A\,C \\ - \dfrac{\left(\frac{n}{g} + \left(\infty - \frac{n}{g}\right)\right)}{1} \cdot A\,C = \\ \dfrac{\left(\left(\frac{A\,C}{A\,C} + \frac{n}{g}\,\frac{C\,D}{A\,C}\right) + \left(\infty\,\frac{C\,Z}{A\,C} - \frac{n}{g}\,\frac{C\,D}{A\,C}\right)\right)}{1} \cdot A\,C \\ - \dfrac{\left(\frac{n}{g}\,\frac{C\,D}{A\,C} + \left(\infty\,\frac{C\,Z}{A\,C} - \frac{n}{g}\,\frac{C\,D}{A\,C}\right)\right)}{1} \cdot A\,C = \\ \dfrac{\left(1 + \frac{n}{g} + \infty\right)}{1} \cdot A\,C - \dfrac{\left(\frac{n}{g} + \infty\right)}{1} \cdot AC = \\ \dfrac{\left(\frac{A\,C}{A\,C} + \frac{n}{g}\,\frac{C\,D}{A\,C} + \infty\,\frac{A\,C}{A\,C}\right)}{1} \cdot A\,C \\ - \dfrac{\left(\frac{n}{g}\,\frac{C\,D}{A\,C} + \infty\,\frac{A\,C}{A\,C}\right)}{1} \cdot A\,C; \end{cases}$$

& facto ex: gr. $\frac{n}{g} \cdot \frac{CD}{AC} = Cb$; erit $M - N =$ $(AC + Cb + bZ) - (Cb + bZ)$; $bZ = \frac{\infty}{1} AC$

in qua determinatur punctum originis infiniti $\frac{\infty}{1} . AC$ in puncto $b$, determinato numeratore $n$ : $bZ$ vero semper idem ac infinitum CZ primum mente conceptum censendum est, cum (inquam) punctum Z ex parte dextera nullo modo contineri atque determinari possit. Quamobrem fluentes in hoc limite infinito semper erunt singulæ infinitæ, in quibus ex parte C originis determinari potest quantitas finita ad libitum $\frac{n}{g}$ : quod si ab istis dematur commune infinitum ($\infty$), statim ad finitas fit transitus: est enim $M - N$

$$= \frac{\left(1 + \left(\frac{n}{g} + \infty\right)\right)}{1} . AC - \frac{\left(\frac{n}{g} + \infty\right)}{1} . AC = \frac{\left((1+\frac{n}{g}) - \frac{n}{g}\right)}{1} . AC,$$

quæ est formula §. 8, 9, in hypothesi fluentis $\frac{n}{g}$ a zero versus infinitum: atque ideo patet non posse ab infinito ad finitum transitum fieri; nisi saltu semper eodem infinito ($\infty$): hoc est subtractione non sensim ac per gradus facta, ut in ea, quæ incipit a zero, sed totius infiniti uno ut ita dicam ictu ac simultanee a formula expuncti.

§. 11. Hinc ex hac doctrina §. superioris, qua docemur quomodo a methodo infiniti absoluti ad methodum absoluti zero sine actuali formulæ evolutione transitus legitimus obtineri possit, manifeste patet quomodo intelligenda & explicanda sit sententia illa, quam subodoratus est celeberrimus Alembertius, (de qua §. 53. & seqq. in Præf. T. I. mentionem feci), qui quantitatibus negativis semper quantitatem ipsis majorem, ut negativum vitetur, præponendam esse autumat: quæ tamen sententia, nisi quantitas negativæ præponenda sit infinitum illud ($\infty$) absolutum, de quo verba facio, nec recte demonstrari, nec ad usum traduci potest. Quod *infinitum* communi imbutus opinione cum ipse repudiaverit, veritatem hanc nec sibi, nec aliis satis probabilem reddere potuit, nec utiliter ad imaginarium vitandum adhibere. Demonstratur vero evidentissime statuta doctrina superiori, dummodo animadvertatur in puncto C originis illius infiniti absoluti $CZ = \frac{\frac{\infty\, CD}{AC}}{1} . AC$, fluxum in C versus Z pro-

gre-

gredientem esse zero. Quod si ab hoc infinito dematur pars quæcumque $\left(\frac{1}{g}\cdot\frac{AD}{AC}\right).AC$, fluxus incipiens a C versus Z fit ex demonstratis $=\left(\frac{1}{g}\cdot\frac{AD}{AC}\right).AC$, & sic successive procedendo quot partes demuntur huic infinito C Z, tot adduntur zero $=$ C: hoc est quanto punctum originis C infiniti ( $\infty$ ) accedit versus Z, sive recedit a puncto C, tanto crescit supra zero distantia a puncto C: verbo ea ipsa portio identica, quæ demitur infinito, additur puncto C sive zero. Reciprocantur itaque ( $o$ ) & ( $\infty$ ); & $\frac{1}{g}+o$, $\infty-\frac{1}{g}$; ac universim $\frac{n}{g}+o$, $\infty-\frac{n}{g}$: hinc ex methodo infiniti absoluti transitus legitimus ad methodum absoluti zero anquiritur, si loco $\infty-\frac{n}{g}$ ponatur $\frac{n}{g}+o$, & viceversa. Quare erit

$$M-N=\frac{\left(1+(\infty-\frac{n}{g})\right)}{1}.AC-\frac{\left(\infty-\frac{n}{g}\right)}{1}.AC$$

$$=\frac{\left(\frac{AC}{AC}+\infty\frac{CD}{AC}-\frac{n}{g}\frac{CD}{AC}\right)}{1}.AC-\frac{\left(\infty\frac{CD}{AC}-\frac{n}{g}\frac{CD}{AC}\right)}{1}.AC$$

$$=\frac{\left(1+\frac{n}{g}+o\right)}{1}.AC-\frac{\left(\frac{n}{g}+o\right)}{1}.AC$$

$$=\frac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}\frac{CD}{AC}+\frac{oAC}{AC}\right)}{1}AC-\frac{\left(\frac{n}{g}\frac{CD}{AC}+\frac{oAC}{AC}\right)}{1}AC$$

$=(AC+CB+B)-(CB+B)$, posito $\frac{n}{g}CD=CB$: & $\frac{\infty-\frac{n}{g}}{1}$ homologa $\frac{\frac{n}{g}+o}{1}$: potest enim una in alterius locum legitime

 sub-

substitui. Et sane est $M - N = \frac{\left(1 + \left(\infty - \frac{n}{g}\right)\right)}{1} . AC - \frac{\left(\infty - \frac{n}{g}\right)}{1} . AC = \frac{\left(1 + \left(\frac{n}{g} + \infty\right)\right) - \left(\frac{n}{g} + \infty\right)}{1} . AC$: & transitu facto ab infinito ad zero $M - N = \frac{\left(1 + \left(\frac{n}{g} + o\right)\right) - \left(\frac{n}{g} + o\right)}{1} . AC$.

Ergo $\infty - \frac{n}{g} = \frac{n}{g} + o$: hoc est quæ in infinito fluens erat $\infty - \frac{n}{g}$, translata ad zero convertitur in $\frac{n}{g} + o$; ac signo $=$ non quantitates utriusque membri æquales inter se copulantur (distant enim infinito prorsus intervallo); sed illæ simul connectuntur, quæ sunt homologæ, ut omissis quantitatibus transcendentibus ( $o$ ) & ( $\infty$ ), liceat fluentes intra limites Systematis ad libitum determinare. Methodus nota nimis negligenter ( $o$ ) quantitatibus additum, vel subtractum prorsus neglexit, eo quia quantitatem nec auget nec minuit: hac tamen negligentia constantes a fluentibus, & has majores a minoribus nunquam secernit. Nimium tamen sollicita fuit de infinito hoc ( $\infty$ ), quod licet ut absolutum repugnare contendat, tamen ut relativum tanta superstitione colit, ut quantitates finitas huic comparatas omnino tamquam nullas negligat, ea falsa decepta ratione, quod infinitum quodcumque absorbeat valore quantitates quasvis finitas. Verum si quantitates finitæ respectu infiniti omittantur; cum hujusmodi infinitum nullo modo determinari posse, atque idem semper supponi supra demonstraverimus; frustra laboratur, ut, hoc infinito retento, aliquid legitimum circa quantitates finitas eruatur, nisi fiat transitus ab infinito ad zero, & ab hoc ad quantitates finitas. Error tamen hic ab illo altius errore manat, quo quantitates fluentes ut constantes tractantur, natura, & proprietate fluentium prorsus ignorata. Hisce enim cognitis facile etiam erat cognoscere, infinitum hoc mente conceptum non esse nisi fluentem nullis ex una parte præfinitis terminis conclusam, quæ tamen avulso infinito, usque ad zero, in quo principium sumit, descendere potest, cum sit $\infty - \infty = o - o = o$; & hinc iterum inverso ordine fluendo ad finitum remeare. Hisce demonstratis demonstratur etiam, atque confirmatur existentia & necessitas duplicis illius methodi, qua tanquam fundamento superstrui diximus in Præf. P. I. §. 34. totum analyticum ædificium, quarum unam *Methodum absoluti zero*, *Methodum* alteram *absoluti infiniti* illic appellavimus: quas utrasque non nisi cum systemate

te S Y conciliari posse satis superque hîc erui potest. Quæ vero consecutiones ex harum mutua ope in totam Analysim maximæ, fœcundissimæ redundare possint; & quot quam graves ex earum ignoratione errores, ambiguitates, fallaciæ in hanc irrepserint, in progressu Operis pro re nata ostendam.

§. 12. Interim statuamus ex formula coefficientium hujusce systematis $\dfrac{\left(1+\dfrac{n}{g}\right)-\dfrac{n}{g}}{1}$, in qua unitati primum additur fluens numerica $\dfrac{n}{g}$, deinde eadem detrahitur, necessario ortum ducere hoc systema; in quo fluentes semper extra puncta data A, C ultimo, quod habent, communi puncto vagantur ex parte Z vel X usque ad infinitum. Cum enim non nisi puncta A, C dato intervallo dissita primum constituta fuerint, ac ab extremo puncto C, vel A (*Fig.* 19) primum addita censeatur quantitas $\dfrac{n}{g}$, hæc licet ad infinitum fluere concipiatur, nunquam in punctum datum, quod nullum est, incidere potest, quo sine nequit determinari. Hinc $\dfrac{n}{g}$ intra limites ( $o$ ) & ( $\infty$ ), hoc est, intra punctum positione datum tamquam unicum limitem fixum, & alterum illimitatum continetur. Limes vero minimus ( $+o$ ) additus unitati, sive ( $1+o$ ) satis aperte declarat coefficientem majoris fluentis non posse fieri minorem unitate ipsa, cum hujusce fluxus directio semper extra puncta A, C versus Z vel X tendat: in hoc igitur puncto C, vel A fluens major minima est finita & æqualis protonumero A C + C, vel C A + A: maxima infinita = A C + C Z, vel = C A + A X: fluens vero minor = C, vel A minima, = C Z vel A X maxima infinita. Quod si in formula coefficientium fluentium minimarum ( $1+o$ ) $-\,o$ fiat permutatio, & in locum ( $+o$ ) substituatur ( $-o$ ), & loco ( $-o$ ) ponatur ( $+o$ ): facta hac mutatione statim fluxus puncti C ad oppositam plagam dirigitur, & statim a systemate S Y ad systema alterum S A transitus fit: ita ut, quæ erat in primo casu $\left(\dfrac{(1+o)-o}{1}\right)$. A C = M − N, fiat in hoc secundo $\left(\dfrac{(1-o)+o}{1}\right)$. A C = M + N, ex quo evidentissime colligitur transitum ab uno ad alterum systema non nisi per limitem minimum hoc est per zero, sive per punctum C vel A utrique commune obtineri posse. In praxi tamen si ( 1 ) constanti addatur primum fluxus medius $\dfrac{n}{g}$, inde detrahatur, habetur systema S Y: si vero ipsi ( 1 ) detrahatur primum, inde addatur idem fluxus medius $\dfrac{n}{g}$, systema S A consecuti sumus. Erit itaque in systemate S A

M+N

$$M + N = \frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}}{1} AC = \frac{\left(\frac{AC}{AC} - \frac{n}{g}\frac{CA}{AC}\right) + \frac{n}{g}\frac{CA}{AC}}{1} AC$$

$= \frac{\left(\frac{AC}{AC} - \frac{CB'}{AC}\right) + \frac{CB'}{AC}}{1} AC$, in quo caſu $\frac{\frac{n}{g} CA}{1}$, ſive CB′ non poteſt ſuperare valorem CA, quin ſyſtema mutetur: poſito enim fluxu $\frac{\frac{n}{g}}{1} . AC$ $= CB'$ majori CA, punctum B′ extra A verſus D′ procedit, & $1 - \frac{n}{g}$ fit negativa, ideoque & M negativa; eſt igitur in hoc caſu $- M + N$ $= \frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}}{1} . CA = \frac{-\left(\frac{n}{g} - 1\right) + \frac{n}{g}}{1} . CA$ $= \frac{\frac{n}{g} - \left(\frac{n}{g} - 1\right)}{1} . CA$; & poſito $\frac{n}{g} - 1 = \frac{m}{g}$; $M - N$ $= \frac{\left(1 + \frac{m}{g}\right) - \frac{m}{g}}{1} . CA = \frac{\left(\frac{CA}{CA} + \frac{m}{g}\frac{AD'}{CA}\right) - \frac{m}{g}\frac{AD'}{CA}}{1} . CA$ $= (CA + AB'') - AB''$, quæ eſt formula ſyſtematis S Y. Conditio igitur neceſſaria in hoc ſyſtemate S A id requirit, ut coefficientes ſinguli fluentium homologarum ſint fractiones unitate minores, quæ ſimul ſumptæ unitatem adæquent, ut poſſint fluentes lineares ſimul totum protonumerum A C exhaurire, atque omnia intra limites duorum punctorum A, C, quæ ſunt extrema protonumeri A C, peragantur. Hoc bene conſtituto quoniam eſt $\frac{\frac{n}{g}}{1}$

$$= \frac{\frac{n}{g}}{\frac{n}{g} + \left(1 - \frac{n}{g}\right)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{n}{g}\right)}{1}$$, facta diviſione, erit

n

$\dfrac{\frac{n}{g} + (1 - \frac{n}{g})}{1} = \dfrac{1}{1}$. Similiter $\dfrac{\frac{m}{g}}{1} = \dfrac{\frac{m}{g}}{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})}$

$= \dfrac{1 - (1 - \frac{m}{g})}{1}$; & $\dfrac{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})}{1} = \dfrac{1}{1}$ : ergo

$1 - \frac{n}{g} = \frac{m}{g}$ ; & $1 - \frac{m}{g} = \frac{n}{g}$ : & $\frac{m}{g} + \frac{n}{g} = \dfrac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})}$

$= \dfrac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}} = \dfrac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}} = \dfrac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}} = \dfrac{1}{1}$ : ergo

$\frac{m+n}{g} = 1$; & $m + n = g$: hoc est summa numeratorum $m + n$ coefficientium fluentium homologarum in hoc systemate semper æqualis numero partium ( $g$ ), in quem intelligitur divisa unitas: atque ideo fluentes ipsæ simul sumptæ exhauriunt totam A C, sive eumdem protonumerum divisum in partes ( $g$ ). Hinc in hoc systemate divisio in partes ( $g$ ) in unum & identicum protonumerum tota cadit, & fluentes non sunt nisi portiones ipsius protonumeri A C: quando in systemate S Y protonumerus A C indivisus semper manet, nec nisi portiones æquales protonumero A C extra ipsum divisionem subeunt indicatam. Insuper animadvertendum est $\dfrac{\frac{m}{g}}{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})} + \dfrac{\frac{n}{g}}{\frac{n}{g} + (1 - \frac{n}{g})} =$

$\left\{\dfrac{1 - (1 - \frac{m}{g})}{(1 - \frac{m}{g}) + \frac{m}{g}}\right\} + \left\{\dfrac{1 - (1 - \frac{n}{g})}{(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}}\right\} = \left\{\dfrac{1 - (1 - \frac{m}{g})}{1}\right\}$

$+ \left\{\dfrac{1 - (1 - \frac{n}{g})}{1}\right\}$ divisione peracta. Ergo licet tam $\dfrac{\frac{m}{g}}{1}$, quam

*n*

$\frac{\frac{n}{g}}{1}$ denominatore ( 1 ) ejusdem valoris afficiantur, evanescentibus in primo $-\frac{m}{g}+\frac{m}{g}$, in secundo $-\frac{n}{g}+\frac{n}{g}$; divisio tamen denominatoris ( 1 ) in duas partes est quoad valorem, & quoad directionem diversa in utroque prout diversus est valor ac directio ipsius $\frac{m}{g}$ a valore ac directione homologæ $\frac{n}{g}$ : ac proinde denominator ipse ( 1 ) in uno casu diversus est directione alterius. Hinc ut actu divisio institui possit, primus coefficiens $\frac{\frac{m}{g}}{1}$ afficiendus est denominatore $\frac{m}{g}+\left(1-\frac{m}{g}\right)$; secundus $\frac{\frac{n}{g}}{1}$ denominatore $\frac{n}{g}+\left(1-\frac{n}{g}\right)$; ut divisione peracta, habeantur quotientes $\left(\frac{1-\left(1-\frac{m}{g}\right)}{1}\right)+\left(\frac{1-\left(1-\frac{n}{g}\right)}{1}\right)$. Quo docemur hujusmodi quotientes non posse simul confundi, nec termini unius additione, vel subtractione cum terminis alterius conjungi; sed semper tamquam solitarios sumendos esse: cum in singulis termini etiam qui æquantur valore terminis alterius, sint prorsus directione in unoquoque quotiente ita diversi, ut nec e primo diviso per denominatorem alterius $\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}$; nec e secundo diviso per denominatorem primi $\left(1-\frac{m}{g}\right)+\frac{m}{g}$ divisio superior obtineri queat. Quare manifesta se prodit ratio, cur denominatore ( 1 ) singuli affici debeant, & cur in singulis natura diversus sumendus sit, cum sit diversa ea pars identica, quæ evanuerit: ut in nostro exemplo erit in primo casu denominator $1=1-0=\left(1-\frac{m}{g}\right)+\frac{m}{g}$; in

in ſecundo $1 = 1 - 0 = (1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}$.

§. 13. Sed diligentius in proprietates hujuſce ſyſtematis S A inquirentes nunc primum demonſtremus oportet, quantum interſit diligenter attendere ad variam formularum conformationem, a qua ſola pendet varia fluentium natura ac diverſum ſyſtema; ut manifeſte appareat, quam male hactenus ſe geſſerit Methodus nota, quæ falſa ſimplicitatis ſpecie decepta fluentes diverſi generis ac poſitionis in unum colligit, ac ſi identicæ eſſent: quo male inſtituto artificio nec ad valorem quidem aſſequendum, cui unice attendit, par eſſe poteſt. Data itaque linea A C ( *Fig.* 20 ) dividatur in partes ( $g$ ) ad libitum, & poſita $AB = \frac{m}{g} \cdot AC$, erit ex dictis $CB = \frac{n}{g} \cdot CA$; & $AB + CB =$

$$\underbrace{\left(AC - \frac{n}{g}CA + \frac{n}{g}\right)}_{1} CA = \underbrace{\frac{m}{g}AC + \frac{n}{g}CA}_{1} : \& \; CB + AB$$

$$= \underbrace{\left(CA - \frac{m}{g}AC\right) + \frac{m}{g}AC}_{1} = \underbrace{\frac{n}{g}CA + \frac{m}{g}AC}_{1}$$

in directione prorſus contraria primæ: ac fluentes ipſæ homologæ ſemper contrariis directionibus a diverſo originis puncto dato prorumpentes ſibi obviam in punctum commune B occurrunt: ex quo fit, ut ex: gr: $\frac{n}{g}$ C A ſit in directione prorſus contraria ſuæ homologæ $\frac{m}{g}$ C A. Ut habeatur igitur vera cujuſcumque fluentis origo ac directio, ſi coefficientium ſumma $(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}$ ducatur in A C, ut ſit $\Big(\underbrace{(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}}_{1}\Big) \cdot AC = M + N$; fac

$$M + N = \Big(\underbrace{\left(\frac{AC}{AC} - \frac{n}{g}\frac{CA}{AC}\right) + \frac{n}{g}\frac{CA}{AC}}_{1}\Big) \cdot CA$$

$$= \Big(\underbrace{\left(AC - \frac{n}{g}CA\right) + \frac{n}{g}CA}_{1}\Big) \cdot \frac{AC}{AC} =$$

$( AC - \frac{n}{g} CA ) + \frac{n}{g} CA$, & $M = AC - \frac{n}{g} . CA =$

$AC - CB = AB ; N = \frac{n}{g} . CA = CB$: sed si sit $M + N =$

$\frac{\left((1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}\right)}{1} . CA$, fac $M + N = \frac{\left( (\frac{CA}{CA} - \frac{n}{g}\frac{AC}{CA}) + \frac{n}{g}\frac{AC}{CA} \right)}{1} . CA$

$= \frac{\left( ( CA - \frac{n}{g} AC ) + \frac{n}{g} AC \right)}{1} . \frac{CA}{CA}$ ; & erit $M =$

$CA - \frac{n}{g} . AC = CA - AB = CB$ ; & $N = \frac{n}{g} . AC = AB$ ;

quo artificio fluentium origo ac directio vere determinatur, & eæ quæ vere sunt inter se homologæ obtinentur, ad quod unice est diligenter attendendum. Mutata igitur directione protonumeri $AC$ in $CA$, vel viceversa, licet iisdem symbolis in coefficiente utaris, fit semper fluentium homologarum transmutatio, sive mutatur prima fluentium origo & positio in contrariam, quin in negativum offendas, in quod necessario incidit Methodus nota, a qua omnia miscentur ac perturbantur. Quamobrem protonumeri directio determinat fluentium directionem, & diversum earumdem punctum originis, ac ab hac una ad oppositam plagam eleganter fit transitus: diversa vero coefficientium dispositio substitutione ex: gr: $(1 + \frac{n}{g}) - \frac{n}{g}$ in locum $(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}$ diversam systematis naturam ut, superius vidimus, declarat.

§. 14. Itaque erit

$$1°. \ \frac{\left( (1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g} \right)}{1} AC = \left\{ \begin{matrix} \frac{\left( (\frac{AC}{AC} - \frac{n}{g}\frac{CA}{AC}) + \frac{n}{g}\frac{CA}{AC} \right) AC}{1} \\ \\ \frac{\frac{m}{g} AC + \frac{n}{g} CA}{AB + CB} \end{matrix} \right\} =$$

$$\frac{\left( (1 - \frac{m}{g}) + \frac{m}{g} \right)}{1} AC = \left\{ \begin{matrix} \frac{\left( (\frac{AC}{AC} - \frac{m}{g}\frac{CA}{AC}) + \frac{m}{g}\frac{CA}{AC} \right) AC}{1} \\ \\ \frac{\frac{n}{g} AC + \frac{m}{g} CA}{AB' + CB'} \end{matrix} \right\} \quad 2°.$$

$2^a.$ $\frac{\left((1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}\right)AC}{1} = AB + CB =$

$$\frac{\left((1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}\right)AC}{1} = \left\{\begin{array}{c} \frac{\left((\frac{CA}{CA}-\frac{n}{g}\frac{AC}{CA})+\frac{n}{g}\frac{AC}{CA}\right)CA}{1} \\ \frac{m}{g}\, CA + \frac{n}{g}\, .\, AC \\ CB' + AB' \end{array}\right\}$$

$3^a.$ $\frac{\left((1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}\right)AC}{1} = AB + CB =$

$$\frac{\left((1-\frac{m}{g})+\frac{m}{g}\right)CA}{1} = \left\{\begin{array}{c} \frac{\left((\frac{CA}{CA}-\frac{m}{g}\frac{AC}{CA})+\frac{m}{g}\frac{AC}{CA}\right)CA}{1} \\ \frac{n}{g}\, CA + \frac{m}{g}\, .\, AC \\ CB + AB \end{array}\right\}$$

Ergo in prima eadem manet in utraque directio, sed tantum valor fluentium mutatur; ita ut A B primæ formulæ sit $=$ C B′ secundæ, & C B primæ $=$ A B′ secundæ. At in æquatione ($2^a$) mutatur directio non valor fluentium, & est A B $=$ C B′; C B $=$ A B′: & in ($3^a$) mutata similiter directione mutatur etiam valor fluentium, cum sit A B $=$ C B′; C B $=$ A B′: hoc vero semper in hypothesi, quod valor coefficientium $\left(\frac{n}{g}\right)$, $\left(\frac{m}{g}\right)$ in singulis sit semper idem. Licet igitur idem sit $\frac{1}{1}$ ac $\frac{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{1}$, vel $\frac{(1-\frac{m}{g})+\frac{m}{g}}{1}$, si valorem spectes, ea tamen intercedit differentia inter singulas hasce formulas, quod in primo casu fractio $\frac{1}{1}$ applicanda protonumero

A C vel C A indicat sumendam esse A C vel C A semper indivisam: at in cæteris casibus $\frac{(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{1}$, vel $\frac{(1-\frac{m}{g})+\frac{m}{g}}{1}$ intelligendum est A C vel C A in partes duas divisam esse; quarum prima est A B $= \left(\frac{1-\frac{n}{g}}{1}\right)$ A C, secunda C B si applicetur protonumero A C; contra vero C B, A B, si applicetur protonumero C A. Coefficiens vero hujusce formæ $\frac{1-\frac{n}{g}}{1}$ semper ostendit fluentem primam, a cujus originis puncto ejus fluxio incipit; applicatio vero hujusce coefficientis ad A C vel C A designat hujusce puncti originem in A vel C; altera fluente a C versus A, vel contra ab A versus C. Illud vero notandum, quod si fiat in hisce formulis $n = o$; erit $\left(\frac{(1-\frac{o}{g})+\frac{o}{g}}{1}\right)$ A C $=$ A C $+$ C: at facto $n = g$ valori maximo est $\left(\frac{(1-\frac{g}{g})+\frac{g}{g}}{1}\right)$ A C $=$ A $+$ C A; ergo in casibus mediis procedente ($n$) a zero versus ($g$) decrescit A C, crescit C B; facto $n = \frac{1}{2} g$ fiunt æquales A B, C B: rursus crescente ($n$) usque ad ($g$), A B fit zero $=$ A quæ erat maxima, posita $n = o$, & fit maxima C A, quæ erat in primo casu nulla $=$ C. Idem, sed inverso modo eveniet, si ponas primum $n = g$ maximum, ac usque ad zero successive descendas. Hinc Corollarium maximi momenti consequitur, quod scilicet nequit haberi punctum quodcumque C vel A, quin huic puncto non respondeat linea homologa finita A C vel C A: atque ideo puncti alicujus existentia semper supponit quantitatem finitam priorem natura ipso puncto. Quod cum semper in data linea duobus terminis constantibus definita contingat, semper quantitatis carentia supponit prius ejus existentiam, quemadmodum notio negativa supponit prius notionis positivæ existentiam. Sed de hoc infra §. 24. Interim animadvertas velim formulam veram ac naturalem coefficientis $\frac{1}{1}$ esse in hoc systemate S A

1 —

$$\frac{1-0 \cdot 0}{1} = \frac{(1-0)+0}{1} = \frac{\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}{1} = \frac{\left(1-\frac{g}{g}\right)+\frac{g}{g}}{1} =$$

M + N summæ coefficientium fluentium: in primo casu $n = o$ minima, $m = 1$ maxima, & ideo fluens M maxima, N minima; in secundo ambæ mediæ; in tertio contra M $= o$ minima, N maxima. Contra vero in systemate S Y debet esse $\frac{1}{1} = \frac{1 + o \cdot o}{1} = \frac{(1+o)-o}{1} = \frac{\left(1+\frac{n}{g}\right)-\frac{n}{g}}{1}$

$$= \frac{\left(1+\frac{\infty}{g}\right)-\frac{\infty}{g}}{1} = M - N;$$ in primo casu coefficiens $m$ minimus $= 1$, $n$ item minimus $= o$, & fluens major M minima finita, minor N minima $= o$: in secundo ambæ mediæ; in tertio utraque infinita, eadem tamen semper universim inter ipsas differentia manente.

§. 15. Sed ad difficiliora properantibus maxime interest ad examen revocare formulas §. superioris, ut quædam ex varia ipsarum præparatione, atque terminorum transpositione pro diversa systematis assumpti natura consecutiones maximi momenti in tota Analysi ignotæ adhuc erui incipiantur, quibus manifeste constet quam longe admodum Methodus nota hisce destituta præsidiis a recto veritatis tramite deflexerit. Ac primum ex formulis $\frac{\left(\frac{m}{g}+\frac{n}{g}\right)}{1}$ A C, $\frac{\left(\frac{n}{g}+\frac{m}{g}\right)}{1}$ C A §. superioris nihil omnino erui potest nisi prius systema eligatur. Cum enim singulæ fluentes sint omnino indeterminatæ, nequeunt intra limites propius determinari, nisi systematis prius arbitrio sumpti necessariis conditionibus earum natura, origo, directio, ac positio statuantur. Determinato vero primum systemate S A, omnes & singulæ hujusmodi formulæ perfectam inter se servant æqualitatem, licet valores singularum $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$ in singulis formulis diversi sumantur, ac diverso denominatore $\left(\text{ut puta } \frac{m}{b}, \frac{n}{b}\right)$ afficiantur: in hoc enim systemate semper summam fluentium $m+n$ æqualem esse suo denominatori supra demonstravimus. Singulæ itaque æquantur A C vel C A, atque ideo inter se valore æquales, in eadem aut in opposita directione fluentes

tes. Verum si ad Systema S Y referantur, cum formulæ superiores summam fluentium homologarum contineant; quam ostendimus in hoc systemate S Y sem-per valore inæqualem, nisi eædem sumantur in singulis singulæ $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$; mutato singularum fluentium valore valor cujuscumque formulæ mutatur ita, ut etiam infinito intervallo inter se una ab altera differre possit, cum minimus cujuscumque sit A C vel C A; maximus prope infinitus. Igitur in systemate S A semper perfecta intercedit æqualitas inter hasce formulas, eritque semper

$$M + N = \frac{\left(\frac{m}{g} + \frac{n}{g}\right)}{1} A C = \frac{\left(\frac{m'}{g} + \frac{n'}{g}\right)}{1} C A$$

$$= \frac{\left(\frac{m''}{h} + \frac{n''}{h}\right)}{1} A C = \frac{\left(\frac{m'''}{h} + \frac{n'''}{h}\right)}{1} C A = \text{\&c. usque ad}$$

infinitum: & in hoc casu signum ( = ) eam perfectam indicat æqualitatem, quam semper universim Methodus nota huic signo tribuit. Verum cum eodem jure singulæ istæ formulæ summam fluentium systematis S Y repræsentare pos-sint ac debeant; in hoc casu mutato singularum fluentium $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$ valore, mutatur statim & in singulis formulis valor; nec amplius æquationes superiores eamdem inter se æqualitatem servare possunt. Ergo prædictæ formulæ si referantur ad systema S A perfectam inter se obtinent æqualitatem; si vero systemati S Y tribuantur, differunt inter se valore mirum quantum! nec alio vinculo inter se conjungi possunt, nisi illo, quo homologæ copulantur. Sed nihil obstat quominus alterutri systemati propriæ tribuantur; ergo manifeste evincitur dupla hujusce signi ( = ) notio, quæ ad ravim usque sed frustra semper inculcavi, ita necessaria, ut altera sine alterius dispendio nequeat reprobari: quod enim æquale est in uno systemate, est prorsus inæquale in altero: sunt igitur hæ duæ diversæ hujusce signi ( = ) notiones eodem modo inter se consociatæ, quo systemata ipsa S A, & S Y intime uniuntur. Hinc ex gravissimo hoc errore, quo imbuta non nisi primam perfectæ æqualitatis huic signo ( = ) notionem tribuit Methodus nota, sæpe ac sæpius fit, ut quod finitum, ac etiam infinitum natura sua est, credatur revera esse zero: quemadmodum contingit illis formulis, quæ singulis terminis positivis constantes zero æquiparatæ ipsæ identicæ in nihilum abire creduntur, non illæ quibus comparantur: hinc illa perversa universim recepta opinio in vulgari methodo clam irrepsit ac impune debacchatur, qua scilicet quod est vere positivum in nihilum abire posse creditur, quin naturam mutet: ex quo necessario consequitur positivum æquale negativo, atque inde reale æquale imaginario, quod in P$^{e}$. I$^{a}$. penitus profligatum dedimus. Crescit error atque confusio si æquatio superior terminorum transpositione more com-

muni

muni a summa fluentium ad earum differentiam exprimendam transferatur, ut fit, retento systemate S A ( *Fig.* 20. )

$$M - N = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{n}{g} - \frac{n'}{g}\right)}{1} AC = \dfrac{\left(\frac{m}{g} - \frac{m'}{g}\right)}{1} AC = \\ \dfrac{\frac{n}{g} AC - \frac{m'}{g}}{1} AC = \dfrac{\left(-\frac{m}{g} + \frac{n'}{g}\right)}{1} AC = \&c. \\ AB - CB' = AB' - CB = \\ AB - AB' = -CB + CB' = \&c. \end{cases}$$

in quibus si Methodum communem audias, ac utaris formulis analyticis, invenies ex primis $o = o$, ( cum fluentes eodem symbolo enunciatæ semper tamquam æquales & identicæ vulgo sumantur ) quæ sequuntur non item. Quod si lineis A B, C B utaris, in eosdem prorsus scopulos incides, ex quibus ut extraharis frustra Methodi vulgaris opem implores.

§. 16. Quod vero nequit Methodus nota, vide quam facile, atque opportune in hisce angustiis suppetias ferat mea hæc nova Theoria. Hæc enim primum docet, propositis formulis, statuendum esse rectum ac certum indicium, quo dignosci possit natura systematis, ad quod referuntur: hoc enim neglecto cætera in lubrico posita corruunt. Criterium vero hoc ( quis crederet! ) non nisi ab unitate ipsa loco denominatoris posita, qua semper afficiendæ sunt superiores coefficientium formulæ, est repetendum. Licet enim ( 1 ) eadem semper perseveret, tam si primum detrahatur, deinde addatur; quam si addatur primum ac postea detrahatur aliqua ipsius unitatis pars; ex hac tamen diversa dividendi in partes duas unitatem loco denominatoris positam ratione, diversam utriusque systematis naturam exoriri superius ostendimus. Quare ex proposita summa duorum coefficientium fluentium $\dfrac{\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{1} = \dfrac{\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{\frac{n}{g} + \left(1 - \frac{n}{g}\right)} = \dfrac{1 - \left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{m}{g}}{1}$ facta actu divisione, fit $\dfrac{\frac{n}{g} + \left(1 - \frac{n}{g}\right)}{1} = 1 = \dfrac{\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{1}$ : summa scilicet fluentium constans & systema S A. At si fiat $\dfrac{\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{1}$

$=$

$$= \frac{\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{-\frac{n}{g} + \left(1 + \frac{n}{g}\right)} = \frac{-1 + \left(1 + \frac{n}{g}\right) + \frac{m}{g}}{1}, \text{ fit } \frac{\frac{n}{g}}{1} = \frac{-1 + \left(1 + \frac{n}{g}\right)}{1}$$

& $1 = \frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}}{1}$ differentia constans & systema SY. Quare &

hic liquido constat quantum intersit coefficientes numericos per denominatorem (1) dividere, cum ex ipsius diversa forma $\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}$, vel $\left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}$, sine valoris dispendio, determinetur systematum natura, & eorum diversæ proprietates: aut determinata natura systematis ea forma denominatoris (1) ipsi applicetur, quam necessario requirit.

§. 17. Hisce explicatis facile est propositam summam $m + n$ duorum coefficientium fluentium in eam conformare formam, quam requirit systema S A. Dividatur primum per numerum $g$ arbitrio sumptum summa $m + n$, ut sit $m = \frac{m}{g}$, $n = \frac{n}{g}$, & $\frac{m + n}{1} = \frac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{1}$ fractiones in hoc systemate singulæ unitate minores, ut innotescat in quot partes divisa intelligatur ipsa unitas, quæ superiores fluentes simul sumptas exhaurit: ex qua divisione statim apparet esse $\frac{m}{g} = 1 - \frac{n}{g}$, & $\frac{n}{g} = 1 - \frac{m}{g}$, ut explicavimus Capp. I, & II. Deinde fiat

$$\frac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{1} = \frac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + \left(1 - \frac{m}{g}\right)}$$

$$= \frac{1 - \left(1 - \frac{m}{g}\right) + \frac{n}{g}}{1} : \text{vel } \frac{\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{\frac{n}{g} + \left(1 - \frac{n}{g}\right)}$$

$$= \frac{1 - \left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{m}{g}}{1} = \frac{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + \frac{n}{g}} = \frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) + \frac{n}{g}}{1} =$$

$$\frac{\frac{n}{g}+\frac{m}{g}}{\frac{n}{g}+\frac{m}{g}} = \frac{\left(1-\frac{m}{g}\right)+\frac{m}{g}}{1}$$

. Ac tandem posito A C protonumero sive linea data dividenda in duas fluentes M, N, erit M + N

$$= \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{m}{g}+\frac{n}{g}\right)}{1} \cdot AC = \frac{\left(\frac{n}{g}+\frac{m}{g}\right)}{1} \cdot AC = \&c = AC \\
&\frac{\left(\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}\right)}{1} \cdot AC = \frac{\left(\left(1-\frac{m}{g}\right)+\frac{m}{g}\right)}{1} \cdot AC = \&c = AC \\
&\frac{\left(\left(\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}\frac{CA}{AC}\right)+\frac{n}{g}\frac{CA}{AC}\right)}{1} \cdot AC = \frac{\left(\left(\frac{AC}{AC}-\frac{m}{g}\frac{CA}{AC}\right)+\frac{m}{g}\frac{CA}{AC}\right)}{1}\, AC = \&c = AC \\
&(AC - CB) + CB = (AC - CB') + CB' = \&c = AC \\
&\quad AB + CB = AB' + CB' = \&c = AC \\
&\frac{\left(\frac{m}{g}+\frac{n}{g}\right)}{1} \cdot CA = \frac{\left(\frac{n}{g}+\frac{m}{g}\right)}{1} \cdot CA = \&c = CA \\
&\frac{\left(\left(1-\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}\right)}{1} \cdot CA = \frac{\left(\left(1-\frac{m}{g}\right)+\frac{m}{g}\right)}{1} \cdot CA = \&c = CA \\
&\frac{\left(\left(\frac{CA}{CA}-\frac{n}{g}\frac{AC}{CA}\right)+\frac{n}{g}\frac{AC}{CA}\right)}{1} \cdot CA = \frac{\left(\left(\frac{CA}{CA}-\frac{m}{g}\frac{AC}{CA}\right)+\frac{m}{g}\frac{AC}{CA}\right)}{1}\, CA = \&c = CA \\
&(CA - AB'') + AB'' = (CA - AB''') + AB''' = \&c = CA \\
&\quad CB'' + AB'' = CB''' + AB''' = \&c = CA
\end{aligned} \right.$$

quæ usque ad infinitum produci possunt æquales singulæ eidem semper constanti pro-

protunumero A C, vel mutata directione C A. Verum si fiat $\frac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{1} = \frac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{(1+\frac{m}{g})-\frac{m}{g}}$, erit $\frac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{-\frac{m}{g}+(1+\frac{m}{g})} = \frac{-1+(1+\frac{m}{g})+\frac{n}{g}}{1} = \frac{-1+\frac{n}{g}+\frac{n}{g}}{1}$; & $\frac{\frac{n}{g}+\frac{m}{g}}{-\frac{n}{g}+(1+\frac{n}{g})} = \frac{-1+(1+\frac{n}{g})+\frac{m}{g}}{1} = \frac{-1+\frac{m}{g}+\frac{m}{g}}{1}$. Si vero actu dividatur, erit $\frac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}} = \frac{1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{1}$; & $\frac{\frac{n}{g}+\frac{m}{g}}{\frac{n}{g}-\frac{m}{g}} = \frac{(1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}}{1}$: quæ singulæ formulæ remanent fluentes, ac infinitimode variare inter se valore possunt; neque æquales fiunt nisi ponatur tam $\frac{n}{g}$, quam $\frac{m}{g}$ ejusdem valoris. Quare cum hujusmodi coefficientium summa, hoc ultimo modo conformata unitate denominatoris, & actu divisione peracta, fiat fluens, patet etiam fluentium summam fluentem fieri oportere: atque ideo M + N longe abesse ab eo, quem supra invenimus universim constantem valorem. Quæ conditio cum sit tantum propria systematis S Y, en quomodo a simplici denominatoris ( 1 ) diversa dispositione a systemate S A ad systema S Y delati fuimus.

§. 18. Illud etiam observandum ex diversa denominatoris ( 1 ) præparatione in eodem systemate S Y invenisse nos peracta divisione in primo casu quotientes $\frac{(-1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{1}$, $\frac{(-1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}}{1}$: in secundo casu quotien-

tientes $\frac{(1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}}{1}$, $\frac{(1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}}{1}$, quibus docemur in primo casu $\left(\frac{n}{g}\right)$, vel $\left(\frac{m}{g}\right)$ esse coefficientem fluentis majoris, & $\frac{m}{g}$, vel $\frac{n}{g}$ minoris: contra vero in secundo casu $\frac{n}{g}$, vel $\frac{m}{g}$ esse coefficientem minoris, $1+\frac{n}{g}=\frac{m}{g}$, vel $1+\frac{m}{g}=\frac{n}{g}$ coefficientem fluentis majoris: Et sane, prima $\frac{m}{g}+\frac{n}{g}=(-1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}$, ergo $\frac{n}{g}-\frac{m}{g}=1$: vel $\frac{n}{g}+\frac{m}{g}=(-1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}$; ergo $\frac{m}{g}-\frac{n}{g}=1$: hinc $(-1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}$; $(-1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}$ nunquam fieri possunt negativæ. In secundo vero casu $\frac{m}{g}+\frac{n}{g}=(1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}$, ergo $\frac{m}{g}-\frac{n}{g}=1$; vel $\frac{n}{g}+\frac{m}{g}=(1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}$; ergo $\frac{n}{g}-\frac{m}{g}=1$. Itaque in primo casu $m+n=\frac{\frac{n}{g}+(\frac{n}{g}-1)}{1}$, $m$ major $=\frac{\frac{n}{g}}{1}$, $n$ minor $=\frac{\frac{n}{g}-1}{1}$: vel $m+n=\frac{\frac{m}{g}+(\frac{m}{g}-1)}{1}$, $m$ major $=\frac{\frac{m}{g}}{1}$, $n$ minor $=\frac{\frac{n}{g}-1}{1}$. In secundo casu $m+n=(1+\frac{n}{g})+\frac{n}{g}$, $m$ major $=1+\frac{n}{g}$, $n$ minor $=\frac{\frac{n}{g}}{1}$: vel $m+n=(1+\frac{m}{g})+\frac{m}{g}$, $m$ major $=1+\frac{m}{g}$, $n$ minor $=\frac{m}{g}$. Quare consequitur formulam summæ coefficientium

in S Y esse $m+n = \dfrac{\left(1+\frac{n}{g}\right)+\frac{n}{g}}{1} = \dfrac{\left(1+\frac{m}{g}\right)+\frac{m}{g}}{1} = \dfrac{\frac{n}{g}+\left(\frac{n}{g}-1\right)}{1}$

$= \dfrac{\frac{m}{g}+\left(\frac{m}{g}-1\right)}{1}$: dummodo advertas in istis formulis unitate positiva affectis fluentem, quæ in istis continetur, fluentis minoris naturam induere: contra vero in formulis unitate negativa affectis majorem fluentem repræsentare. Itaque facilis est transitus a fluente minori ad majorem, vel contra, sola mutatione signi ( $+$ ) in ( $-$ ); vel contra, unitati præfixi. Ita præparatis coefficientibus numericis facile est fluentium ipsarum summam hujusce systematis S Y invenire. Erit enim ( *Fig.* 21 ) $M + N = \left(\dfrac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{1}\right) AC$

$$= \left\{\begin{array}{lcl}
\dfrac{\left(1+\frac{n}{g}+\frac{n}{g}\right)}{1} \cdot AC & = & \dfrac{\left(\frac{n}{g}+\left(\frac{n}{g}-1\right)\right)}{1} \cdot AC \\[2ex]
\dfrac{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}\frac{CD}{AC}+\frac{n}{g}\frac{CD}{AC}\right)}{1} AC & = & \dfrac{\left(\frac{n}{g}\frac{AC}{AC}+\left(\frac{n}{g}\frac{AC}{AC}-\frac{AC}{AC}\right)\right)}{1} AC \\[2ex]
(AC+CB)+CB & = & AB+(AB-AC) \\
AB+CB & = & AB+CB \\
AB+AB'=BB' & = & AB+AB'=BB'
\end{array}\right.$$

vel $N + M = \left(\frac{n}{g}+\frac{m}{g}\right) CA$

$$= \left\{\begin{array}{lcl}
\dfrac{\left(1+\frac{n}{g}+\frac{n}{g}\right)}{1} \cdot CA & = & \dfrac{\left(\frac{n}{g}+\left(\frac{n}{g}-1\right)\right)}{1} \cdot CA \\[2ex]
\dfrac{\left(\frac{CA'}{CA}+\frac{n}{g}\frac{AD'}{CA}+\frac{n}{g}\frac{CA}{CA}\right)}{1} CA & = & \dfrac{\left(\frac{n}{g}\frac{CA}{CA}+\left(\frac{n}{g}\frac{CA}{CA}-\frac{CA}{CA}\right)\right)}{1} CA \\[2ex]
(CA+AB')+AB' & = & CB'+(CB'-CA) \\
CB'+AB' & = & CB'+AB' \\
B'C+CB=B'B & = & B'C+CB=B'B.
\end{array}\right.$$

po-

posito C D = A C; A D′ = C A. In quibus singulis formulis quoties mutatur singularum fluentium valor, mutatur etiam valor summæ M + N fluentium ipsarum. Illud etiam observandum coefficientes singulos utriusque systematis S A, S Y, cum sint fluentes, non posse valore uno dato ac necessario affici, adeoque non nisi limites ipsorum determinari posse. Porro cum hujusmodi limites unius systematis longe distent a limitibus alterius, sit etiam necesse est diversa singularum fluentium forma, prout diversum est systema, ad quod pertinent. Quæ forma diversa singularum a diversa denominatoris $(1+\frac{n}{g})-\frac{n}{g}$, vel $(1-\frac{n}{g})+\frac{n}{g}$ præparatione pendet, ut superius demonstravimus.

§. 19. Nunc in formula §. superioris $\dfrac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{1}=\dfrac{\frac{m}{g}+\frac{n}{g}}{1}$ alteruter terminus signo negativo afficiatur, vel quod idem est, fiat terminorum transpositio, ut se exhibeat $m-n=\dfrac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{1}=\dfrac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{1}$, sive æqualis differentiæ coefficientium homologarum fluentium. Ut ex hisce aliquid legitime erui possit, diversa denominatoris (1) conformatione determinandum est prius systema: quemadmodum §. 14. ostendimus. Facta igitur $\dfrac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{1}$

$$=\frac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{\frac{m}{g}+(1-\frac{m}{g})}=\frac{1-(1-\frac{m}{g})-\frac{n}{g}}{1}=\frac{1-\frac{n}{g}-\frac{n}{g}}{1};$$

$$\&\ \frac{\frac{n}{g}-\frac{m}{g}}{1}=\frac{\frac{n}{g}-\frac{m}{g}}{\frac{n}{g}+(1-\frac{n}{g})}=\frac{1-(1-\frac{n}{g})-\frac{m}{g}}{1}$$

$=\dfrac{1-\frac{m}{g}-\frac{m}{g}}{1}$, determinatum est statim systema S A, & $\dfrac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{1}$, vel

vel $\frac{\frac{n}{g} - \frac{m}{g}}{1}$ est differentia coefficientium fluentium hujusce systematis homologarum.

Posita $\frac{m}{g} > \frac{n}{g}$, hoc est, $> \frac{g}{2g} = \frac{1}{2}$, formula $\frac{\frac{m}{g} - \frac{n}{g}}{1}$ est positiva; contra negativa si ponatur $\frac{m}{g} < \frac{n}{g}$. Rursus data $\frac{n}{g} - \frac{m}{g}$, si ponatur $\frac{n}{g} > \frac{m}{g}$, sive $> \frac{g}{2g} = \frac{1}{2}$ formula est positiva, negativa si $\frac{n}{g} < \frac{m}{g}$. Sed $\frac{\frac{m}{g} - \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})} = \frac{-\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{\frac{n}{g} + (1 - \frac{n}{g})}$: actu itaque divisione facta prima dabit $(1)^{am}$ $\frac{\frac{m}{g} - \frac{n}{g}}{1} = \frac{(1 - \frac{n}{g}) - \frac{n}{g}}{1}$

$= \frac{(-1 + \frac{m}{g}) + \frac{m}{g}}{1}$: ac eodem modo divisa $\frac{\frac{n}{g} - \frac{m}{g}}{\frac{n}{g} + (1 - \frac{n}{g})}$

$= \frac{-\frac{m}{g} + \frac{n}{g}}{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})}$ oritur $(2)^{a}$ $\frac{\frac{n}{g} - \frac{m}{g}}{1} = \frac{(1 - \frac{m}{g}) - \frac{m}{g}}{1}$

$= \frac{(-1 + \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}}{1}$: in quarum $(1)^{a}$ posita $\frac{m}{g} > \frac{n}{g}$, & in $(2^{a})$ posita $\frac{n}{g} > \frac{m}{g}$, sunt ambæ positivæ: contra vero si sit in $(1^{a})$ $\frac{m}{g} < \frac{n}{g}$; in $(2)^{a}$ $\frac{n}{g} < \frac{m}{g}$, erunt ambæ negativæ. Sed posita in $(1)^{a}$ $\frac{m}{g} < \frac{n}{g}$, sit

fit $\frac{-\left(\frac{m}{g}-\frac{n}{g}\right)}{1}=\frac{-1+\frac{n}{g}+\frac{n}{g}}{1}=\frac{1-\frac{m}{g}-\frac{m}{g}}{1}$, sive

$\frac{\frac{n}{g}-\frac{m}{g}}{1}=\frac{-1+\frac{n}{g}+\frac{n}{g}}{1}=\frac{1-\frac{m}{g}-\frac{m}{g}}{1}$ quæ est æquatio ( 2 )[a]: ergo quæ erat negativa in primo casu, fit positiva in secundo, & viceversa. Sed fluentes a duobus punctis oppositis sibi obviam occurrunt: ergo quando in ( 1 )[a] $\frac{m}{g}$ fit minor $\frac{n}{g}$ ( in quo casu formulæ 1 [a]. fiunt negativæ ) confugiendum est ad ( 2 )[am], in qua formulæ ambæ sunt positivæ, sive a puncto A transitus fit ad alterum originis oppositum punctum C, vel viceversa. Differentia vero hujusmodi fluentium $\frac{m}{g}-\frac{n}{g}$, vel $\frac{n}{g}-\frac{m}{g}$ ( excepto casu in quo alterutra est zero ) semper est minor unitate. Ex ipsa vero formularum ( peracta divisione ) natura, quibus æquantur hujusmodi differentiæ, oculis ipsis patet, numquam inter hasce diversas æqualitatem intercedere posse, nisi singuli coefficientes $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$ sint ejusdem valoris: ac proinde mutatis hujusmodi coefficientibus eorum differentia mutetur oportet, ac in singulis casibus fit fluens.

§. 20. Quod si formula $\frac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{1}$ referatur ad systema S Y, sive hæc dividatur per $\left(1+\frac{n}{g}\right)-\frac{n}{g}$; erit $\frac{-\frac{n}{g}+\frac{m}{g}}{-\frac{n}{g}+\left(1+\frac{n}{g}\right)}$

$=\frac{1-\left(1+\frac{n}{g}\right)+\frac{m}{g}}{-\frac{n}{g}+\left(1+\frac{n}{g}\right)}=\frac{1-\frac{m}{g}+\frac{m}{g}}{1}$ : quod si fiat actu divisio

formulæ $\frac{\frac{m}{g}-\frac{n}{g}}{-\frac{m}{g}+\left(1+\frac{m}{g}\right)}$, erit quotiens $=\frac{-1+\left(1+\frac{m}{g}\right)-\frac{n}{g}}{1}$

=

$= \frac{(-1+\frac{n}{g}) - \frac{n}{g}}{1}$. Igitur in primo casu $\frac{m}{g}$ coefficiens major fluens $= 1 + \frac{n}{g}$, & $\frac{\frac{m}{g} - \frac{n}{g}}{1} = 1$; in secundo $\frac{n}{g}$ fluens major, & $\frac{m}{g}$ minor, sive $\frac{n}{g} - 1 = \frac{m}{g}$, & $\frac{n}{g} - \frac{m}{g} = 1$: atque ideo in primo casu $\frac{1 - \frac{m}{g} + \frac{m}{g}}{1} = \frac{(\frac{m}{g} - \frac{n}{g} - \frac{m}{g}) + \frac{m}{g}}{1} = \frac{-\frac{n}{g} + \frac{m}{g}}{1} = 1$ positiva: at in secundo $-1 + \frac{n}{g} - \frac{n}{g} = -1 = \frac{m}{g} - \frac{n}{g}$, sed $\frac{n}{g} > \frac{m}{g}$, ergo differentia constans sed negativa; quo docemur denominatorem ponendum esse $= (1 + \frac{n}{g}) - \frac{n}{g}$ si sit $\frac{m}{g} > \frac{n}{g}$, & $\frac{n}{g}$ minor fluens: contra vero si sit $\frac{n}{g} > \frac{m}{g}$, ponendum $= (1 + \frac{m}{g}) - \frac{m}{g} = \frac{\frac{n}{g} - \frac{m}{g}}{1}$. Ergo erit in primo casu $\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g}) = \frac{m}{g} - (\frac{m}{g} - 1) = \frac{m}{g} - \frac{n}{g} = (1 + \frac{n}{g}) - \frac{n}{g}$; in secundo $\frac{n}{g} + (1 - \frac{n}{g}) = \frac{n}{g} - (\frac{n}{g} - 1) = \frac{\frac{n}{g} - \frac{m}{g}}{1} = \frac{(1 + \frac{m}{g}) - \frac{m}{g}}{1}$: quo fit permutatio fluentium, ut quæ erat major fluens fiat minor & viceversa, obtineturque transitus ab una ad alteram oppo-

posi-

positam plagam si eodem protonumero utaris. Erit enim $\frac{\left(\frac{m}{g}-\frac{n}{g}\right)}{1}\cdot AC$

$$= \frac{\left(\left(1+\frac{n}{g}\right)-\frac{n}{g}\right)}{1}\cdot AC = (\textit{Fig. } 21.)$$

$$\frac{\left(\left(\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}\right)-\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}\right)}{1}\cdot AC = (AC+CB)$$

$- CB = AB - CB = AC$; sed $\frac{\left(\frac{m}{g}-\frac{n}{g}\right)}{1}\cdot AC$

$$= \frac{\left(\frac{m}{g}-\frac{n}{g}\right)}{1}\cdot(-CA) = \frac{\left(\frac{n}{g}-\frac{m}{g}\right)}{1}\cdot CA$$

$$= \frac{\left(\left(1+\frac{m}{g}\right)-\frac{m}{g}\right)}{1}\cdot CA$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{CA}{CA}+\frac{m}{g}\,\frac{AD'}{CA}\right)-\frac{m}{g}\,\frac{AD'}{CA}\right)}{1}\cdot CA = (CA+AB')-AB'$$

$= CB' - AB' = CA$. Animadvertas velim quam facile ex eadem formula unam tantum fluentem continente transitus fiat, eodem retento symbolo, a majori ad minorem fluentem & viceversa. Nam in formula $\frac{\frac{m}{g}-\left(\frac{m}{g}-1\right)}{1}$ fluens $\frac{m}{g}$ est coefficiens majoris fluentis, cum sit $\frac{m}{g}-1=\frac{n}{g}$, & $\frac{m}{g}=1+\frac{n}{g}$: sed facta $\frac{\frac{m}{g}-\left(\frac{m}{g}-1\right)}{1}=\frac{\left(1+\frac{m}{g}\right)-\frac{m}{g}}{1}$, $\frac{m}{g}$ evadit minor fluens, cum sit $1+\frac{m}{g}=\frac{n}{g}$. Hisce demonstratis luce clarius patet in hoc systemate S Y differentiam fluentium homologarum M − N, vel

N — M semper constantem esse, & æqualem protonumero A C, vel C A quocumque modo mutetur valor singularum $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$, dummodo $\frac{m}{g} - \frac{n}{g}$ vel $\frac{n}{g} - \frac{m}{g}$ sit semper constans $= 1$: hæc tamen differentia in systemate S A semper unitate minor est tamen fluens atque toties valorem mutat, quoties fluentium $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$ valores singillatim mutantur ea lege, ut sit semper $m + n = g$ constans. Hinc quemadmodum §. 14 summa M + N, quæ constans est in systemate S A, fit fluens in systemate S Y; ita viceversa differentia fluentium in systemate S A fluens, in systemate S Y fit constans: quibus semper magis confirmantur quæ illic diximus, & in P^e^. I^a^. Cap. IV. compendio exhibuimus, de hoc signo ( = ): quibus si addatur ab uno systemate ad aliud nos transferri sola transpositione fluentis $(+\frac{n}{g})$ loco $(-\frac{n}{g})$ & viceversa, quæ continetur in communi denominatore $(1 - \frac{n}{g}) + \frac{n}{g}$, constabit necessitas hujusce diversæ notionis huic signo ( = ) tribuendæ.

§. 21. Ut vero in systemate S A tollatur ambiguitas directionis, ac formulæ summam fluentium complectentes vere sint homologæ, & puncta originis propria exacte exhibeant, revocetur denominator $(1 - \frac{m}{g}) + \frac{m}{g}$ hujusce systematis proprius; & sumptus coefficiens unius fluentis $\dfrac{\frac{m}{g}}{\frac{m}{g} + (1 - \frac{m}{g})}$ dabit facta divisione $\dfrac{1 - (1 - \frac{m}{g})}{1}$, & coefficiens alterius homologæ $\dfrac{\frac{n}{g}}{\frac{n}{g} + (1 - \frac{n}{g})}$ dabit $\dfrac{1 - (1 - \frac{n}{g})}{1}$. Hoc modo præparata formula, ac primo termino ducto in A C, secundo in C A, erit (*Fig.* 20) M + N =

$$=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(1-\left(1-\frac{m}{g}\right)\right).\,AC}{1}+\dfrac{\left(1-\left(1-\frac{n}{g}\right)\right).\,CA}{1} \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{AC}{AC}-\left(\frac{AC}{AC}-\frac{m}{g}\,\frac{CA}{AC}\right)\right)AC}{1}+\dfrac{\left(\frac{CA}{CA}-\left(\frac{CA}{CA}-\frac{n}{g}\,\frac{AC}{CA}\right)\right)CA}{1} \\[2ex] (AC-CB')\quad+\quad(CA-AB') \\ (AB'\;+\;CB')\quad=\quad AC \end{array}\right.$$

vel primo termino ducto in C A, secundo in A C, erit N + M

$$=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(1-\left(1-\frac{m}{g}\right)\right).\,CA}{1}+\dfrac{\left(1-\left(1-\frac{n}{g}\right)\right).\,AC}{1} \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{CA}{CA}-\left(\frac{CA}{CA}-\frac{m}{g}\,\frac{AC}{CA}\right)\right)CA}{1}+\dfrac{\left(\frac{AC}{AC}-\left(\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}\,\frac{CA}{AC}\right)\right)AC}{1} \\[2ex] (CA-AB)\quad+\quad(AC-CB) \\ (CB+AB)\quad=\quad CA \end{array}\right.$$

in quibus positis coefficientibus primæ $\frac{m}{g}=\frac{m}{g}$ secundæ; & $\frac{n}{g}$ primæ $=\frac{n}{g}$ secundæ: erit $AB'=CB$; & $CB'=AB$, vere homologæ in propria formula: at facto $\frac{m}{g}$ primæ $=\frac{n}{g}$ secundæ, & $\frac{n}{g}$ primæ $=\frac{m}{g}$ secundæ, erit $AB=CB'$, & $CB=AB'$: & $(AC-CB)+(CA-AB)=AB+CB=(CA-AB')+(AC-CB')=CB'+AB'$: & hac cujuscumque fluentis separatione vere nullescunt in prima $AC-AC$; $CA-CA$ in secunda, cum in singulis quæ signo contrario afficiuntur sint vere æquales & identicæ. Verum si demenda sit fluens C B a sua homologa A B, vel A B a C B, hoc est quærenda sit differentia fluentium homologarum, tunc animadvertendum est, necesse esse ad veram subtractionem obtinendam, ut C B ex puncto originis C transeat in punctum originis A, sitque A B': vel A B transeat in punctum originis C, sitque C B', ut habeatur in primo casu $AB-CB=AB-AB'=B'B$; in secundo $AB-CB=CB'-CB=BB'=-B'B$: diverso modo nunquam actu & in

R 2 con-

constructione vera fluentium differentia obtineri poterit. Ut vero formulæ ad hanc quam quærimus differentiam consequendam conformentur, satis est data fluentium homologarum summa, quæ a diverso semper originis puncto proficiscuntur ad alterutrum originis punctum utramque traducere: ex quo summa ex: gr: $AB + CB$ convertitur in $AB - AB' = B'B$, vel $-CB' + CB$

$= -CB + BB' + CB = -BB' = B'B$. Vel sumptæ $\frac{\frac{m}{g}\cdot AC}{1}$

$+ \frac{\frac{n}{g}\cdot CA}{1}$ reducantur singulæ ad $AC$ vel $CA$, ita ut sit $\frac{\frac{m}{g}\cdot AC}{1}$

$+ \frac{\frac{n}{g}\cdot - AC}{1} = \frac{\frac{m}{g} AC - \frac{n}{g} AC}{1} = AB' = AB' = B'B$, vel

$\frac{\frac{m}{g} AC + \frac{n}{g} CA}{1} = \frac{-\frac{m}{g} CA + \frac{n}{g} CA}{1} = -CB' + CB$

$= -BB' = B'B$. Vel $\frac{m}{g} AC - \frac{n}{g} AC = \left(\frac{-1 + \frac{m}{g} + \frac{m}{g}}{1}\right) \cdot AC$

$= \left(\frac{\left(1 - \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}}{1}\right) \cdot AC$ ut ostendimus §. 18. in quibus si sit

$\frac{m}{g} < \frac{n}{g}$ sunt ambæ negativæ: sed facta permutatione in formulis substituatur

pro $\frac{m}{g}$, $\frac{n}{g}$; & pro $\frac{n}{g}$, $\frac{m}{g}$ sive supponatur $\frac{m}{g} > \frac{n}{g}$, crit

$\frac{\left(-1 + \frac{n}{g} + \frac{n}{g}\right)}{1} \cdot AC = \frac{\left(1 - \frac{m}{g} - \frac{m}{g}\right)}{1} \cdot AC$ ambæ positivæ

$-\frac{m}{g} AC + \frac{n}{g} AC = -AB' + AB = \frac{n}{g} AC - \frac{m}{g} AC$

$=$

$$= AB - AB' = B'B : \& \; \frac{\left(-1 + \frac{n}{g} + \frac{n}{g}\right)}{1} . CA = \frac{\left(1 - \frac{m}{g} - \frac{m}{g}\right)}{1} . CA$$

$$= \frac{- \frac{m}{g} CA + \frac{n}{g} CA}{1} = \frac{\frac{n}{g} CA - \frac{m}{g} CA}{1} = CB + CB'$$

$= CB' - CB = B'B$; quo modo vitatur negativum. In systemate vero S Y, in quo differentia est semper constans; facile est a formula differentiæ fluentium ad formulam summæ earumdem transitum facere. Nam data differentia

$$\left(\frac{\left(1 + \frac{n}{g}\right) - \frac{n}{g}}{1}\right) . AC = \left(\frac{\left(\frac{AC}{AC} + \frac{n}{g}\frac{CD}{AC}\right) - \frac{n}{g}\frac{CD}{AC}}{1}\right) AC =$$

$$AC + \frac{n}{g} CD - \frac{n}{g} CD = (AC + CB) - CB; \; (\textit{Fig. } 21)$$

si loco CD ponatur — AD' quæ est negativa respectu primæ, erit $AC + \frac{n}{g} CD$

$$- \frac{n}{g} CD = AC + \frac{n}{g} CD + \frac{n}{g} AD' = AC + CB + AB'$$

$= AB' + AC + CB = B'A + AB = B'B$: vel $= BC + CA + AB' = BB'$: aliter si AD' poneretur identica cum AD, haberetur $AC + \frac{n}{g} CD + \frac{n}{g} CD = AC + CB + CB$, quæ ultima CB identica cum antecedente CB summam non auget, ( cum CB superimponatur ipsi CB ) nisi fiat $AC + CB + CB = AC + 2\,CB = AC + Cb$ (posito $Bb = CB$): in hoc tamen casu non haberetur nisi major fluens $AC + Cb = M = Ab$ aucta fluxu $Bb$, non ambarum fluentium homologarum summa.

§. 22. Itaque in systemate S A cum fluentes a diverso originis puncto prorumpentes obviam sibi occurrant, ad habendam earum summam ad diversum originis punctum sunt singulæ referendæ: ut vero ipsarum differentia obtineatur, ad idem originis punctum ambæ referantur oportet: quo facto in eadem directione necessario fluentes subtrahi inter se possunt. Contra vero in systemate S Y, cum vi systematis fluentes a diverso originis puncto enatæ in eadem directione fluant, ad habendam earum differentiam ad diversum originis punctum sunt referendæ, ut obtineri possit subtractio: ad earum vero summam obtinendam utraque ad alterutrum punctum A vel C originis commune est reducenda, ut in diversa distractæ atque invicem distinctæ exhibeant eam, quam quærimus summam. Quapropter in systemate S A fluentes, si quæ sunt ad diversum originis

ginis punctum, ad idem reducantur, a summa transferimur ad differentiam, & viceversa. Contrario prorsus modo in systemate S Y si quæ sunt ad diversum originis punctum ad idem reducantur, a differentia transferimur ad summam: & hæc est prima & una ratio, cur quæ est in altero systemate fluentium summa, sit in altero differentia, & viceversa. Quamobrem ex utraque formula abstracte sumpta $\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}+\frac{n}{g}\right)}}.\,AC$, vel $\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}-\frac{n}{g}\right)}}.\,AC$ tam summa, quam differentia fluentium erui potest: & hoc in utroque systemate. Posita enim (*Fig.* 20) $\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}+\frac{n}{g}\right)}}.\,AC=\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}\,\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}\,\frac{CA}{AC}\right)}}.\,AC$ $=\frac{m}{g}\,AC+\frac{n}{g}\,CA=AB+CB$ habetur summa constans in systemate S A: at quoniam $CA=-AC$, hac facta substitutione orietur $\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}\,\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}\,\frac{AC}{AC}\right)}}.\,AC=\frac{m}{g}\,AC-\frac{n}{g}\,AC=AB-AB'$ differentia fluens: ex qua rursus ad summam transitus fieri potest. Item posito (*Fig.* 21) $\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}-\frac{n}{g}\right)}}.\,AC=\underset{1}{\underline{\left(\frac{m}{g}\,\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}\right)}}.\,AC$

$$=\underset{1}{\underline{\left(\left(1+\frac{n}{g}\right)\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}\right)}}.\,AC=$$

$$\underset{1}{\underline{\left(\left(\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}\right)-\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}\right)}}.\,AC=\left(AC+\frac{n}{g}\,CD\right)$$

$-\frac{n}{g}\,CD=AC$: differentia constans. Verum quoniam $-CD=AD'$, si loco $-\frac{n}{g}\,CD$ ponatur $\frac{n}{g}\,AD'$, erit

$$=\underset{1}{\underline{\left(\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}\,\frac{CD}{AC}+\frac{n}{g}\,\frac{AD'}{AC}\right)}}.\,AC=AC+\frac{n}{g}\,CD+\frac{n}{g}\,AD$$

=

= A C + C B + A B′ = B′ B = B B′ summa fluens. Quæ omnia non sunt nisi Corollaria illorum duorum *Canonum*, quos in P. I. Cap. VII. §. 8 Lib. I. statuimus. Capite tamen sequenti alia methodo ad tollendam ambiguitatem omnem utemur, simulque ostendemus, quibus in casibus præsenti artificio uti cogamur.

§. 23. Hîc etiam loci reddenda est ratio quemadmodum fecimus §. 2. & seqq. respectu systematis S Y, cur in hoc etiam systemate S A coefficientes fluentes singuli sub hac forma $\frac{1 - \frac{n}{g}}{1}$, $\frac{1 - \frac{m}{g}}{1}$ efferendi sint potius, quam sub illa $\frac{g - n}{g}$, $\frac{g - m}{g}$, quæ a communi methodo simplicitate, nescio qua, decepta semper exhibetur. Licet enim quid utilitatis sequatur ex hac, qua afficio forma hujusmodi coefficientes, ex demonstratis liquido constet; tamen ad naturam quantitatis penitius inspiciendam, & ad diversas notiones, quas eadem formula diverse modificata sub se complectitur, cognoscendam, mecum velim animadvertatur, quid revera significet communis fractio $\left(\frac{g - n}{g}\right). A C = \frac{g A C}{g} - \frac{n A C}{g}$. Ac primo nemo non videt primum terminum $\frac{g A C}{g}$ supponere prius existentem lineam integram $g$ A C = X Z ( *Fig.* 22 ) dividendam per $g$, hoc est X Z divisam in tot A C, quot unitates continentur in numero $g$, ut divisa X Z = $g$ A C per $g$ exhibeat $\frac{X Z}{g}$ = A C: quæ proinde A C vicem gerit unitatis linearis, licet cujuscumque valoris sumi possit. Cum vero tam numerus abstractus $g$, quam ipsa unitas sive protonumerus linearis A C quemcumque valorem suscipere possit majorem quocumque dato; numerator $g$ A C supponit prius existentiam illius infiniti nullis terminis circumscripti, quod *absolutum* vocamus, ut ex ipso excerpi possit quantitas X Z = $g$ A C cujuscumque indefiniti valoris in partes A C divisa omnibus omnino, qui dari possunt, valoribus accommodata: hinc patet, quam legitima & necessaria sit illius infiniti notio, a qua §. 1. & seq. eruimus systematis S Y originem ac naturam. Verum cum in hoc systemate S A totum negotium peragatur intra terminos unius A C, vel C D = A C, vel D E = A C &c, licet A C basis systematis prius avulsa concipiatur a quantitate $g$ A C divisa per $g$; tamen ut solitaria, & a sua infinitatis origine omnino semota, & tamquam una in natura censenda, quoties circa proprietates hujusmodi systematis S. A nostrà inquisitio versatur. Supervacaneum igitur est ( nisi ulterius progrediatur inquisitio ) in hoc systemate totam prius sumere $g$ A C postea dividendam per $g$, cum non nisi A C ad libitum determinata ad omnes hujusce systematis affectiones derivandas opus sit. Itaque primus hujusce

jusce coefficientis fluentis terminus debet esse ( 1 ) indivisa ducenda in quemvis protonumerum A C vel C A, a qua detrahenda est $\frac{n}{g}$. A C, vel $\frac{n}{g}$. C A ipsa A C semper minor. Et $\underline{\left(1-\frac{n}{g}\right)}_{1}$. A C $= \underline{\left(\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}\frac{CA}{AC}\right)}_{1}$. A C

designat fluentem unam unitate A C minorem, ac ejus punctum originis A fluens usque ad C, cui ex adverso occurrit $\underline{\left(1-\frac{m}{g}\right)}_{1}$. C A

$= \underline{\left(\frac{CA}{CA}-\frac{m}{g}\frac{AC}{CA}\right)}_{1}$. C A altera homologa a puncto originis C altero extremo dato lineæ A C. Hisce statutis ope etiam denominatoris $1 = 1 - o$ eo modo, quo fecimus, dispositi eruimus veritates superiores in communi methodo prorsus impervias: atque inde majores in progressu Operis eruemus ad hanc scientiam ab erroribus, quibus adhuc ( velint nolint ) scatet, expurgandam, & mirum in modum ulterius provehendam.

§. 24. Interim ex hac geometrica utriusque systematis linearis descriptione ab intima quantitatis essentia superius derivata necessario consequitur primam, qua deinde cæteræ finitæ extensionis notiones nituntur, esse ideam illam infinitatis, quam mens mira prorsus abstractionis facultate, qua prædita est, limitibus omnibus, quibus actualis quantitas circumscribitur, sublatis sibi efformare potest. Hinc ex trina illa dimensione, qua corpora circumstantia necessario afficiuntur, abstractione facta duarum dimensionum, ad simplicissimam illam longitudinis nullis omnino terminis, sive nullis datis punctis definitæ notionem pervenit, ex qua, tamquam ex inexhausto fonte, haurit arbitrio quibuscumque limitibus circumscriptas partiales longitudines. Si enim hac prima nullis terminis definita lineari dimensione mens careret, fieri nequaquam posset, ut lineas cujuscumque longitudinis etiam relative ( ut ajunt ) infinitæ terminis ex arbitratu constitutis conciperet: cum hoc nihil aliud tandem sit, nisi ab hac absoluta lineari infinitate mente concepta eam partem abscindere, qua opus habet, aut lubet. Ex quo fit ut nulla ita major, sed definita excogitari possit linea A C, quæ hanc absolutam infinitatem non dicam superare, sed ne æquare quidem possit: cum notio quæcumque datis conditionibus quocumque modo limitata semper & infinito quodam modo infra sit notionem ejusdem generis absolutam & nullis circumstantiis præfinitam. Verum cum hujusmodi quantitatis terminatæ limites ab arbitrio nostro pendeant, lineam A C ita minui posse mente concipere possumus, ut tandem nulla sit, hoc est in punctum, quo minor nequit esse, sive in *absolutum zero* desinat. Quod *zero* sive hoc *absolutum nihil* in exten-

tenſione lineari mens concipere non poſſet, niſi prius hanc linearis infinitatis notionem ſibi comparaſſet: notiones enim negativæ a carentia notionum poſitivarum prius exiſtentium oriuntur; quæ ſi prius non extitiſſent, nulla ex earum privatione ſequeretur affectio, nulla præexiſtentis notionis negatio. Quamobrem primum ac naturale ſyſtema linearis dimenſionis, quod menti obverſatur, eſt ſyſtema S Y in limite maximo, ſive in infinito; abſcindendo ab hac lineari infinitate prius mente concepta, ubi lubet, lineam cujuſcumque valoris, ſed conſtantem A C duobus punctis A, C datis definitam, quæ tamquam communis menſura, ſive unitas communis totam infinitam linearem dimenſionem ſine fine metiri concipitur. Tantum igitur abeſt, ut *infinitum* hoc *abſolutum* ſit aliquid abſurdum ac repugnans, ut potius ſit unum & idem ac idea abſtracta ſimplicioris dimenſionis, quam mens ſibi comparavit ex dimenſionibus peculiaribus, quibus corpora actu exiſtentia afficiuntur, abſtractione facta ab iis limitibus, intra quos neceſſario circumſcribuntur: ſine qua nec ipſum *abſolutum zero*, hoc eſt carentia abſoluta cujuſcumque dimenſionis, concipi quidem poſſet. Ex duabus igitur abſolutis methodis, *abſoluti* ſcilicet *infiniti*, & *zero abſoluti*, quibus §. 18. Cap. VI. Lib: I. T. I. totum hoc analyticum ædificium ſuperſtrui diximus, illud quod primum mente concipitur eſt illud *infinitum abſolutum* quod a Calculo tamquam abſurdum hactenus reprobatum fuit. Hoc tamen a noſtra methodo, quæ originem fluentium a diverſis punctis lineæ præexiſtentis ab hac infinitate excerptæ oriri demonſtrat, ita evincitur, ut nulla *fluens* in nihilum redigi poſſit, quin altera homologa minima datæ longitudinis in ſyſtemate S Y tamquam portio minima ab hac infinitate avulſa determinetur, quæ tamen in ſyſtemate S A, in quo affectiones omnes intra ejus extrema puncta continentur, maximæ vicem gerit: ex quibus argumentum eruitur invictiſſimum de neceſſaria præexiſtentia linearis dimenſionis abſolutæ mente conceptæ, ut progreſſivo decremento ad zero ſive ad totius dimenſionis carentiam tandem perveniri poſſit.





# CAPUT IV.

*Traditur nova ratio apprime necessaria concinnandi formulas generales fluentium utriusque Systematis.*

§. 1. Ex hisce jactis principiis, atque ex geometrica utriusque systematis descriptione in ipso hujusce novæ Theoriæ limine statim se prodit duplex Officium atque munus Scientiæ analytico-geometricæ ab intima ipsius natura demandatum, nec non ratio, qua una utrumque licet legitime adimplere. Ex dictis enim intelligitur primum ac præcipuum hujusce Scientiæ munus in eo situm esse, ut quæcumque quantitas abstracta symbolis analyticis expressa atque rite præparata ad geometrica traducatur, iisque legibus obstringatur, quibus Geometria ipsa regitur atque moderatur: ut hac naturæ conversione facta, oculis ipsis concipiatur cuinam Loco geometrico regulari ac continuo formula analytica recte disposita universim respondeat. Alterum vero huic inversum ac a primo solidioribus fundamentis primum firmato necessario pendens est, ut affectio geometrica & Locorum descriptio, prima methodo duce, ad eam universim formulam analyticam traducatur, quam ipsa primum sumpta constructio necessario requirit. Ad primum ac præcipuum exequendum munus vulgaris Analysis tota intenditur, cûm præcepta & regulas tradit, quibus formulæ analyticæ ad legitimam æquationem reducuntur, qua liceat universim Locum geometricum, sive Curvam continuam ipsi respondentem invenire: & elementa ex legitima ipsius æquationis solutione calculo analytico eruta simplicioribus ejusdem Loci geometrici elementis repræsentare. Secundo vero muneri satisfacere conatur ipsa vulgaris methodus, quando ex Loco geometrico sibi primum proposito quærit modum, quo ipsum legitima æquatione analytica concludere possit, atque ejus elementa geometrica analyticis formulis rite exhibere.

§. 2. In utroque tamen obeundo munere Analysim, qua nunc utimur (sit tandem veritati locus) imparem omnino esse quisque fateatur oportet, si mecum reputet hanc iis principiis atque præsidiis destitui, quibus ad utrumque rite perficiendum necessario opus esse superioribus Capp: & in P$^{e}$. I$^{a}$. demonstravimus. Quî enim fieri potest, ut æquationum ignorata natura in earum solutione persequenda prospere procedat? quæ enim æquationes indeterminatæ sunt, limitibus tamen certis circumscriptæ, ultra quos in aliam naturam convertuntur, cum a vulgari Methodo determinatæ, quæ sunt in limite, censeantur, quæ vero mediæ ad quoscumque valores subeundos promiscue pares credantur, ac iisdem artificiis tractentur; aperte ostendit earum diversa systemata, nec non leges ex adverso oppositas, quibus utrumque Systema regitur, penitus ignorare. Hinc pro-

proprietates utriusque systematis diversas, limites, qui diversi a diversis æquationibus exhibentur, fluentes, constantes, fluentium diversam configurationem, a qua pendent aut varii existendi modi, aut etiam diversa earum natura (quæ singula in utroque systemate inter se differunt mirum quantum!) simul miscet atque confundit. Ex hac vero harum omnium & singularum rerum perturbatione quid mirum si in falsam, fallacem, absurdam ad geometrica, vel contra ex geometricis ad analytica applicationem impingat? ut tot inde difficultatibus inexuperabilibus implicetur in tantum, ut methodo directa solutionis æquationum prorsus deficiente, a qua ad geometrica manu veluti ducenda esset, cogatur ad inversam methodum se convertere, & a geometricis diversa principiorum ratione nixis quæ sint formulæ analyticæ frustra ac perperam exquirere.

§. 3. Hinc in hac inversa inquisitione cum nullis legibus ducatur, multiplicium Curvarum intersectione inconsulto adhibita nequit veram ac suam fluentibus aptare formam, & Loco geometrico continuo proprio ipsas includere, a quo tantum limites exhibentur: de hoc tantum contenta, si peculiares casus aliquos communi Curvarum intersectione quomodocumque assequatur. Quo fit ut, nescia quo pacto, quæ a lineis geometricis mutuantur, analyticis calculis legitime subigantur, in eam tandem desperationem adducatur, ut quæ a geometricis exhibentur, formulis analyticis realibus repræsentari posse omnino & absolute repugnare contendat. Hinc illa *imaginarii absoluti* absurda notio, ac ejus necessitas: hinc illa falsa *casus irreductibilis* universim confirmata opinio: ut cætera alia ex hac omnimoda principiorum analyticorum ignoratione prorsus impervia nunc prætercam.

§. 4. Quare nostra hæc Theoria nunquam satis pro rei difficultate atque dignitate in tradendis atque explicandis primis artificiis, quibus pro varia systematum, fluentium, dimensionum natura concinnandæ atque conformandæ sunt formulæ, immorari censenda est: cum hoc sit primum ac necessarium hujusce Scientiæ fundamentum, quo niti debet Analysis recte instituta. Hic vero ut ordine progrediamur formulas coefficientium utriusque systematis, in quibus explicandis nos impensius quam par est supra insudasse cuidam forte videbitur, nos iterum cogimur repetere ac in alias mutare formas, ut consecutiones in tota Analysi maxime necessarias superioribus impervias consequamur. Et sane Capite superiori vidimus formulas ex: gr: summæ fluentium $\left(\frac{m}{g}.\frac{AC}{AC}+\frac{n}{g}.\frac{CA}{AC}\right).AC$,

& differentiæ $\left(\frac{m}{g}.\frac{AC}{AC}-\frac{n}{g}.\frac{CA}{AC}\right).AC$ systematis S A non nisi duo extrema puncta A, & C data supponere, integra manente A C ac nullo alio puncto fixo distincta: (idem dicas de formulis systematis S Y illic productis). Ex quo fit ut ex istis formulis generalibus nequeat erui, quæ sit major fluens, quæ minor; & quando major fluendo fiat minor & viceversa; ut in subtractione negativum vitetur: quinimmo ex istis formulis utraque systemata erui posse Cap: sup. §. 17. & *sequentibus* jam animadvertimus. Videndum igi-

tur quomodo hæc omnia & ſingula poſſint obtineri nova formularum configuratione, & quid ex hoc notatu dignum ſequatur.

§. 5. Ut id conſequamur, protonumerus A C bifariam dividatur in B, ut ſit A B = C B ( Tab. I. *Fig.* 23. ) & A C novo dato puncto fixo B diſtincta, in quod cadens utraque fluens a puncto originis A vel C prorumpens neceſſario determinatur ad lineam A B vel C B $= \frac{AC}{2} = \frac{CA}{2}$. Ut vero huic novæ diviſioni aptentur formulæ ſuperiores fluentium ſyſtematis S A ſcilicet $\frac{m}{g} \cdot AC$, $\frac{n}{g} \cdot CA$, fiat $g = m + n$ ( ſcimus enim in hoc ſyſtemate ſummam numeratorum coefficientium homologorum æquari $g$ ); erit igitur $\frac{m}{g} = \frac{m}{m+n}$; & $\frac{n}{g} = \frac{n}{n+m}$. Rurſus fiat $\frac{m}{m+n} = 1 - \frac{n}{m+n}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{m+n} = \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{n}{m+n}$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$; $m > n$: & $\frac{n}{m+n} = 1 - \frac{m}{n+m}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{m}{n+m} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{m}{n+m}$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n+m}\right)$. Statim ex hac ultima formularum modificatione tertii puncti dati B ope oculis ipſis patet utrumque coefficientem duobus conſtare terminis, altero conſtanti & dato $= \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)$, fluente altero $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$: ſed primum $\frac{m}{g}$ eſſe coefficientem majoris fluentis, minoris alterum: inſuper conſtantes eſſe æquales ſed diverſos, quippe primus $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)$ deſignat punctum A, ſecundus $\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)$ punctum C, vel viceverſa; fluentes vero eſſe æquales & identicos, quippe ſinguli $= \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$: ac fluentes ipſas homologas hanc novam ſubire formam

$$\frac{m}{g}.AC = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}_{1}.AC = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)\frac{AC}{AC} + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).\frac{AC}{AC}\right)}_{1}AC$$

=

$$= \frac{AB}{AC} + \left(\frac{m-n}{m+n}\right).\frac{BC}{AC}.AC = AB + \left(\frac{m-n}{m+n}\right)BC = AB + BD = AB + \frac{1}{2}\ D'D\ ;$$

$$\frac{n}{g}.CA = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}_{1}.CA = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right).\frac{CA}{CA} - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).\frac{AC}{CA}\right)}_{1}CA$$

$$= \frac{CB}{CA} - \left(\frac{m-n}{m+n}\right).\frac{BC}{CA}.CA = CB - \left(\frac{m-n}{m+n}\right).BC = CB - BD = CB - \frac{1}{2}\ DD'.$$

Quod ſi $m$, ſit minor $n$

$$\frac{m}{g}.AC = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)\frac{AC}{AC} - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\frac{CA}{AC}\right)}_{1}.AC = AB - \left(\frac{n-m}{n+m}\right).\frac{BA}{AC}.\ AC =$$

$$AB - \left(\frac{n-m}{n+m}\right).\ BA = AB - \frac{1}{2}\ .\ D'D = AB - BD.$$

$$\frac{n}{g}.CA = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)\frac{CA}{CA} + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\frac{CA}{CA}\right)}_{1}.CA = CB + \left(\frac{n-m}{n+m}\right).\frac{BA}{CA}\ .\ CA$$

$$= CB + \left(\frac{n-m}{n+m}\right).\ BA = CB + \frac{1}{2}.\ D'D = AB + BD'$$

Poſito itaque protonumero $AC = d$, ac ſymbolis analyticis elatis fluentibus, erit $\frac{m}{g}\ d = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}_{1}.\ d$ fluens major; $\frac{n}{g}\ .\ d$ $= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}_{1}.\ d$ fluens minor: & contra $\frac{m}{g}\ .\ d$ $= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\right)}_{1}.\ d$ fluens minor; $\frac{n}{g}\ .\ d$ $= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\right)}_{1}.\ d$ fluens major. In utroque caſu in-

fluen-

fluentibus homologis termini conſtantes ſunt diverſi, fluentes identici: ſed in primo caſu $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).d$, a puncto medio dato B originem ſumens directionem conſtantis $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right).d$ ſequitur, quod indicium eſt additionis; fitque $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right).d+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).d}{1} = AB + BD = AD$ fluens major: & in minori $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right).d - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).d}{1}$, terminus fluens $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).d$ eſt in directione oppoſita ipſius $\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right).d$ $= CB$, atque $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).d}{1}$ dat ſubtractionem & fluentem minorem $= CB - BD$: contra vero in ſecundo caſu.

§. 6. Nunc ſumamus fluentes homologas ſyſtematis S Y ſuperioris Cap. (ſcilicet $\frac{m}{g}.d$, $\frac{n}{g}.d$) eo modo præparandas, quo fecimus hic illas ſyſtematis S A, ut requirit tertium punctum datum B: & poſito $\frac{m}{g}$ coefficiente majoris fluentis, $\frac{n}{g}$ minoris, fiat $\frac{m}{g} = \frac{m}{m-n}$; $\frac{n}{g} = \frac{n}{m-n}$ (demonſtravimus enim in hoc ſyſtemate eſſe differentiam fluentium conſtantem): quod ſi $m$ decreſcendo fiat minor $n$, tunc $\frac{m}{m-n}$ fit negativa $= -\frac{m}{g}$, ſive $\frac{m}{n-m} = \frac{m}{g}$ poſitiva minor, & $\frac{n}{g} = -\frac{n}{g}$ negativa major, ſive $\frac{n}{n-m} = \frac{n}{g}$ poſitiva major, ut ſuperiori Cap. ſatis clare explicavimus. Nunc ut huic novæ conditioni aptentur formulæ, fiat actu diviſio hoc ſequenti modo.

$$\frac{m}{m-n} \cdot d = \left(1 + \frac{n}{m-n}\right) d = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{n}{m-n}\right) d$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) + \frac{n}{m-n}\right) d$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) d;$$

I

$$\frac{n}{m-n} \cdot d = \left(-1 + \frac{m}{m-n}\right) d = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{m}{m-n}\right) d$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) + \frac{m}{m-n}\right) d$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)\right) d,$$ quæ applicatæ pro-

I

tonumero $d = AC$, ac lineis expressæ dabunt ( *Fig.* 24. ) $\frac{m}{m-n} \cdot d$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AC} \cdot AC + \frac{1}{2}\left(\frac{AD + AD'}{AC}\right) AC$ fluentem majorem, $\frac{n}{m-n} \cdot d = -\frac{1}{2} \cdot \frac{CA}{AC} \cdot AC + \frac{1}{2}\left(\frac{AD + AD'}{AC}\right) AC$ fluentem minorem homologam. Animadvertendum enim in hoc systemate SY, in quo fluentes ambæ a diversis punctis A & C prorumpentes per eamdem partem simul progrediuntur, ut in punctum commune fluens D vel D′ concurrant, terminum fluentem $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) \cdot d$ debere esse in utrisque identicum; & constantem $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) \cdot d$ diversum ( eo pacto quo necessarium id vidimus in SA, ut earum summa sit AC vel CA constans ). Erunt igitur fluentes sequentes homologæ

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AC}\right)AC+\frac{1}{2}\left(\frac{AD+AD'}{AC}\right)AC$$

$$=AB+BD=AD;$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}{1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{CA}{AC}\right)AC+\frac{1}{2}\left(\frac{AD+AD'}{AC}\right)AC$$

$=-CB+BD=CD$ posito in utraque $m>n$.

vel $$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)d}{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{CA}{CA}\right)CA+\frac{1}{2}\left(\frac{CD'+CD}{CA}\right)CA$$

$$=CB+BD'=CD';$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)d}{1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{CA}\right)CA+\frac{1}{2}\left(\frac{CD'+CD}{CA}\right)CA$$

$=-AB+BD'=AD'$ posito in utraque $n>m$.

ut invicem subtractæ, prout diversæ, differentiam A C vel B C simul sumptæ constantem constituant: quæ est conditio absoluta & prima hujusce systematis. Differentia igitur homologarum in primo casu erit $\left(\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m-n}\right)d$ $=AB+BD+BC-BD=AB+BC=AC$; in secundo $\left(\frac{n}{n-m}-\frac{m}{n-m}\right)d=CB+BD'+BA-BD'=CB+BA$ $=CA$. Ut vero habeatur earum summa ad idem punctum A vel C sunt reducendæ, eritque in primo casu $\left(\frac{m}{m-n}+\frac{n}{m-n}\right)d=$ $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{AD+AD'}{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{AD+AD'}{AC}\right)\right)AC=AD+AD'$; in secundo $\left(\frac{n}{n-m}+\frac{m}{n-m}\right)d=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{CD'+CD}{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{CD'+CD}{CA}\right)\right)CA=CD'+CD$, quemadmodum advertimus §. 22 Cap. superioris. In hoc tamen systemate si in utriuf-

utrisque formulis fluentium homologarum ponatur minor quæ erat major & viceversa, tunc erit $\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)}}d = AD$; sive

$$-\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)}}d = -AD = AD'$$

$$-\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)}}d = CD; \text{ sive}$$

$$\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)}}d = -CD = CD': \text{ atque}$$

erit $\frac{m}{m-n}.d = -\frac{m}{m-n}.d = \frac{m}{n-m}.d = \underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)}}d =$

$-\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)}}d$, hæc est fluens major quando $m > n$, minor quando $m < n$: quæ si sumantur identicæ non possunt simul eodem tempore conciliari. Simul vero necessario conveniunt, quando ponuntur diversæ, quia data una altera oriatur necesse est. Nam

$$\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)}}d = AB + BD = \frac{m}{m-n}.d = -$$

$$BC + BD = -\underset{1}{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)}}d = \frac{n}{m-n}.d.$$

Hinc primo ex hac coefficientium homologorum præparatione tertii puncti dati auxilio Criterium tutum eruimus, quo sine erroris periculo, ex sola formulæ inspectione dignosci potest quænam sit major fluens quænam minor.

§. 7. Insuper eadem hæc coefficientium præparatio non solum ostendit quænam sit harum fluentium major, quænam minor; sed etiam evidenter demonstrat eamdem fluentem necessario a majori ad minorem & viceversa continuo fluxu transitum facere oportere: in quo transitu terminus fluens in systemate S A, qui erat positivus, fit negativus; & viceversa: atque ideo, quæ erat sum-

 ma

ma in primo casu sit differentia in secundo & viceversa, sed semper in utroque casu positiva, cum terminus constans sit semper termino fluente major. Et sane facta $\frac{m}{m+n} \cdot d = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) d + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) d}{1}$, hæc statim ostendit hanc esse majorem fluentem, quippe quæ duobus terminis positivis constat, quorum unus est constans dimidium protonumeri, qui cum additione secundi termini fluentis ipsam constituit. Terminus vero fluens $+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1} d$ cum sit dimidium differentiæ, fluentium homologarum limites, quibus ipsa perstringitur oculis ipsis ostendit. Nam evanescente $\frac{m-n}{m+n}$ posito $m = n$, $\frac{1}{2} \cdot d$ est minimus valor, ad quem deprimi potest: decrescente ( $n$ ) infra ( $m$ ) crescit ipsius valor, donec facto $n = o$, fit maxima $= \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot d$. Quod si ( $m$ ) fiat minor ( $n$ ), fluens quidem minuitur, sed cum $\frac{m-n}{m+n}$ evadat negativus $= -\left(\frac{n-m}{n+m}\right)$, minuitur quidem fluens, sed nomen & naturam fluentis majoris amittit, nova formulæ mutatione $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) d - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) d}{1}$, fitque fluens minor intra limites *zero* minimum & $\frac{1}{2} \cdot d$ maximum. Hinc eadem $\frac{m}{m+n} \cdot d$ necessario a duplici hac forma $\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right) d}{1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) d - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) d}{1}$ complectenda est. In systemate vero S Y, in quo est fluens major $\frac{m}{m-n} \cdot d$

=

$= \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}{1}$, donec ( $n$ ) a zero usque ad valorem ( $m$ ) pertingit, constat duobus terminis positivis; quorum constans est minor fluente: ipsa vero fit minima, quando $n = o$, estque $= \frac{1}{2}.\, d + \frac{1}{2}.\, d$; procedente vero ( $n$ ) a *zero* usque ad infinitum crescit ipsa a minimo ( $d$ ) usque ad infinitum; ( $m$ ) semper ( $n$ ) per unitatem superante. Quod si ( $n$ ) crescat supra ( $m$ ), tunc fit $-\frac{m}{n-m}.\, d = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)d}{1}$, hoc est $\frac{m}{n-m}.\, d = -\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)d}{1}$ & hac limitis mutatione fit minor fluens intra limites *zero* & *infinitum* contenta.

§. 8. Quare si communem methodum secuti dicamus $x$ fluentem systematis S A, erit vere $x = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d}{1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)d}{1}$: sed si ponatur ( ut hic est ) $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)$ utrinque identicus, utraque eodem tempore simul nequit consistere: si est enim major non potest esse minor, & viceversa. Formulæ hæ tamen unius ejusdemque fluentis, in quibus termini constantes identici respuunt identitatem terminorum fluentium, proindeque modo diximus utramque simul verificari non posse, facile consociantur, si fiat $x =$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}{1} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1}\right)d = \left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1}\right)d,$$

in quibus termini constantes diversi terminos fluentes identicos necessario requirunt. Hoc itaque artificio fluentes ambæ homologæ designantur, quæ tam intimo nexu inter se colligantur, ut una sine altera existere nequeat: data enim $\frac{m}{m+n}.\, d$

 suam

suam homologam $\frac{n}{n+m}.d$ necessario constituit. Hinc legitime signo $=$ copulantur: tamen neque inter primas, neque inter secundas valorum æqualitatem invenies. Licet in primis sit $x = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d}_{\text{I}}$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)d}_{\text{I}}$ æqualis uni tantum

$\frac{m}{m+n}.d$; tamen prima non potest esse æqualis secundæ, cum ( $m$ ) in termino fluente primæ sit necessario $> n$, at in secunda minor. Idem dicas velim de formulis fluentium homologarum systematis S Y, in quo ex §. superiori $\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}_{\text{I}} = \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right)d}_{\text{I}}$

$= \frac{m}{m-n}.d = \frac{m}{n-m}.d$ prout ( $m$ ) est major vel minor ( $n$ ), quæ tamen simul verificari nequeunt posito ( $m$ ) utrinque identico: sequentes tamen necessario simul conjunguntur $x = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}_{\text{I}}$

$= \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}_{\text{I}}$ utpote homologæ: Sed cum Cap. sup. §. 17 &c ( ut innuimus hic §. 4 ) docuerimus modum, quo ex una tantum formula utraque systemata mutatis limitibus erui possint; patet in methodo communi legitimam & necessariam esse æquationem $x = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)d}_{\text{I}}$

$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)d}_{\text{I}}$ S A $= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)\right)d}_{\text{I}} =$

( —

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)\right)}{1}\,d\ \mathrm{S\,Y}$$, dummodo quæ sunt homologæ ejusdem systematis pro re nata simul conjungas: quæ tamen si efferantur symbolis more communi, dabunt $x = \frac{d}{2} + y = \frac{d}{2} - y = y + \frac{d}{2} = y - \frac{d}{2}$, quas tamen, si Analysim communem consulas, te docebit repugnantiam absolutam involvere, licet necessariæ sint, & communi ( $=$ ) vinculo natura sua consocientur; cum signo ( $=$ ) nonnisi perfectæ æqualitatis notionem affixerit.

§. 9. Illud etiam deterius accedit, quod Analysis communis, ignorata prorsus diversa systematum natura, ac diversis legibus, quibus moderantur, & ad perfectam tantum formularum æqualitatem intenta, eas sæpe ac sæpius signo ( $=$ ) in eodem systemate conjungit, quæ inter se minime conciliari possunt, licet eodem absoluto valore afficiantur. Quod ut clarius intelligatur, animadvertatur oportet, quod in systemate S A terminus fluens $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d$ nullescit in casu $n = m$; fitque maximus $= \frac{1}{2} \cdot d$ quando $n = o$; & in cæteris casibus semper minor termino constanti $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d$: atque ideo nunquam formulæ fluentium fieri possunt negativæ. Contra vero in systemate S Y terminus fluens $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d$ numquam nullescere potest, cum minimus ejus valor sit $\frac{1}{2} \cdot d$ quando $n = o$: crescit vero usque ad infinitum supra $\frac{1}{2} \cdot d$, ac proinde fluens minor nunquam in negativam converti potest. Ex quibus manifeste apparet differentia quæ intercedit maxima inter fluentes homologas S A, & fluentes homologas S Y, quæ inter se natura toto cælo distant, nec forma unius pro alterius forma in eodem systemate substitui rite potest, licet aliquando valore æquentur. Licet enim fluens minor S Y intra limites ( $o$ ) & ( $d$ ) possit eumdem valorem obtinere ac fluens quæcumque systematis S A, tamen inter se forma differunt ita, ut fluens S A sit $\frac{m}{m+n} \cdot d$

$=$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d \pm \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d}{1} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d}{1}$$

$= \frac{n}{m-n} \cdot d.$ S Y. Ponatur ex. gr. utrinque $n = o$, erit

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m}\right)}{1} d \text{ S A} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m}\right) d + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m}\right)d}{1}$$

S Y $= o$: facta vero $n = \frac{1}{3}$, erit $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right)}{1} d$ S A $=$

$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{4-1}{4-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4+1}{4-1}\right)\right)}{1} d$ S Y $= \frac{1}{3}$: & posita $n = \frac{2}{3}$,

erit $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right)}{1} d$ S A $= \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{5-2}{5-2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5+2}{5-2}\right)\right)}{1} d$ SY

$= \frac{2}{3}$; &c. quæ singulæ valore quidem inter se æquantur, forma vero differunt mirum quantum! quæ formulæ utriusque systematis si more communi efferantur, erit æquatio $\frac{1}{2} \cdot d \pm y = -\frac{1}{2} \cdot d + y$, quam Analysis communis tamquam absurdam repudiat. Quare ad incitas ita redigitur, ut quæ valore ( ad quem unice spectat ) signo ( $=$ ) conjungenda semper esse doceat, neget eodem signo ( $=$ ) consociari posse neque esse amplius inter se æqualia, si in diverso systemate constituta propriis systematis, in quo sunt, formulis efferantur. Adde ad augendam repugnantiam, quod ipsa Analysis communis hoc uno æqualitatis criterio in æquationibus concinnandis utens, sæpe ac sæpius in errorem inconsulto incidit gravissimum, cum unam in locum alterius formulam in calculo substituat, quacumque tandem diversa afficiatur forma, dummodo idem valor perseveret. Nam ex dictis patet quam longe a veritate aberret, si in systemate S A constituta, loco ex. gr. formulæ superioris $\frac{1}{2} \cdot d + y$, vel

$\frac{1}{2} \cdot d - y$ reponeret formulam $- \frac{1}{2} \cdot d + y$ æqualeni valore, quæ pertinet tantum ad systema S Y, in quam forte incidisset. Innumera possem, ne longius abessem, exempla a veteri Analysi excerpta in medium proferre hujusce erroris, quæ pro re nata tamen exhibeam. Illud unum hîc sufficiat innuere, ipsam toties in hoc peccare, quoties ad alteram signi ($=$) partem signis ($\pm$) inversis membra æquationis transfert: quod artificium tamen, nescia quæ in systemate, in natura fluentium, in limitibus oriatur mutatio, nulla lege frequentissime usurpat.

§. 10. Hisce in antecessum animadversis antequam ad primas fluentium linearium utriusque systematis operationes ordine tradendas accedamus, sequentes Definitiones, atque Propositiones sunt præmittendæ, quibus & quæ in superioribus Capitibus docuimus maxime necessaria in unum colliguntur, & ad ea, quæ in posterum tradentur, via sternitur.

## DEFINITIO I.

*Protonumerus est quæcumque quantitas geometrica cujuscumque magnitudinis, quæ unitatis geometricæ (hîc linearis) vicem gerit: quia in quocumqne systemate ad libitum sumpta, invariata semper in eodem systemate perseverans tamquam integra & una consideranda est,*

## DEFINITIO II.

§. 11. *Fluentes vero nihil aliud sunt, nisi cofficientes numerici protonumero applicati qui ostendunt, quot partes istius protonumeri fluentes intercipiant: qui cum continuo fluxu infinitis valoribus successive affici possint, fluentium naturam & nomen desumunt.* Quare protonumero eodem semper manente in eodem systemate huic continuæ vicissitudini coefficientes tantum sunt obnoxii. Hîc vero protonumerus systematis dominator, quem superius (1)° indicavimus, littera ($d$) in posterum designabitur: eruntque fluentes productum sui coefficientis numerici ducti in protonumerum ($d$)

## PROPOSITIO I.

§. 12. Demonstrata Cap. superioribus necessitate duorum systematum a vera & naturali origine duorum datorum punctorum, quibus protonumerus terminatur, derivata; statim patet necessitas duarum fluentium ab utrisque punctis extremis protonumeri singillatim prorumpentium, quæ simul consociatæ primam & necessariam systematis conditionem adimpleant.

Nam ut aliquid certi ac veri ex continuo fluentium fluxu erui possit, certa

certa aliqua lege hujusmodi fluxus obstringantur oportet. Cum itaque systematis S A conditionem necessariam demonstraverimus, ut summa fluentium sit constans, differentia fluens: fluentes hujusce systematis in suo perpetuo fluxu ac continua valoris mutatione hanc legem servare debent. Contra vero in systete S Y earum fluxus ita inter se componantur oportet, ut fluentium differentia sit constans, fluens earum summa. Ex qua inversa lege, qua moderatur unumquodque systema, manifeste evincitur, limites unius systematis, quibus fluentes continentur, esse alterius systematis prorsus diversos, & eos, quos supra ostendimus.

## DEFINITIO III.

§. 13. *Fluentes homologæ in unoquoque systemate illæ a nobis dicuntur, quæ inter se simul consociatæ conditionem necessariam systematis intactam servant.*

Hinc ex infinitis fluentibus, quæ in quovis systemate dari possunt, illæ tantum inter se legitime conjungendæ sunt, quæ hac gaudent proprietate. Quare ne simul consocientur, quæ inter se repugnant, a natura & valore unius fluentis naturam & valorem alterius homologæ eruere necesse est: ut a nobis factum vides. Quæcumque igitur formula utriusque systematis, unam tantum fluentem repræsentans, numquam solitaria, sed semper cum sua homologa consociata censenda est, in quam transgressis propriis limitibus necessario conversa hujusce suæ homologæ naturam induit; ac signi ( $=$ ) ope legitime ut diximus §. 8 consociantur. Hinc confirmata hac duarum fluentium necessitate ad integrum systema constituendum, consequitur contra communem omnium Analystarum opinionem, æquationes, in quibus una tantum fluens reperitur, tantum abesse ut sint ad unum tantum valorem determinatæ, ut majori indeterminationi obnoxiæ sint, quam quæ duabus fluentibus constant: quia primæ cum sint limitis, in quo tantum utraque systemata conveniunt, ad alterutrum systema aptari possunt: quæ vero duas continent fluentes, ab ipsa, qua afficiuntur, diversa formulæ configuratione alterutrum systema jam constituunt.

## PROPOSITIO II.

§. 14. Fluentium systematis S A coefficientes sunt singuli fractiones unitate minores ( quæ vulgo fractiones veræ nuncupantur ) cum hujusmodi systematis lex sit, ut fluentes simul additæ totum protonumerum exhauriant: quod obtineri nequit nisi coefficientes harum fluentium homologarum unitati numericæ æquentur; & crescente uno decrescat æque alter intra limites ( o ) & ( 1 ), ut fluentes adversis frontibus concurrentes conditionem systematis adimpleant. Hinc superius statuimus esse $M + N = \frac{m}{m+n} . d + \frac{n}{n+m} . d = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) d = 1 . d = d.$

PRO-

## PROPOSITIO III.

§. 15. Cum vero systema S Y requirat fluentium homologarum differentiam constantem & æqualem protonumero, summam vero fluentium fluentem; fluens una erit semper major altera data differentia: atque ideo coefficiens fluentis majoris semper erit unitate major ( sive fractio quæ vulgo dicitur spuria ), quam tantum in limite minimo adæquat usque ad infinitum progressurus: coefficiens vero minoris fluentis modo unitate minor, modo æqualis, modo major a zero usque ad infinitum excurrens; at semper unitate minor coefficiente majoris fluentis. Hinc fluentes homologas hujusce systematis hisce formulis conclusimus $M - N = \frac{m}{m-n} \cdot d - \frac{n}{m-n} \cdot d = \left(\frac{m-n}{m-n}\right) d = 1 \cdot d = d.$

Patet igitur determinari non posse naturam fluentium, quin prius determinetur systema: & viceversa determinata fluentium natura determinatur necessario systema. Forma itaque, qua afficiuntur coefficientes fluentium, determinat systematis naturam; vel contra systematis natura determinat fluentium formam. Protonumerus vero constans semper in eodem systemate speciem systematis declarat. Tota igitur novæ hujusce meæ Analyseos artificia in eo sita sunt, ut coefficientes numerici fluentium & singuli sub ea forma, quam requirit systema, collocentur, & ambo simul legitime conjungantur; omissa prorsus quantitate geometrica protonumerum referente, cui solum est attendendum quando a specie ad speciem systematis transitus requiratur.

## PROPOSITIO IV.

§. 16. Quævis fluens major systematis S A, diviso per 2 ejus coefficiente, semper fit fluens minor: ideoque sua homologa, quæ erat minor, fit major: fluens vero S Y fit aliquando fluens alterius systematis S A.

Cum magnitudo fluentium pendeat a valore coefficientis, quo afficitur protonumerus in eodem systemate semper idem, facile intelligitur coefficientem majoris fluentis excedere quidem dimidium unitatis, sed minorem esse unitate ipsa, quam ad summum in limite maximo attingit: ergo maximus valor, ad quem hic coefficiens divisus per 2 pertingere potest ( quando coefficiens primo sumptus est maximus $= 1$ ), est $\frac{1}{2}$, in quo casu suo homologo fit æqualis: in cæteris casibus divisus per 2 semper fit minor $\frac{1}{2}$: ergo suus homologus, qui erat minor, major fiat necesse est; ut simul conjuncti unitatem æquent. Sit

ex. gr: in systemate S A fluens major $\frac{m}{m+n}.d$ ( hoc est $m > n$ ), erit ex demonstratis in hoc Capite $\frac{m}{m+n}.d = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right).d}{1}$,

cui ex adverso respondet fluens minor $\frac{n}{n+m}\,d =$

$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1}d$: facta divisione primi per 2, erit

$\frac{1}{2}.\frac{m}{m+n}.d = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d}{2}$. Sed $\frac{1}{2}.\frac{m}{m+n}$

$= \frac{m}{2m+2n} = \frac{m}{m+(m+2n)}$ ex demonstratis superius: ergo peracta divisione denominator $2m + 2n$ posito eodem numeratore $m$, dividitur in duas partes $m$, $m + 2n$, sed $m + 2n$ major $m$: ergo $m$ qui ante divisionem erat major $n$, facta divisione fit minor $m + 2n$: ergo fluens quæ in primo casu erat major fit minor: ergo $\frac{1}{2}.\frac{m}{m+n}.d = \frac{m}{m+(m+2n)}.d =$

$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+(m+2n)}{m+(m+2n)}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{(m+2n)-m}{(m+2n)+m}\right)}{1}d$, cui respondet sua homologa major $\left(\frac{m+2n}{(m+2n)+m}\right)d =$

$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(m+2n)+m}{(m+2n)+m}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{(m+2n)-m}{(m+2n)+m}\right)}{1}d$. Sit ex. gr.

A C $= d$; $m = 11$, $n = 6$: erit fluens major ( *Fig.* 25 )

A D $= \frac{11}{11+6}.d = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+6}{11+6}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{11-6}{11+6}\right)d}{1} =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{AD + CD}{AC}\right).AC + \frac{1}{2}\left(\frac{AD - AD'}{AC}\right).AC =$

AB

$\frac{A\,B}{A\,C}\cdot A\,C + \frac{1}{2}\cdot\frac{D'D}{A\,C}\cdot A\,C = A\,B + B\,D$: & $C\,D = \frac{6}{6+11} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{6+11}{6+11}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{11-6}{11+6}\right)d}{1} = C\,B - B\,D$. Facta divisione per 2 prima erit $\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{11+6} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+6}{11+6}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{11-6}{11+6}\right)d}{2} = \frac{11}{22+12} = \frac{11}{11+23}$: sed $23 > 11$, ergo $\frac{11}{11+23}\cdot d = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+23}{11+23}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{23-11}{23+11}\right)d}{1} = A\,B - B\,D' = A\,D'$, & sua homologa major $\frac{23}{23+11}\cdot d = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{23+11}{23+11}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{23-11}{23+11}\right)d}{1} = C\,B + B\,D' = C\,D'$: quarum summa $\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+23}{11+23}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{23+11}{23+11}\right)d}{1} = A\,B + C\,B$: differentia vero $\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{23-11}{23+11}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{23-11}{23+11}\right)d}{1} = B\,D' + B\,D' = \frac{12}{23+11}\cdot d = B\,D' + B\,D = \frac{6}{17}\cdot d$, & $B\,D = B\,D' = \frac{3}{17}\cdot d$.

§. 17. Si enim aliter fiat. & dividas per 2 utrosque coefficientes homologos, ut sit $\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{11+6}\cdot d + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6+11}\cdot d = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+6}{11+6}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{11-6}{11+6}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{6+11}{6+11}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{11-6}{11+6}\right)d}{2}$

erunt singulæ dimidiæ superiorum homologarum $= \frac{AD}{2} + \frac{CD}{2} = AE + CE$, quæ non sunt inter se homologæ: quia non desinunt in punctum commune D, nec simul sumptæ protonumero $d = AC$ æquantur: sed fiunt minores fluentes ambæ $= \frac{11}{11+23} \cdot d + \frac{6}{6+28} \cdot d =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+23}{11+23}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{23-11}{23+11}\right)d}{1} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{6+28}{6+28}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{28-6}{28+6}\right)d}{1}$$

a sua majori fluente singulæ avulsæ $\left(\text{hoc est } \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{23+11}{23+11}\right)d + \left(\frac{23-11}{23+11}\right)d}{1};\right.$

$\left.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{28+6}{28+6}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{28-6}{28+6}\right)d}{1}\right)$ quæ proinde manentibus iisdem punctis A, C originis singularum nequeunt lineam integram AC constituere. Quod si in unam redigantur $= \frac{17}{17+17} \cdot d$, quæ est minima inter majores, maxima inter minores fluentes homologas, æqualis erit $\frac{1}{2} \cdot d = AB$ vel CB. Quod semper evenire intelliges ex formula generali

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)}{2}\right) d = \frac{m+n}{2m+2n} \cdot d =$$

$\frac{m+n}{(m+n)+(m+n)} \cdot d$ diviso denominatore $2m+2n$ in duas æquales partes $m+n$, quæ constituunt fluentes homologas æquales; ac proinde singula æqualis dimidio protonumeri.

§. 18. Quod vero attinet ad systema SY, si fluentes homologæ dividantur per 2 dabunt (*Fig.* 24) $\frac{M+N}{2} =$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d\right)}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d\right)}{2}$$

=

$$= \frac{AD}{2} + \frac{AD'}{2} = \frac{CD'}{2} + \frac{CD}{2},$$

quo facto fluentes inter se dissociantur, neque amplius unum ac continuum Locum geometricum constituunt, hoc est in nostro casu lineam continuam earum summæ æqualem, licet signo ( + ) ambo conjungantur: fit enim prima $\frac{m}{2m - 2n} \cdot d = \frac{m}{m + (m - 2n)} \cdot d$; secunda $\frac{n}{2m - 2n} \cdot d = \frac{n}{(2m - n) - n} \cdot d$. Verum si ponamus $2n < m$, sive $n < \frac{m}{2}$, prima non amplius pertinet ad systema S Y, sed convertitur in fluentem S A, cui respondet sua homologa $\left(\frac{m - 2n}{(m - 2n) + m}\right) \cdot d$, & cum sit in hac hypothesi $m - 2n < m$, prima erit fluens major, secunda minor systematis S A: eritque in hoc casu $\frac{m}{m + (m - 2n)} \cdot d =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m - n}{m - n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m + n}{m - n}\right)d}{2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m + (m - 2n)}{m + (m - 2n)}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m - (m - 2n)}{m + (m - 2n)}\right)d}{1}$$ fluens major, & ejus homologa $\left(\frac{m - 2n}{(m - 2n) + m}\right) d =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(m - 2n) + m}{(m - 2n) + m}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{m - (m - 2n)}{m + (m - 2n)}\right)d}{1}$$ & facta $n = o$, in quo casu fit minima, æquatur $\frac{1}{2} \cdot d$ dimidio protonumeri: facta vero $m = 2n$ fit maxima in hoc systemate $= \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot d$. Hisce vero limitibus transgressis, sive facto $2n > m$, seu $n > \frac{m}{2}$ iterum transit ad systema S Y, estque $\frac{m}{m - (2n - m)} \cdot d$ fluens major, cui respondet

det $\left(\frac{2\,n - m}{m - (2\,n - m)}\right) d$ minor. Secunda vero fluens superius sumpta $\frac{n}{(2\,m - n) - n}\,.\,d$, posita $m > n$ semper est fluens minor systematis S Y, cui respondet major $\left(\frac{2\,m - n}{(2\,m - n) - n}\right) d$, quæ fit minima $= d$, quando altera fit zero, atque simul usque ad infinitum data differentia procedunt: ut docuimus. Ne igitur divisione per 2 perturbetur legitima homologarum fluentium, quas primo sumpsimus, societas, ac systema, divisorem 2 qui afficiebat denominatorem coefficientis transfer in protonumerum, ut sit $\frac{d}{2}$. In quo casu fluentes quidem remanent homologæ; sed species systematis mutatur, mutato protonumero, qui fit in hoc casu A B, vel B C, dimidium scilicet primi A C.

## PROPOSITIO V.

§. 19. Quævis fluens major systematis S A, multiplicato per 2 ejus coefficiente, transit ad systema S Y: fluens vero minor nunquam; potest tamen converti in fluentem majorem: semper vero quæ erant homologæ dissociantur. In systemate vero S Y tam fluens major, quam minor idem semper retinet systema, sed non amplius remanent homologæ.

In systemate S A fluens major $M' = \frac{m}{m + n}\,.\,d =$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m + n}{m + n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m - n}{m + n}\right)\right) d}{1},$$ ducta in 2, dabit $2\,M =$

$$\frac{2\,.\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m + n}{m + n}\right) d + \left(\frac{m - n}{m + n}\right) d\right)}{1}:$$ quæ quidem certe excedit protonumerum, nec amplius in S A contineri potest. Ut igitur ad suum, ad quod vere pertinet systema reducatur, fiat $M = \frac{2\,m}{m + n}\,.\,d$

$= \frac{2\,m}{2\,m - (m - n)}\,.\,d$; quæ statim reducitur ad fluentem majorem S Y cum ex hypothesi sit $m > n$. Erit igitur $2\,M' =$

$$2\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d\right)}{1}=M=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2m-(m-n)}{2m-(m-n)}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{2m+(m-n)}{2m-(m-n)}\right)d}{1},$$ cui respondet fluens minor $N=-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2m-(m-n)}{2m-(m-n)}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{2m+(m-n)}{2m-(m-n)}\right)d}{1}$ $=\left(\frac{m-n}{2m-(m-n)}\right)\cdot d$: M fit minima quando $m=n$, & æqualis $\frac{1}{2}\cdot d+\frac{1}{2}\cdot d$, quando N minima $=o$. Sed posito $n>m$, donec $n-m<2m$, M quæ ante multiplicationem per 2 erat in S A fluens minor, fit major $M=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2m+(n-m)}{2m+(n-m)}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{2m-(n-m)}{2m+(n-m)}\right)d}{1}$, & N minor in S Y fit negativa, hoc est transit in minorem positivam systematis S A, sive $N=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(n-m)+2m}{(n-m)+2m}\right)d-\frac{1}{2}\left(\frac{2m-(n-m)}{2m+(n-m)}\right)d}{1}$ Sed facto $n-m>2m$, tunc M convertitur in minorem, N in majorem, fitque $M=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2m+(n-m)}{2m+(n-m)}\right)d-\frac{1}{2}\left(\frac{(n-m)-2m}{(n-m)+2m}\right)d}{1}$, & $N=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(n-m)+2m}{(n-m)+2m}\right)d+\frac{1}{2}\left(\frac{(n-m)-2m}{(n-m)+2m}\right)d}{1}$.

In systemate vero S Y fluens major multiplicata per 2 est $2M=\frac{2m}{m-n}\cdot d$ $=M=\frac{2m}{2m-(m+n)}\cdot d$; & minor $2N=\frac{2n}{m-n}\cdot d=N=$ $\frac{2n}{(m+n)-2n}\cdot d$, quæ singulæ retinent idem systema S Y, sed primæ M majo-

majori respondet minor $N = \left(\frac{m+n}{2m-(m+n)}\right) \cdot d$, & secundæ N minori respondet fluens major $\left(\frac{m+n}{(m+n)-2n}\right) \cdot d$. In utroque igitur systemate fluentes quæ erant homologæ, coefficiente singularum per 2 multiplicato, distrahuntur invicem, nec amplius conditionibus homologarum fluentium satisfaciunt: nisi (ut fecimus § superiori) factore 2 afficiatur protonumerus, isque convertatur in $2d$.

§. 20. Veritas hæc nondum animadversa, quinimmo communi omnium Analystarum quotquot fuerunt, quotquot sunt opinioni prorsus contraria, tanti est momenti in tota Analysi, ac præcipue in formulis superiorum graduum, ut cogat nos in hac semper magis confirmanda atque illustranda diutius immorari. Ut igitur de hac re diligentius, & universim agamus, sit

## PROPOSITIO VI.

Coefficientes homologi utriusque systematis si in fractionem quamcumque veram vel spuriam puta $\frac{f}{g}$, ducantur, non amplius sunt homologi: ac proinde & fluentes desinunt esse inter se homologæ.

Coefficientes homologi S A $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{n+m}$ ducantur singuli in fractionem $\frac{f}{g}$; erit primus $\frac{fm}{gm+gn} = \frac{fm}{fm+(gm+gn-fm)}$; secundus $\frac{fn}{gn+gm} = \frac{fn}{fn+(gn+gm-fn)}$, ergo coefficiens homologus primi nunc erit $\frac{gm+gn-fm}{(gm+gn-fm)+fm}$, qui differt ab $\frac{fn}{fn+(gm+gn-fn)}$ coefficiente secundo; cui respondet coefficiens homologus $\frac{gm+gn-fn}{(gm+gn-fn)+fn}$, qui multum differt a primo $\frac{fm}{fm+(gm+gn-fm)}$. Et sane si coefficientes superiores primum homologi post multiplicationem per $\frac{f}{g}$, simul addantur, dabunt

$\frac{fm}{fm+(gm+gn-fm)}+\frac{fn}{fn+(gm+gn-fn)}=\frac{fm+fn}{gm+gn}=\frac{f}{g}\cdot\left(\frac{m+n}{m+n}\right)$ qui unitati non æquantur niſi ſit $f=g$; quæ eſt conditio neceſſaria ſyſtematis S A, ad quod ſupponimus pertinere, poſito in primo $fm < gm + gn$; in ſecundo $fn < gm + gn$. Idem eveniet coefficientibus ſyſtematis S Y homologis $\frac{m}{m-n}$, $\frac{n}{m-n}$ ductis in $\frac{f}{g}$: dabunt enim differentiam $\frac{fm}{fm-(fm+gm-gn)}$ $-\frac{fn}{(gm-gn+fn)-fn}=\frac{fm-fn}{gm-gn}$, quæ ex conditione ſyſtematis æquanda eſſet unitati: poſito quod uterque in ſyſtemate S Y perſeveret.

§. 21. Verum primæ formulæ ſyſtematis S A facile ſingulæ ad ſyſtema S Y reducuntur ſi fiat una $=\frac{fm}{(fm+gm+gn)-fm}$, altera $=\frac{fn}{(fn+gm+gn)-fn}$, quæ ſingulæ dant coefficientem fluentis minoris in ſyſtemate S Y, & primæ erit homologa major $\frac{fm+gm+gn}{(fm+gm+gn)-fm}$, ſecundæ $\frac{fn+gm+gn}{(fn+gm+gn)-fn}$ item major: ut omittam alias varietates, quæ oriri poſſunt a $gm+gn$ æquali, majori, vel minori $fm$. In ſyſtemate vero S Y coefficiens majoris $\frac{fm}{fm-(fm+gm-gn)}$, ſi $gm=fm+gn$, fluens major fit minima, ob coefficientem minimum $=1$: at ſi $gm > fm+gn$, tunc fit tranſitus a ſyſtemate S Y ad ſyſtema S A, & $\frac{fm}{fm+(gm-gn-fm)}$ ſemper unitate minor. In coefficiente vero minoris fluentis $\frac{fn}{(gm-gn+fn)-fn}$ poſito $m > n$, erit $gm-gn+fn$ ſemper poſitivus & major $fn$; atque ideo hic coefficiens erit fluentis minoris S Y. Verum ſi fiat $\frac{fn}{(gm-gn+fn)-fn}=\frac{fn}{(gm-gn-fn)+fn}$ & $gm > gn+fn$, tunc a ſyſtemate S Y ad ſyſtema S A transferimur, in quo hic coefficiens ſemper unitate minor, & in contraria poſitione primi. Cum enim in S Y eſſent homologorum coefficientium differentiæ $=\frac{(gm-gn+fn)-fn}{(gm-gn+fn)-fn}=1$: in hoc ſecundo erit eorum ſumma $=\frac{(gm-gn-fn)+fn}{(gm-gn-fn)+fn}=1$, ob quam



ſyſte-

ſyſtematum fit translatio. Quoties igitur fractio $\frac{f}{g}$ afficit coefficientes homologos cujuſcumque ſyſtematis, ſervato eodem protonumero, abrumpit unitatem æquationis & ſyſtematis, ac Locum geometricum: & fluentes, quæ in primo caſu legitime erant diſpoſitæ & inter ſe ita comparatæ ut homologarum naturam induerent, in ſecundo a ſe invicem penitus divulſæ nullam habent inter ſe legitimam & neceſſariam affinitatem. Singula tamen nova denominatoris diviſione peracta oſtendit, quænam altera ſui homologa in locum primæ ſubſtituenda ſit, ut unitas ſyſtematis cum eodem protonumero perſeveret: inter primas enim novo factore affectas fruſtra requiras ſyſtematis unitatem, & legitimam in eodem puncto fluentium ſocietatem; niſi, coefficientibus intactis, hoc factore protonumerus tantum afficiatur: quo tamen facto ſpecies ſyſtematis mutatur. Animadvertas velim fluentes ſuperiores homologas, quas, poſtquam ductæ fuerant in factorem $\frac{f}{g}$, diviſas ſumpſimus, ac in duas non homologas converti diximus, poſſe tamen in unum conjungi, & unam tantum fluentem repræſentare. Si enim fiat $\frac{f}{g}.(M+N)=\frac{f}{g}.\left(\frac{m\pm n}{m\pm n}\right)d=\frac{f}{g}.d=M$, ex duabus fluentibus homologis unam confecimus ſolitariam, nulli ſyſtemati præparatam, quæ tamen ad utrumque reduci poteſt. Sint ex: gr: fluentes homologæ §. 16 $M+N=\frac{11}{11+6}.d+\frac{6}{6+11}.d$, quæ ducendæ ſint in $\frac{5}{7}$: erit ex ſupra dictis $\frac{5}{7}.M+\frac{5}{7}.N=\frac{5}{7}.\frac{11}{11+6}.d+\frac{5}{7}.\frac{6}{6+11}.d=M+N=\frac{55}{55+64}.d+\frac{30}{30+89}.d$ utraque ſyſtematis S A, ſed inter ſe nullo communi vinculo colligata: cum fluenti $M=\frac{55}{55+64}.d$ reſpondeat ſua homologa $N=\frac{64}{64+55}.d$; & $N=\frac{30}{30+89}.d$ ſua homologa $M=\frac{89}{89+30}.d$: (æque poterant ad S Y præparari). Sed ſi fiat $\frac{5}{7}.M+\frac{5}{7}.N=\frac{5}{7}.\frac{11}{11+6}.d+\frac{5}{7}.\frac{6}{6+11}.d=\frac{5}{7}.\left(\frac{11+6}{11+6}\right).d=\frac{5}{7}.d=M$, & formula redu-

catur

catur ad unam tantum fluentem $M = \frac{5}{7} \cdot d$; si fiat $M = \frac{5}{5+2} \cdot d$, pertinet ad SA, & sua homologa minor $N = \frac{2}{2+5} \cdot d$: quod si ponatur $M = \frac{5}{12-5} \cdot d$ transfertur ad SY & est fluens minor, cui respondet major $N = \frac{12}{12-5} \cdot d$. Cætera ut supra.

§. 22. Ratio autem cur factor $\frac{f}{g}$ applicatus ad unum, vel ad singulos coefficientes fluentium homologarum, eam, quam antea habebant, affinitatem inter se distrahat, ex superius demonstratis manifeste patet; ex quibus eruimus coefficientes numericos homologos ab una formula $1° = \frac{g}{g}$ complecti oportere, a qua una servatur unitas & conditio necessaria systematis, nec non fluentium ex diversis datis punctis prorumpentium in punctum fluens commune concursus. Porro tam formulæ fluentium Cap. II. $\frac{m}{m+n} \cdot d + \frac{n}{n+m} \cdot d$ SA; $\frac{m}{m-n} \cdot d - \frac{n}{m-n} \cdot d$ SY, quam formulæ earumdem fluentium Cap. III.

$$\frac{(1 - \frac{m}{g})}{(1 - \frac{m}{g}) + \frac{m}{g}} \cdot d + \frac{\frac{m}{g}}{(1 - \frac{m}{g}) + \frac{m}{g}} \cdot d \text{ SA}, \quad \frac{(1 + \frac{m}{g})}{(1 + \frac{m}{g}) - \frac{m}{g}} \cdot d$$

$$- \frac{\frac{m}{g}}{(1 + \frac{m}{g}) - \frac{m}{g}} \cdot d \text{ SY}$$

: quam hæ hujusce Cap: IV.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d\right)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)d - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)d\right)}{1} \text{SA};$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d\right)}{1} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)d + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)d\right)}{1} \text{SY}$$

 sua

ſua ipſa configuratione aperte oſtendunt numeratores ſingulos fluentium homologarum continere alterutram ex illis partibus, in quas denominator conſtans dividitur, ac ſimul totum denominatorem exhaurire. Quare ſi afficitur numerator unius fluentis factore aliquo, hoc etiam afficiatur oportet denominator, quippe diviſus eſt in duas partes æquales ſingulas ſingulis numeratoribus fluentium homologarum, quin primus valor integer denominatoris immutetur. Hinc neceſſario conſequitur alteram fluentem homologam huic jam immutatæ ob factoris applicationem, diverſam & ipſam eſſe oportere a prima, in cujus locum ſuccedit. Ita ex: gr: ſi coefficientes homologi SA $\frac{2}{2+1}$, $\frac{1}{1+2}$ vel ſinguli, vel alteruter, in factorem (7) ducantur, coefficiens primus convertitur ex demonſtratis in $\frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 2 - (7 \cdot 2 - 3)} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 2 - 11}$, cui reſpondet alter coefficiens homologus $\frac{11}{14 - 11}$ longe diverſus & valore & ſyſtemate a primo $\frac{2}{2+1}$. Quod ſi etiam alter $\frac{1}{1+2}$ ducatur in (7), ſit $\frac{7 \cdot 1}{7 \cdot 1 - (7 \cdot 1 - 3)} = \frac{7}{7 - 4}$ coefficiens minor SY, qui abludit ab $\frac{11}{14 - 11}$, manente tamen in ſingulis eodem denominatoris valore.

§. 23. Ex hiſce demonſtratis eruitur certa regula, qua licet quamcumque fluentem in factorem quemcumque ducere, quin perturbetur lex, qua denominator eſt dividendus, ut obtineantur coefficientes numeratorum legitimi fluentium homologarum, ipſarumque formulæ rite præparentur prout requirit nova harum fluentium natura, ac ſyſtema. Ut exempli appoſitione hoc, quod intelligo, artificium clarius percipiatur, ſit ex: gr: fluens $M = \frac{m}{m+n} \cdot d$ SA ducenda in factorem K: ſi fiat $K \cdot M = K \cdot \frac{m}{m+n} \cdot d$, M non amplius eſt una ac ſimplex, ſed ſit multipla ipſius M toties repetita, quot unitates continentur in factore K. Ut igitur una & indiviſa permaneat, fac $M = K^{o} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot d$, & ponatur $m + n = g$, ſive denominator conſtans integer ſumatur: eritque $M = \frac{K}{K} \cdot \frac{m}{\frac{g}{K}} \cdot d = \frac{K}{K} \cdot \frac{m}{m - m + \frac{g}{K}} \cdot d$

=

$$= \frac{m}{m - m + \frac{g}{K}} \cdot d = \frac{Km}{Km - Km + g} \cdot d$$ eodem valore ac $\frac{Km}{g} \cdot d$;

& hoc artificio & unitas fluentis servatur, & denominator dividitur in duas partes, quæ singulæ dant numeratores homologos fluentium prout docet Theoria hæc nostra: Insuper si sit $g > mK$, erit $M = \frac{Km}{Km + (g - Km)} \cdot d$ una ex fluentibus S A, cui respondet sua homologa $\frac{g - Km}{(g - Km) + Km}$; quod si $g < Km$, tunc erit $M = \frac{Km}{Km - (Km - g)} \cdot d$ fluens major systematis S Y, & sua homologa minor $\frac{Km - g}{Km - (Km - g)} \cdot d$. Quæ si reducantur ad formulas Cap: III. erunt $M + N = \left(\left(1 - \frac{Km}{Km + (g - Km)}\right) + \frac{Km}{Km + (g - Km)}\right) \cdot d$

$$= \left(\left(1 - \frac{(g - Km)}{(g - Km) + Km}\right) + \frac{(g - Km)}{(g - Km) + Km}\right) \cdot d$$ S A, & $M - N$

$$= \left(\left(1 + \frac{Km}{Km - (Km - g)}\right) + \frac{Km}{Km - (Km - g)}\right) d$$

$$= \left(\left(1 + \frac{(Km - g)}{Km - (Km - g)}\right) - \frac{(Km - g)}{Km - (Km - g)}\right) d$$ S Y. Quæ vero respondent formulis hujusce Cap: IV. §. 5. sunt sequentes in S A

$$M + N = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{Km + (g - Km)}{Km + (g - Km)}\right) d + \frac{1}{2}\left(\frac{Km - (g - Km)}{Km + (g - Km)}\right) d\right)}{1}$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(g - Km) + Km}{(g - Km) + Km}\right) d - \frac{1}{2}\left(\frac{Km - (g - Km)}{Km + (g - Km)}\right) d\right)}{1}$$; in S Y

$$M - N = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{Km + (g - Km)}{Km - (g - Km)}\right) d + \frac{1}{2}\left(\frac{Km - (g - Km)}{Km - (g - Km)}\right) d\right)}{1}$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{Km + (g - Km)}{Km - (g - Km)}\right) d - \frac{1}{2}\left(\frac{Km - (g - Km)}{Km - (g - Km)}\right) d\right)}{1}$$

posito

posito in utroque systemate $g - Km < Km$. Quod si K esset fractio $= \frac{f}{h}$ in formulis loco $g$ scribatur $hg$. Sit ex: gr: $M = \frac{3}{3+2} \cdot d$ SA ducenda in (7); erit ex tradita regula $M = 7^o . \frac{3}{5} . d = \frac{7}{7} . \frac{3}{3-3+\frac{5}{7}} . d$

$= \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 7 - 3 \cdot 7 + 5} . d = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 7 - (3 \cdot 7 - 5)} . d = \frac{21}{21-16} . d$ fluens major S Y, & sua homologa minor $\frac{16}{21-16} . d$. Rursus sit $M = \frac{2}{15+2} . d$ SA ducendus in (7), erit $M = 7^o . \frac{2}{17} . d = \frac{7}{7} . \frac{2}{2-2+\frac{17}{7}} . d$

$= \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 17} . d = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 7 + (17 - 2 \cdot 7)} . d = \frac{14}{14+3} . d$ fluens major S A, & minor $\frac{3}{3+14} . d$. Tandem si ponatur $K = \frac{7}{5}$;

$M = \frac{2}{2-1} . d$ fluens major S Y, $g = 1$, erit $M = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}} . \frac{2}{2-2+1 . \frac{5}{7}} . d$

$= \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 5} . d = \frac{14}{14 - (14 - 1 \cdot 5)} . d = \frac{14}{14 - 9} . d$ fluens major S Y, & sua homologa minor $\frac{9}{14-9} . d$. Hinc ab hoc artificio manat ratio, qua universim solvitur sequens

## P R O B L E M A.

Quamcumque fluentem in quemcumque factorem ducere, quin fluentis ipsius unitas perturbetur.

Hoc jam factum vides in hoc §°.

§. 24.

§. 24. Ad hoc tamen artificium ulterius promovendum, & ad formulas superiores elegantius & utilius concinnandas, ut ex ipsa sua configuratione oculis ipsis cernatur ad quod systema pertineat fluens; utrum sit major, minorve; quænam sit ejus homologa; atque alia non minoris momenti eruantur; formulæ superiorum Capitum, quas §°. 22 *antecedenti* invenimus, in meliorem formam tertii puncti dati ope sunt reducendæ. Nam si formulas §. antecedentis ad normam hujusce Cap. conflatas inspiciamus, quæ tales fiunt tertii puncti dati medii jam præexistentis subsidio, noverimus terminum constantem

$\left(\frac{K\,m + (g - K\,m)}{K\,m + (g - K\,m)}\right).\,d$ esse summam fluentium homologarum S A; in quo termino supponitur A C integra duobus tantum extremis punctis A, C terminata, licet natura harum formularum requirat, ut vidimus, punctum datum medium B; in quo posita $\frac{K\,m}{K\,m + (g - K\,m)}.\,d$ ab uno extremo puncto fluens major, est altera $\left(\frac{g - K\,m}{(g - K\,m) + K\,m}\right) d$ ab altero extremo puncto primæ obviam occurrens minor: & viceversa: omisso prorsus puncto B tamquam si non esset, quod tamen rectius agendo omittendum non est, cum fluens ad hoc perventa statim determinetur. Ut igitur hoc consequamur, fiat $K\,m + (g - K\,m) = (K\,m + \frac{g}{2}) + (\frac{g}{2} - K\,m)$, ut sit

$$\left(\frac{K\,m+(g-K\,m)}{K\,m+(g-K\,m)}\right) d = \left[\frac{(\frac{g}{2} + K\,m) + (\frac{g}{2} - K\,m)}{(\frac{g}{2} + K\,m) + (\frac{g}{2} - K\,m)}\right].\,d =$$

$\left[\frac{(\frac{1}{2} + \frac{K\,m}{g}) + (\frac{1}{2} - \frac{K\,m}{g})}{(\frac{1}{2} + \frac{K\,m}{g}) + (\frac{1}{2} - \frac{K\,m}{g})}\right].\,d$, qua facili mutatione facile percipitur $\frac{K\,m}{g}.\,d$, qui erat A D ( *Fig.* 26 ) vel C D transferri in B D, atque

esse $\left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{K\,m}{g}}{(\frac{1}{2} + \frac{K\,m}{g}) + (\frac{1}{2} - \frac{K\,m}{g})}\right].\,d =$ AB + B D = A D fluentem

major,

majorem, minorem vero $\left\{\frac{\frac{1}{2}-\frac{K\,m}{g}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{K\,m}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{K\,m}{g}\right)}\right\}.\,d = CB - BD$

$=$ C D. Ex qua intelligitur, cum vi ſyſtematis ſit $K\,m < \frac{g}{2}$, eo magis minorem eſſe oportere $\frac{K\,m}{g}$, nec poſſe excedere valorem $\frac{1}{2}$. Quod ſi $\frac{K\,m}{g}.\,d =$ B D fluendo fiat major B C ſcilicet B D′, tunc formulæ nova configuratione, quam ſumere coguntur hac nova ſuppoſitione, ſtatim ad ſyſtema S Y neceſſario transferuntur.

§. 25. Formulæ igitur fluentium homologarum §. antecedentis in hanc elegantiorem ac ampliorem formam traductæ erunt ſequentes

I$^{a}$ $\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right\} d = M + N$; $\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right\} d =$

M — N S A : poſito $\frac{Km}{g} < \frac{1}{2}$.

II$^{a}$ $\left\{\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right\} d = M + N$; $\left\{\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)+\left(Km-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(Km-\frac{1}{2}\right)}\right\} d =$

M + N S Y : poſito $\frac{Km}{g} > \frac{1}{2}$; ex qua ſecunda ſuppoſitione formulæ I$^{æ}$, neceſſario in II$^{as}$ tranſmutantur : & quæ erat ſumma in S A, fit neceſſario differentia in S Y; & differentia S A fit e contrario ſumma in S Y, atque ideo ſumma conſtans in S A eſt differentia conſtans in S Y; & differentia fluens in S A convertitur in ſummam fluentem in S Y : in quo patet fluentem majorem eſſe $=$ A B $+$ B D′ $=$ A D′, & minorem B D′ — B C $=$ C D′. Inſuper in S A differentia $= 2.\,\frac{Km}{g}.\,d = 2.$ BD $=$ D″ D $=$ B D′+ B D″ $=$ D D′, quod docet punctum originis hujuſmodi fluentium eſſe commune in B, atque hinc inde ex hoc puncto æque fluere, & poſitivo ſigno ( + ), contra communem doctrinam, conjungendæ. Formulæ vero Cap. III hac nova ratione conflatæ erunt

In

In S A III^a $\left[1-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right].d$

$=\left[1-\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}\right].d$

$=$ M $+$ N constans:

$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right)\right].d$

$=\left[1-\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}-\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}\right].d$

$=2.\frac{Km}{g}.d=$ M $-$ N fluens

In S Y IV^a $\left[1-\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d$

$=\left[1+\frac{\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d$

$=$ M $-$ N constans:

$\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}-\left(1-\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{1}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right)\right].d$



$=$

$$= \left[ 1 + \frac{\left(\frac{Km}{g} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{Km}{g} - \frac{1}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{Km}{g} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{Km}{g} - \frac{1}{2}\right)} \right] . d$$

= M + N fluens. Tandem formulæ Cap. IV hujus erunt

In SA V^a M + N =

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right].d+\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right].d\right\}+\left\{\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}\right].d-\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right]\right\}}{1}$$

& M − N =

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right].d+\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right].d\right\}-\left\{\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)}\right].d-\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{Km}{g}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{Km}{g}\right)}\right]\right\}}{1}$$

& in SY VI^a M − N =

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d+\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d\right\}-\left\{\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d-\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right]\right\}}{1}$$

& M + N =

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d+\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d\right\}+\left\{\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right].d-\frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{Km}{g}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Km}{g}-\frac{1}{2}\right)}\right]\right\}}{1}$$

Si diligenter hujusmodi formulæ hac puncti medii dati B substitutione conflatæ ad examen revocentur, dubietates illas omnes atque errores, in quos necessario impingit Methodus nota, prorsus tollunt: ostenduntque totum hoc hujusce scientiæ

tiæ fundamentum pendere a limitibus, quibus circumscribitur terminus unus fluens $\frac{K\ m}{g}$, qui donec minor est $\frac{1}{2}$, constituit systema S A, in quo fluentium summa semper $= \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot d$ est necessario constans, differentia necessario fluens ac dupla numeri fluentis: crescente $\frac{K\ m}{g}$ supra $\frac{1}{2}$ necessario fit translatio ad systema S Y, in quo quæ erat summa fit differentia, & differentia fit summa: proindeque in hoc systemate differentia est constans, fluens summa: ac periculum omne, in quod necessario incidit Methodus nota, comparationis positivi cum negativo, omnino vitatur. Sed quod caput est duplex illa notio signo negativo ( — ) ab Analysi communi tributa de medio tollitur, ob quam Analysis vetus dubia quandonam terminus in origine negativus sit addendus positivo, & quandonam positivus a positivo sit subtrahendus, Analystas suos perpetuis erroribus, ac controversiis implicavit. Formulas enim nostra Theoria nullo termino signo negativo afficit, qui non indicet veram subtractionem minoris a majori: atque ideo huic signo ( — ) non nisi veræ subtractionis notionem reliquit, sublata illa termini in origine negativi, seu contrariæ positionis: cum nostræ formulæ rite ordinatæ sua tantum dispositione clare ostendant fluentium homologarum inter se positionem, cui uni in unoquoque systemate est attendendum, quin signo ambiguo ( — ) perperam afficiantur.

§. 26. Præter vero hasce, quas hîc commemoravimus, harum formularum utilitates, aliasque, quas pro re nata eruemus, ac præsertim præter illud artificium ab hisce formulis derivatum, quo uno datum est invenire mediam geometricam proportionalem inter duas datas, quod Cap. X trademus; juvat ad rem, quam nunc præ manibus habemus, rursus observare formulas coefficientis § 23 si ad simpliciorem formam reducantur ( facto scilicet $\frac{K}{K} \cdot \frac{m}{m+n}$ $= \frac{K}{K} \cdot \frac{m}{g} = \frac{K}{K} \cdot \frac{m}{m - m + \frac{g}{K}} = \frac{\frac{K\ m}{g}}{\frac{K\ m}{g} - \frac{K\ m}{g} + 1}$ ) duobus tantum terminis numericis constare, hoc est $\frac{K\ m}{g}$, & ( 1 ); qui inter se varie dispositi totum hoc negotium analyticum peragunt, unitate in formulis § antecedentis perpetuo bifariam divisa. Porro ( 1 ) tam integra in formulis § 23, quam bifariam divisa in hisce ultimis eadem perseverans vere constantis naturam induit,

ac solus terminus $\frac{K\,m}{g}$ fluens est. Verum cum in hoc termino tam $g$, quam $K$ sint numeri dati ad libitum sumpti, qui in eadem fluente invariati permanent, caussa, cur $\frac{K\,m}{g}$ sit fluens a sola $m$ est repetenda, quæ est una ex illis infinitis partibus fluentibus, in quas dividi potest denominator constans $g = m + n$ in S A, vel $= m - n$ in S Y primæ fluentis $\frac{m}{g}$ ductæ in $K$. A limitibus igitur hujusce fluentis $\frac{K\,m}{g}$ arbitrio nostro, vel a peculiari circumstantia constitutis pendent diversa natura fluentium, diversumque systema, & ab uno in alterum commutatio: quæ omnia ac singula formulæ ultimæ sponte sua exhibent. Ex quibus cognoscitur, cur natura fluentium unius systematis toto cælo distet a natura alterius: cum in primo systemate S A caussa fluxionis necessario pendeat a differentia fluentium $\frac{1}{2} + \frac{K\,m}{g}$, $\frac{1}{2} - \frac{K\,m}{g}$: & in systemate S Y a summa $\frac{K\,m}{g} + \frac{1}{2}$, $\frac{K\,m}{g} - \frac{1}{2}$, ex quo fit constantis unius systematis in fluentem alterius, & viceversa, necessaria commutatio: quæ, si ignorentur, ut in Analysi communi usuvenit, constantes cum fluentibus, limites cum limitibus, systema cum systemate, positivum cum negativo, ac cætera, quæ ex his pendent, perperam miscentur, atque confunduntur.

§. 27. Illud insuper diligentissime est animadvertendum in generali fractione $\frac{g}{g} \mp o$, (qua initio hujusce Capitis usi sumus ad determinandas fluentes utriusque systematis) donec $g$ est numerus quicumque rationalis, licet videatur esse productum duorum vel plurium factorum, tamen semper ut aggregatum plurium unitatum, a quibus tantum unus numerus simplex constituitur, sumendus est, qui semper in quot vis paria numerorum naturalium simplicium dispertiri potest, & ad duas fluentes alterutrius systematis præparari. In hac tamen hypothesi numeratores fluentium erunt semper numeri rationales, cum coefficientes fluentium homologarum sint $\frac{g}{g} \pm o = \left(1 \mp \frac{m}{g}\right) \pm \frac{m}{g}$, in quibus nisi *aximetria* afficiat fluentem $(m)$ nullo modo introduci potest: hoc tamen nequit obtineri si methodum supra adhibitam sequamur, nisi sit $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \pm o =$

( 1

$(1 \mp \frac{m}{\sqrt{g}}) \pm \frac{m}{\sqrt{g}}$; sed in hoc casu terminus irrationalis $\sqrt{g}$, ut patet, nequit dividi in duas partes eo modo, quo superius docuimus dividi posse rationalem ( $g$ ). Ut vero id etiam & eleganter consequamur, necesse est eam inire viam, quam nobis præmonstravit §. 23: positam nempe quamcumque fluentem alterutrius systematis $\frac{m}{m \pm n}$ ducere in quantitatem quamcumque aximetram $\sqrt{K}$, & ponere $\sqrt{K} \cdot \frac{m}{m \pm n} = \sqrt{K} \cdot \frac{m}{g} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}} \cdot \frac{m}{m - m + \frac{g}{\sqrt{K}}}$

$$= \frac{\frac{m}{g}\sqrt{K}}{\frac{m}{g}\sqrt{K} - \frac{m}{g}\sqrt{K} + 1}$$

: quo facto habentur statim fluentes homologæ in S A, posito $\frac{m}{g}\sqrt{K} < 1$, $M + N =$

$$\left[\frac{\frac{m}{g}\sqrt{K}}{\frac{m}{g}\sqrt{K} + (1 - \frac{m}{g}\sqrt{K})}\right] . d + \left[\frac{1 - \frac{m}{g}\sqrt{K}}{(1 - \frac{m}{g}\sqrt{K}) + \frac{m}{g}\sqrt{K}}\right] d\text{: vel } M - N$$

$$= \left[\frac{\frac{m}{g}\sqrt{K}}{\frac{m}{g}\sqrt{K} - (\frac{m}{g}\sqrt{K} - 1)}\right] . d - \left[\frac{\frac{m}{g}\sqrt{K} - 1}{\frac{m}{g}\sqrt{K} - (\frac{m}{g}\sqrt{K} - 1)}\right] d \text{ SY}$$

posito $\frac{m}{g}\sqrt{K} > 1$: cætera ut supra: & hæc est ratio una & elegans, qua in duas fluentes dividi possit numerus aximeter $\sqrt{K}$ aut solitarius aut ductus in rationalem quemcumque. Si sit $m = g$, sive $\frac{m}{m + o} = \frac{1}{1}$ in S A; $\frac{m}{m - o} = \frac{1}{1}$ in S Y, erit $\sqrt{K} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} + (\sqrt{K} - 1)}$ in S A,

$= \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} - (\sqrt{K} - 1)}$ in S Y, in quibus licet $\sqrt{K}$ nequeat dividi in

duas

duas partes eo modo, quo dividitur rationalis quantitas, tamen $K$ naturam fluentis induere potest, & a zero usque $\frac{1}{4}$ ( ut sit $\sqrt{K} = \frac{1}{2}$ ) systema SA constituere, quo limite transgresso usque ad infinitum progrediens transfertur ad systema S Y. Hæc attigisse hîc sufficiat, nobis de numeris irrationalibus fusius ac diligentius tractaturis in T. II; in quo Theoriam fluentium duarum dimensionum ex composito persequemur. Interim vide, quæ docet Caput sequens V. §. 38 & seqq; in quibus conferuntur formulæ §. 5 hujus cum formulis §. 25 Cap. superioris, & quando una alteri sit anteponenda declaratur.

§. 28. Hîc tantum in antecessum addo, hæc quæ luce clariora sunt bene perspecta atque cognita argumentum invictissimum sponte exhibere, quo uno, si cætera deessent, imaginarium a tota Analysi perpetuo cogitur exulare: necquicquam obnitente præoccupata, ac tot præclarissimorum Virorum scriptis confirmata nostri sæculi opinione. Imaginarium enim aut inficit coefficientes homologos numericos, aut ipsum protonumerum. Primo modo cum fluentium coefficientes homologi imaginarii sint in utroque systemate ex demonstratis

$$\frac{\frac{m}{g}\sqrt{-K}}{\frac{m}{g}\sqrt{-K} - \left(\frac{m}{g}\sqrt{-K} - 1\right)}, \quad \frac{-\frac{m}{g}\sqrt{-K} + 1}{\frac{m}{g}\sqrt{-K} - \frac{m}{g}\sqrt{-K} + 1},$$

vel ex ultimis formulis $\dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{g}\sqrt{-K}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{g}\sqrt{-K}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{g}\sqrt{-K}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{g}\sqrt{-K}\right)}$,

quisque videt utrosque coefficientes posse facile ab hac labe expurgari. Nam ex demonstratis, atque ex ipsa coefficientium homologorum dispositione patet in systemate SA sumpta fluentium summa, in SY sumpta differentia terminos fluentes evanescere: ergo si imaginarium errore methodi irrepserit, potest tamen semper in reale transmutari, cum sit $\frac{m}{g}\sqrt{-K} - \frac{m}{g}\sqrt{-K} = \frac{om}{g}\sqrt{-K}$ $= o\sqrt{-1}\,.\,\frac{m}{g}\sqrt{K} = \frac{om}{g}\,.\sqrt{K} = \frac{m}{g}\sqrt{K} - \frac{m}{g}\sqrt{K}$. Quod si fluentes systematis ratione tantum protonumeri imaginariæ fiant, tunc quidem remedio supra allato nequeunt ad realitatem reduci; sed manifeste patet imaginarium hoc nulla necessitate, sed arbitrio vel errore invectum, eodem arbitrio vel

vel errore sublato tolli posse. Vidimus enim Cap: III. protonumerum $d$ non esse nisi partem lineæ rectæ utrinque ad infinitum mente productæ arbitrio vel conditione proposita ab hac infinitate duorum punctorum datorum ope exceptam: quæ quidem infinita linea cum imaginaria nullo modo natura sua esse possit, nec pars ipsius, si recte te adhibeas, poterit esse necessario imaginaria. Quare tandem fatearis oportet hujusce mali labem non nisi a male statutis hujusce Scientiæ principiis, & ab ignoratione earum multiplicium sibi invicem succedentium, quas sensim nostra Theoria evolvit, veritatum derivatam tolli non posse, nisi in novam ac meliorem formam totum hoc immensum pene Opus de integro restauretur.

§. 29. Nunc in viam a qua diverti regrediens ajo, quoties æquatio aliqua legitime ordinata factore aliquo est afficienda, ne in devia ducamur, ac unitatem systematis, nec non fluentium homologarum legem perturbemus, ex Prop:bus superius demonstratis & ex §. 23. & seqq. sequentem novum & universim receptæ consuetudini prorsus contrarium statuendum esse Canonem: scilicet

## CANON.

*Quæcumque legitima æquatio ab alterutro derivata systemate si dividenda vel multiplicanda sit per numerum quemcumque, hoc numero non nisi protonumerus est afficiendus, iisdem manentibus fluentium symbolis* M, N, *vel more communi* $x$, $y$, *&c. ut æquationis primæ veritas, peracta etiam operatione, intacta servetur.*

Analysis vero communis (natura fluentium ignorata) iisdem factoribus aut divisoribus, quibus afficit quantitatem constantem, iisdem & *variabiles* $x$, $y$ &c., tam arduo præcepto afficiendas esse jubet, ut piaculum esset nunquam luendum huic adversari. Docet enim Analystarum omnium accedente suffragio, quoties ex: gr: dividenda sit per (2) æquatio $x = a + y$, vel $x = a - y$, necessarium esse totam æquationem per (2) dividere, ut sit $\frac{x}{2} = \frac{a+y}{2}$, vel $\frac{x}{2} = \frac{a-y}{2}$. Verum quam longe abludat a veritate hæc praxis, nostra Theoria superius manifeste ostendit, statuto superiori Canone.

§. 30. Tamen necesse est hîc memoria revocare, quod superius diximus, factorem ducendum in fluentem vel afficere coefficientem fluentis, vel protonumerum. Primo modo, eodem retento protonumero, mutatur fluentium inter se proportio, ac si valor coefficientis primo sumpti idem servetur, sæpe etiam mutatur & systema, ut vidimus §. 23: secundo modo coefficientes fluentium intacti manent, idemque systema, & mutatur tantum species systematis non natura. Nostræ formulæ superius traditæ sua configuratione diversam hanc rationem; qua factor afficere potest fluentes omni prorsus ambiguitate remota clare demonstrant:

ſtrant: quinimmo nullo negotio a protonumero ad protonumerum tranſitus ſit; quo facile ſyſtema unum in plura, ac plura in unum convertuntur, unione legitima plurium fluentium in unam, aut diviſione unius in plures: ut etiam magis patebit in Capite ſequenti. At Methodus communis præter hanc, quam ſupra demonſtravimus falſam, qua utitur, praxin eodem prorſus modo tractandi fluentes, quo conſtantes, ignorat etiam quandonam æquatio propoſita integrum ſyſtema complectatur, & quando unam tantum ex homologis integrum ſyſtema conſtituentibus repræſentat; neque modum cognoſcit, quo ab integro ſyſtemate ad unam tantum fluentem homologam, vel ab una tantum fluente ad integrum ſyſtema tranſitus legitimus fieri poſſit: hoc eſt prorſus ignorat æquationem unam in plures ſegregare, vel plures in unam tantum recte conjungere. Quod tamen ex ſuis ipſis formulis non erat difficile eruere ſi doctrinam ſupra traditam de diverſa ratione, qua factor aliquis afficit coefficientem fluentis, vel conſtantem ſive protonumerum cognoviſſet. Ut id exemplo illuſtretur, ſint æquationes more communi expreſſæ $x = a - y$; $x = a + y$, quas ſi $a$ protonumerum integrum referat, ſcimus ſingulas integrum ſyſtema ſolitarium $x + y = a$ S A, $x - y = a$ S Y exhibere; quibus ſingulis ſi aptentur formulæ §. 25, quæ utrique ſyſtemati conveniunt, diverſa fluentium $x$, $y$ ( licet eadem nota in utroque ſignentur ) natura ſtatim patet. Verum ſi fiat $x = \frac{1}{2}(2a) - y$; $x = \frac{1}{2}(2a) + y$: hoc eſt ſi ponatur protonumerus integer $(2a)$ diviſus per 2 tunc ſtatim ſingula non niſi unam ex fluentibus homologis repræſentat, & quæ erant duo ſyſtemata invicem diſtracta, non ſunt ſingulæ niſi partes unius ejuſdemque ſyſtematis S A, quæ ſimul conjunctæ illud unum conſtituunt. Ac ſi noſtris formulis §. 22 utamur erit $x = \frac{1}{2}(2a) + y$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) 2a + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) 2a}_{1} = \text{M}; \; x = \frac{1}{2}(2a) - y$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) 2a - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) 2a}_{1} = \text{N},$$

ex quarum fluentium homologarum additione componitur totum ſyſtema integrum S A $x + x = \frac{1}{2} \cdot (2a) + y + \frac{1}{2} \cdot (2a) - y =$

( I

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)2a+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)2a\right)}{1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)2a-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)2a\right)}{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)2a+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)2a=\left(\frac{m+n}{m+n}\right).2a=M+N:$$

quando in primo casu erat prima $x+y=a=M+N=\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a$ S A; secunda $x-y=\left(\frac{m-n}{m-n}\right)a=M-N$ S Y, singulis unum systema solitarium constituentibus. Idem dicas si æquationes propositæ sint $x=y+a$; $x=y-a$: quæ sic elatæ constituunt singulæ systema solitarium S Y, nempe $x-y=a=M-N=\left(\frac{m-n}{m-n}\right)a$; $y-x=a=N-M=\left(\frac{n-m}{n-m}\right)a$: sed in prima $x$ fluens major, $y$ minor; viceversa in secunda. Verum si fiat $x=y+\frac{1}{2}(2a)=M$; $x=y-\frac{1}{2}(2a)=N$, transeunt in fluentes partiales homologas unius systematis S Y, quæ a se invicem subtractæ dant $x-x=(y+\frac{1}{2}(2a))-(y-\frac{1}{2}(2a))=\left(\frac{m-n}{m-n}\right)2a=M-N$: ut nostra Theoria docet. Quod dixi de protonumero $a$ applicetur cuicumque protonumero: ergo & $x+y=a$, erit compositum ex duobus partialibus systematibus $x+y=(\frac{a}{2}+y)+(\frac{a}{2}-y)$, in quo casu $x+y=2\left(\frac{a}{2}\right)$; & $x-y=2\left(\frac{a}{2}\right)=(y+\frac{a}{2})-(y-\frac{a}{2})$ &c. Hæc omnia mire consentiunt cum iis, quæ diximus Cap: IV. & V. Lib. I. P. I[a], jam editæ, atque hac nova luce mirifice illustrantur.

§. 31. Hac tamen veritate §. superioris ignorata Analysis communis ( ut hoc tantum nunc attingam ) quæ semper quamcumque æquationem duabus variabili-

bus more suo conflatam tamquam solitariam sumit & semper unam, non nisi dimidiatam operam præstat; nescia quamcumque æquationem duplicis muneris vices agere, & ut integrum systema solitarium a duobus partialibus conflatum, in quæ proinde rursus dividi potest, & ut dimidiatum & partiale systema unam ex fluentibus repræsentans, cui invenienda est & addenda sua homologa ad integrum systema constituendum. Hinc, cum ab imaginario, si quando errore systematis, vel male instituta subducendi calculi ratione Analysis vetus offendit (quod nimis frequenter contingit), nunquam se se expedire universim potuerit, licet nihil intentatum reliquerit, in eam omnium Analystarum suffragio opinionem descendit, imaginarium esse quid absolutum; utpote in hac scientia malum necessarium nunquam universim a calculo eliminandum: a quo tamen nullo negotio hac una veritate §. superioris cognita se se liberare poterat. Et sane sit æquatio ex. gr. $x = a - y\sqrt{-1}$ (ad quam vel ad alteram $x = a + y\sqrt{-1}$ æquationes omnes imaginarias reduci posse Methodus nota variis artificiis demonstrat): hæc ex demonstratis vel considerari potest tamquam una ex partialibus fluentibus systematis, & invenienda est sua homologa, cui rite conjungatur ad systema integrum constituendum: vel considerari potest tamquam unum systema integrum a duobus partialibus conflatum, quod proinde in sua partialia, sive in suas fluentes homologas dividi potest. Primo modo fiat $x = \frac{1}{2}(2a) - y\sqrt{-1}$, cui respondet sua homologa $x = \frac{1}{2}(2a) + y\sqrt{-1}$; quibus additis erit $x + x = \frac{1}{2}(2a) + y\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(2a) - y\sqrt{-1} = \frac{2}{2}(2a) - 0y\sqrt{-1}$: sed $0y\sqrt{-1} = 0y$; ergo $x + x = \frac{2}{2}(2a) - 0y = \frac{1}{2}(2a) + y + \frac{1}{2}(2a) - y$, & facto $x = 0$, sive $y = a$, $x = 2a - 0y$ in limite maxima, & $x + y = 2a$ systema integrum SA. Quod si fiat $y > a$, erit $x - x = \left(y + \frac{1}{2}(2a)\right) - \left(y - \frac{1}{2}(2a)\right)$; & $x + x = y + \frac{1}{2}(2a) + y - \frac{1}{2}(2a)$, & facto $x = 0$, sive $y = a$, erit $x = 2a + 0y$ in limite minimo, & in casibus mediis $x = 2a + y$ systema integrum SY. In secunda vero suppositione fiat $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - y\sqrt{-1}$, & facto $y = 0$; $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 0y\sqrt{-1} =$

$\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - o\,y = \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y = x + x$, syste-ma integrum S A in sua partialia divisum $x = \frac{a}{2} + y$ ; $x = \frac{a}{2} - y$. Quod si fiat $y > a$, erit $x - x = \left( y + \frac{a}{2}\right) - \left( y - \frac{a}{2}\right)$, sive $x + x = y + \frac{a}{2} + y - \frac{a}{2}$, & facto $y = \frac{a}{2}$, erit $x = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + o\,y$ in limite minimo, & $x = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + y = a + y$ in casibus mediis, systema integrum S Y conflatum a duobus partialibus $x = y + \frac{a}{2}$ ; $x = y - \frac{a}{2}$. Hisce artificiis quæ immediate profluunt a nostra generali Theoria, & a §. 28 hujus ostendunt quanta facilitate atque elegantia, quod frustra & perperam hactenus quæsitum fuerit, obtineri possit, novis auxiliis in subsidium vocatis.





# CAPUT V.

*De primis fluentium abstractarum operationibus.*

§. 1. SI in his, quæ hîc & in posterum dicturi sumus perlegendis atque meditandis attentam operam impendere non pigeat, re ipsa credo patebit, quæ in Capitibus superioribus universim tradidimus, necessario ad hanc Scientiam novis principiis funditus ædificandam præmittenda fuisse, ut inoffenso pede ad ulteriora progredi posset mea hæc nova Theoria. Nunc de primis *fluentium* operationibus a me agendum esse intelligo, ut leges, quibus conformandæ sunt in casibus peculiaribus formulæ analyticæ simpliciores, a quarum varia conformatione pendere vidimus diversas ejusdem systematis affectiones, nec non diversum systema, superius statutæ ad numeros partiales quoscumque, & ad constructiones geometricas ipsis respondentes rite traducantur. Ad quam quidem peculiarem applicationem Methodus vulgaris, quæ nulla certa regula cognoscit, quæ sit quantitas geometrica naturam unitatis induens; quæ sit fluentium natura in alterutro systemate diversa; quomodo coefficiens a quantitate geometrica separetur; qui sit numerus abstractus coefficientis vicem gerens geometricæ quantitati applicandus; & quo modo ab una ad aliam naturam legitimus transitus fieri possit, raro se præstat. Si enim ad ea, quæ magis composita tanto Calculorum sublimiorum apparatu Recentiores præsertim Analystæ magni nominis litteris consignarunt, oculos admoveamus, noverimus artificia ipsorum omnia in eo tota versari, ut longo calculorum ac cæco ducti filo ad aliquam quocumque modo æquationem paucis terminis contentam tandem perveniant; nihil de ejus ad numeros & ad constructiones geometricas applicatione solliciti: quod negotium sane difficillimum, atque finis unus, ad quem tendere debet laboriosa cujuscumque Analystæ industria, aliis quasi patens & commune perficiendum relinquunt: quæ vero simpliciora constructionibus subjiciunt, quantum veritati consentiant, præter ea, quæ diximus in P$^{e}$. I$^{a}$, quæ hîc tradimus magis semper declarant.

§. 2. Quoniam vero vidimus Cap: II quemcumque numerum abstracte sumptum modo naturam protonumeri sive constantis; modo fluentis numerici sive coefficientis tantum; coefficientis modo in protonumerum ducti (quo perficitur fluens) induere posse, & alterutri systemati aptari sola ipsius diversa formulæ, qua complectitur, præparatione atque configuratione; & ad unam vel ad alteram ex istis notionibus determinari posse; regulæ quædam sunt tradendæ, quibus ad illam, quam intelligimus significandam notionem formula geometricis inde lineis repræsentanda ad amussim respondeat. Id ni fiat, formularum præparatio inconsulto, & nulla lege peracta naturæ vel speciei systematis, ad quod non

raro

raro per vim formulæ referuntur, penitus adversatur: quod in Analysi vulgari, quæ symbolis ipsis arbitrio sumptis, quibus utitur, cuicumque systemati promiscue applicatis, & artificiis, quæ sunt propria alterutrius systematis in utroque sine consilio adhibitis, passim usuvenire quisque fateatur oportet, si modo vestigiis hujusce meæ Theoriæ sensim ac successive insistere velit. Ut igitur opus inceptum urgeamus, memoria revocemus nos Capitibus superioribus demonstrasse, ut cujusvis numeri abstracte sumpti integri sive fracti quæ sit ejus natura intelligatur, & quomodo legitime geometricæ constructioni aptari possit primum universim determinandum esse systema & protonumerum, sive naturam & speciem systematis, ad quod illum referre volumus, vel ex peculiaribus circumstantiis jubemur: ut hisce in antecessum statutis sub ea analytica formula concludatur, quam propositum systema necessario requirit. Quare ordine procedentes naturam systematis ab ejus specie primum separemus oportet; & numerum quemcumque tamquam coefficientem numericum abstracte sumentes ad utrumque systema in genere præparabimus cuicumque protonumero applicandum: deinde modum docebimus, quo ad protonumerum quemcumque applicari legitime possit, & ab uno ad alterum protonumerum rite transferri. Porro in toto hoc Capite nomine *fluentis* non nisi fluentem abstractam intelligimus: in posterum vero nomine *fluentis abstractæ* brevitatis gratia quemcumque coefficientem nulli protonumero applicatum indicabimus, quemadmodum nomine *fluentis* coefficientem protonumero applicatum intelligemus: totum vero hoc negotium in sequentibus Problematibus peragetur.

## PROBLEMA I.

§. 3. Quemcumque numerum rationalem, fractum, aximetrem, cujuscumque denuo naturæ ad protonumerum significandum determinare.

Hoc ex Capitibus superioribus sponte fluit: sufficit enim numerum propositum, quem dico K in fractionem $\frac{1}{1}$ ducere, ut fit $K = K \cdot \frac{1}{1} = K \cdot \left(\frac{m+n}{m+n}\right)$ in systemate SA, & $K = K \cdot \left(\frac{m-n}{m-n}\right)$ in systemate SY.

Hoc enim peracto cæteræ, quas ostendimus, hujusce coefficientis modificationes facile applicari possunt.

Quisque videt hujusmodi numerum semper invariatum & integrum in eodem systemate permanere, ac vicem subire unitatis numericæ linearis cujuscumque naturæ; ac veram unitatem geometricam repræsentare, cujus partes a coefficientibus numericis intra limites systematis fluentibus varie intercipiuntur. Porro hæc unitas geometrica uno tantum symbolo immutabili indicata ex: gr: K, quam dicimus protonumerum, a nostra Theoria semper a coefficientibus numericis separatur; & oculis ipsis sola formularum configuratione numeri (non excepta unitate ipsa 1) qui vicem coefficientium gerunt a numero geometricam uni-

unitatem induente sine erroris periculo secernuntur, & variata formula statim assequitur quandonam numerus, qui erat protonumerus constans, ad naturam coefficientis abstracti fluentis transeat, & vice versa: ut in sequentibus magis semper declarabitur. At Methodo communi, in qua coefficientes numeri fluentes symbolis $a$, $b$, $c$ &c qui cogniti sunt ac si essent constantes; qui vero incogniti symbolis $x$, $y$ &c indicantur, cum ipso protonumero vere constanti confunduntur; atque miscentur omnia: neque fieri potest ipsa calculorum natura repugnante, ut quæ sit vera unitas constans sive protonumerus, quæ sint fluentes, & quando & quo modo ab una ad alteram naturam fiat conversio, cognoscatur.

## PROBLEMA II.

§. 4. Quemcumque numerum in naturam *fluentis abstractæ* convertere, & ad utrumque systema præparare.

Ex demonstratis constat fluxus originem non nisi a coefficiente numerico fluente repetendam esse protonumero constante manente: insuper quemcumque coefficientem ab integro vel fracto numero repræsentatum semper fractionis naturam assumere, quæ fractio diversæ est naturæ prout diversum est systema cui applicatur; quoniam in systemate S A summam fluentium abstractarum, in systemate S Y earum differentiam semper unitatem abstractam æquare ostendimus, ut conditio diversa diversi systematis perpetuo intacta servetur. Sit igitur K quicumque numerus in fluentem abstractam utriusque systematis convertendus. Ut id consequamur, utamur artificio §. 23 Cap. IV, & facto $K = K \cdot \frac{1}{1}$, erit $K = \frac{K}{K} \cdot \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{K}} = \frac{K}{K - K + 1}$. At posito $K < 1$, erit $K = \frac{K}{K + (1 - K)}$ fluens abstracta systematis S A, cui respondet sua homologa $\frac{1 - K}{(1 - K) + K}$; sed facto $K > 1$, erit $K = \frac{K}{K - (K - 1)}$ fluens abstracta major systematis S Y, vel $\frac{K}{(K + 1) - K}$ fluens abstracta minor ejusdem systematis, & in primo casu fluens minor homologa $\frac{K - 1}{K - (K - 1)}$; in secundo fluens major homologa $\frac{K + 1}{(K + 1) - K}$. In primo igitur differentia fluentium $\frac{K}{K - (K - 1)} - \frac{(K - 1)}{K - (K - 1)} = 1$: in secundo

K

$$\frac{K+1}{(K+1)-K} - \frac{K}{(K+1)-K} = 1 \text{ Q. E. F.}$$

§. 5. Observandum K non posse ad systema S A traduci nisi sit minor ( 1 ): repugnat enim absolute in hoc systemate dari fluentem abstractam unitate majorem: ideoque in hoc systemate fluens abstracta homologa est fractio unitate minor, quæ vulgo dicitur vera fractio; ut supra notavimus. In hoc igitur casu fiat $K = K.\frac{m}{m} = \frac{K}{K}.\frac{m}{m - m + \frac{1}{K}} = \frac{m\,K}{m\,K + (1 - m\,K)}$, &

$m < \frac{1}{K}$ ut sit $m.K < 1$: necessario igitur in hoc systemate K debet esse vera fractio. Si enim K vel $m\,K$ sit $> 1$, statim fit transitus ad systema S Y, in quo tam est $K = \frac{K}{K-(K-1)}$ fluens major, quam $K = \frac{K}{(K+1)-K}$ fluens minor donec $K > 1$. Sed si K sit $< 1$, prima formula locum habere nequit: quia in hoc systemate minima fluens major abstracta nequit esse minor ( 1 ); secunda vero semper locum habet, quæ cum sit fluens minor a zero usque ad infinitum progredi potest. Ergo posita $K > 1$, utraque formula cum veritate consentit; quia K tam esse potest major quam minor fluens; sed facta $K < 1$, prima convertitur in fluentem systematis S A $= \frac{K}{K+(1-K)}$; repugnat enim esse negativam $-(K-1)$ cum sit $= 1 - K$; secunda semper inviolata manet. In hoc etiam systemate S Y fluentes abstractæ sunt fractiones: sed quæ majores sunt superant semper unitatem: est enim tam $\frac{K}{K-(K-1)} = 1 + \frac{K-1}{K-(K-1)}$, quam $\frac{K+1}{(K+1)-K}$ $= 1 + \frac{K}{(K+1)-K}$: minores vero sunt $\frac{K-1}{-(K-1)+K}$ $= -1 + \frac{K}{K-(K-1)}$: & in secundo casu $\frac{K}{-K+(K+1)}$ $= -1 + \frac{K+1}{(K+1)-K}$: hoc est fractiones modo minores, majores modo unitate ipsa. Formulas vero hujusmodi ad singulas simplices formulas Capitum superiorum, & ad §. 25 Cap. IV in exemplis numericis pro re nata reducemus.

§. 6. Ut vero diligentius rem inquiramus, ponamus $K = \frac{f}{g}$, eritque $\frac{f}{g}.\frac{1}{1}$ $=$

$$= \frac{\frac{f}{g}}{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}$$ ; & fluentes abstractæ homologæ $$\frac{\frac{f}{g}}{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}$$

$$+ \frac{-\frac{f}{g} + 1}{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}$$ : in qua si sit $\frac{f}{g} < 1$, sive $g > f$, erunt fluentes homologæ

$$1.^{a}\ M + N = \frac{\frac{f}{g}}{\frac{f}{g} + (1 - \frac{f}{g})} + \frac{(1 - \frac{f}{g})}{(1 - \frac{f}{g}) + \frac{f}{g}} = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}\ SA.$$ Vel

$$2.^{a}\ M - N = \frac{1 + \frac{f}{g}}{(1 + \frac{f}{g}) - \frac{f}{g}} - \frac{\frac{f}{g}}{(1 + \frac{f}{g}) - \frac{f}{g}} = \frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n}\ SY,$$ vel

$$= \frac{\frac{f}{g}}{\frac{f}{g} - (\frac{f}{g} - 1)} - \frac{(\frac{f}{g} - 1)}{\frac{f}{g} - (\frac{f}{g} - 1)}$$ si $\frac{f}{g} > 1$; in quibus casibus $\frac{f}{g}$ repræsentat unam ex homologis. Quod si formula

$$\frac{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}$$ disponatur ut jubet §. 20 Cap. IV, hoc est

$$M + N = \frac{\frac{1}{2} + \frac{f}{g} + \frac{1}{2} - \frac{f}{g}}{\frac{1}{2} + \frac{f}{g} + \frac{1}{2} - \frac{f}{g}}$$ : in hac, ut illic animadvertimus,

f

$\frac{f}{g}$ non amplius repræsentat unam ex homologis, sed æqualis est semidifferentiæ fluentium abstractarum donec $\frac{f}{g}$ est minor $\frac{1}{2}$; quando in formula 1.ª $\frac{f}{g}$ est una ex homologis systematis S A donec $\frac{f}{g}$ est minor ( 1 ). Erit itaque in hoc casu

$$3.^a\, M+N=\frac{(\frac{1}{2}+\frac{f}{g})+(\frac{1}{2}-\frac{f}{g})}{(\frac{1}{2}+\frac{f}{g})+(\frac{1}{2}-\frac{f}{g})}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1}\ \text{S A}$$

scilicet fluens semidifferentia semper minor semisumma constante $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)$.

Quod si in formula hac $\frac{f}{g}$ superet $\frac{1}{2}$; tunc statim fit transitus ad S Y, & $\frac{f}{g}$ quæ in S A erat semidifferentia fluentium homologarum, convertitur in semisummam fluentium homologarum systematis S Y, estque

$$4.^a\, M-N=\frac{(\frac{f}{g}+\frac{1}{2})-(\frac{f}{g}-\frac{1}{2})}{(\frac{f}{g}+\frac{1}{2})-(\frac{f}{g}-\frac{1}{2})}=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1}\ \text{S Y},\ \&\ \frac{f}{g}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g}=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)$$

fluens semisumma fluentium, atque ideo semper major $\frac{1}{2}$, sive $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)$ semidifferentia constante fluentium abstractarum. Nequit igitur in systemate S A summa fluentium $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$ excedere summam constantium $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)$; contra vero in systemate S Y summa

ma fluentium $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)$ minor esse summa constantium $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)$; quia in utroque casu repugnat summam duarum quantitatum fieri minorem earum differentia.

## EXEMPLUM I.

§. 7. Sit fractio $\frac{1}{7}$ ad fluentem abstractam in utroque systemate reducenda.

Erit ex dictis $\frac{1}{7}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+1}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+(1-\frac{1}{7})}$ $=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}}=\frac{1}{1+6}$, quæ pertinet ad formulam 1. § superioris systematis SA, estque $\frac{1}{1+6}+\frac{6}{6+1}=\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}$ totum systema integrum; & fluentes homologæ $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$. Verum $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+1}$ $=\frac{\frac{1}{7}}{(1+\frac{1}{7})-\frac{1}{7}}$: quo facto transit ad systema SY, fitque fluens homologa minor ejusdem systematis, & pertinet ad formulam 2.am §. superioris, estque $\frac{1+\frac{1}{7}}{(1+\frac{1}{7})-\frac{1}{7}}-\frac{\frac{1}{7}}{(1+\frac{1}{7})-\frac{1}{7}}=\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m-n}$

=

$= \frac{8}{8-1} - \frac{1}{8-1}$, & $\frac{(1+\frac{1}{7})+\frac{1}{7}}{(1+\frac{1}{7})-\frac{1}{7}} = \frac{m}{m-n} + \frac{n}{m-n} = \frac{8}{8-1}$ $+ \frac{1}{8-1}$: & forma fractionis $\frac{1}{7}$, quæ erat in primo systemate SA $\frac{1}{1+6}$, est hîc $\frac{1}{8-1}$, & sua homologa major $\frac{8}{8-1}$, quæ erat in primo systemate SA $\frac{6}{6+1}$. Itaque in systemate SA

$\frac{n}{n+m} + \frac{m}{m+n} = \frac{1}{1+6} + \frac{6}{6+1}$, & $\frac{m-n}{m+n} = \frac{6-1}{6+1}$: at in systemate SY $\frac{m}{m-n} + \frac{n}{m-n} = \frac{8}{8-1} + \frac{1}{8-1}$, & $\frac{m-n}{m-n} = \frac{8-1}{8-1}$: hoc est differentia constans in hoc systemate SY æqualis summæ constanti systematis SA. Nequit tamen $\frac{1}{7}$ fieri fluens major hujusce systematis SY, quia $\frac{1}{7}$ minor est unitate. Quod si referatur ad formulam tertiam ejusdem §., erit

$$\frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{7} + 1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{7} + 1} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \frac{2}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right)},$$ fitque ut vidimus $\frac{1}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}$ in hoc casu semidifferentia fluentium homologarum, cum sit $\frac{1}{7}$ minor $\frac{1}{2}$, & pertinet tantum ad systema SA. Erit igitur $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$



=

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}, \ \& \ \frac{m}{m+n} = \frac{\frac{9}{2 \cdot 7}}{\frac{9}{2 \cdot 7} + \frac{5}{2 \cdot 7}} = \frac{9}{9+5};$$

$$\frac{n}{n+m} = \frac{\frac{5}{2 \cdot 7}}{\frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{9}{2 \cdot 7}} = \frac{5}{5+9}$$ fluentes homologæ, & æquatio utrasque amplectens $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m} = \frac{9}{9+5} + \frac{5}{5+9} =$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9+5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{9-5}{9+5}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+9}{5+9}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{9-5}{9+5}\right)\right) =$$

$$\frac{\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}\right\}\right] + \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)}\right\}\right]}{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right)}{1}$$ fluentes homologæ, quæ differunt a suis respective æqualibus $\frac{9}{9+5}$, $\frac{5}{5+9}$ in hoc, quod illæ sua configuratione punctum datum medium determinant. In hac formula 3ª. si velimus fluentem homologam esse fractionem assumptam $\frac{1}{7}$, fac $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{g}$ $= \frac{1}{7}$, erit $\frac{1}{2} \cdot \frac{f}{g} = \frac{5}{2 \cdot 7}$ & $\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}\right)}$

$$= \frac{\frac{12}{2 \cdot 7} + \frac{2}{2 \cdot 7}}{\frac{12}{2 \cdot 7} + \frac{2}{2 \cdot 7}} = \frac{6}{6+1} + \frac{1}{1+6}.$$ Ergo $\frac{1}{7}$ quæ hac methodo erat se-

midif-

midifferentia fluentium homologarum $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)=\frac{1}{2}.\ \frac{2}{7}$ ,& fluentes $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}=\frac{9}{9+5}+\frac{5}{5+9}$, convertitur in unam ex homologis $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}=\frac{6}{6+1}+\frac{1}{1+6}$ ( posita semidifferentia $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)=\frac{1}{2}.\frac{5}{7}$ )

five $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\ \frac{5}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\ \frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\ \frac{5}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\ \frac{5}{7}\right)}$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{6+1}{6+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{6-1}{6+1}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+6}{1+6}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{6-1}{6+1}\right)\right)}{1}$$

ut in primo casu formulæ 1.ª

## EXEMPLUM II.

§. 8. Sit fractio $\frac{6}{7}$ : ac I°. sit $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{6}{7}-\frac{6}{7}+1}=\frac{\frac{6}{7}}{\frac{6}{7}+(1-\frac{6}{7})}$ $=\frac{6}{6+1}$, ejusque homologa $\frac{1}{1+6}$ & systema S A; & $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+m}$ $=\frac{6}{6+1}+\frac{1}{1+6}$; $\frac{m-n}{m+n}=\frac{6-1}{6+1}=\frac{5}{7}$. II°. $\frac{\frac{6}{7}}{(1+\frac{6}{7})-\frac{6}{7}}$ $=\frac{6}{13-6}$ fluens minor systematis S Y, cui respondet homologa major $\frac{13}{13-6}$, & $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{m-n}=\frac{13}{13-6}+\frac{6}{13-6}$; $\frac{m-n}{m-n}=\frac{13-6}{13-6}$. III°. fiat $\frac{\frac{6}{7}-\frac{6}{7}+1}{\frac{6}{7}-\frac{6}{7}+1}$

=

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{6}{7}+\frac{1}{2}-\frac{6}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{6}{7}+\frac{1}{2}-\frac{6}{7}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}$$

quæ pertinet tantum ad S Y, cum ſit $\frac{6}{7} > \frac{1}{2}$ : fluens major $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}}{1}=\frac{19}{19-5}$ ; minor $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}}{1}=\frac{5}{19-5}$ : &

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m-n}+\frac{n}{m-n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{19+5}{19-5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{14}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}=\frac{6}{7}.$$

Ergo $\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{19+5}{19-5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{19-5}{19-5}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{19+5}{19-5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{19-5}{19-5}\right)\right)}{1}=$

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right]\right\}+\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right]\right\}}{1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}+\frac{1}{2}\right)}{1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$=\frac{\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{6}{7}-\frac{1}{2}\right)}{1}$. Quod ſi velimus $\frac{6}{7}$ eſſe fluentem minorem ſyſtematis SY, fac $\frac{1}{2}\cdot\frac{f}{g}-\frac{1}{2}=\frac{6}{7}$ , erit $\frac{1}{2}\cdot\frac{f}{g}=\frac{6}{7}+\frac{1}{2}$ $=\frac{19}{2\cdot 7}$: igitur $\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}-\frac{1}{2}\right)}$

$$=\frac{\frac{26}{2.7}+\frac{12}{2.7}}{\frac{26}{2.7}-\frac{12}{2.7}}=\frac{13+6}{13-6}=\frac{m}{m-n}+\frac{n}{m-n}$$ quæ est II$^a$ : & semisumma fluentium $\frac{1}{2}$ . $\frac{19}{7}$. Quare proposita quæcumque fractio unitate minor tam potest esse una ex fluentibus systematis S A, & hoc obtinetur modo I°: tam potest esse fluens minor systematis S Y, & hoc obtinetur II° modo. Quæ fractio si sit minor $\frac{1}{2}$ reducitur ad S A modo III°, atque est semidifferentia fluentium homologarum: quod si sit major $\frac{1}{2}$, reducitur ad S Y, & semisummam fluentium homologarum repræsentat.

## EXEMPLUM III.

§. 9. Sit fractio $\frac{7}{6}$ unitate major, quæ ideo repugnat legi bus systematis S A obstringi: neque nisi ad systema S Y traduci potest, idque tribus modis.

I°. Facta $$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{6}-\frac{7}{6}+1}=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{6}-\left(\frac{7}{6}-1\right)}=\frac{7}{7-1}$$ fluens major, & sua homologa $\frac{1}{7-1}$ : & homologarum semisumma $\frac{1}{2}\left(\frac{7+1}{7-1}\right)=\frac{2}{3}$.

II°. Facta $$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{6}-\frac{7}{6}+1}=\frac{\frac{7}{6}}{\left(1+\frac{7}{6}\right)-\frac{7}{6}}=\frac{7}{13-7}$$ fluens minor, & major homologa $\frac{13}{13-7}$; semisumma vero $\frac{1}{2}\left(\frac{13+7}{13-7}\right)=\frac{5}{3}$.

III°.

$$\text{III}^\circ.\ \frac{\frac{7}{6}-\frac{7}{6}+1}{\frac{7}{6}-\frac{7}{6}+1}=\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{7}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}.\frac{7}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)};$$

fluens major $\dfrac{\frac{1}{2}.\frac{7}{3}+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}.\frac{7}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{10}{10-4}$

$=\dfrac{5}{5-2}$; minor $\dfrac{\frac{7}{6}-\frac{1}{2}}{10-4}=\dfrac{4}{10-4}=\dfrac{2}{5-2}$; & semisumma

$\frac{1}{2}\left(\dfrac{5+2}{5-2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{7}{3}$ quæ est fractio proposita.

## EXEMPLUM IV.

§. 10. Sit nunc propositus numerus integer 7 qui nullo modo ad systema SA reduci potest: potest tamen ad SY, idque ut supra tribus modis.

I°. Fiat $7=\dfrac{7}{7-7+1}=\dfrac{7}{7-(7-1)}=\dfrac{7}{7-6}$ fluens major, ejusque homologa $\dfrac{6}{7-6}$, & earum semisumma $=\frac{1}{2}\left(\dfrac{7+6}{7-6}\right)=\frac{1}{2}.\dfrac{13}{1}$

II°. $7=\dfrac{7}{7-7+1}=\dfrac{7}{(7+1)-7}=\dfrac{7}{8-7}$ fluens minor, ejusque homologa major $\dfrac{8}{8-7}$, earum semisumma $\frac{1}{2}\left(\dfrac{8+7}{8-7}\right)=\frac{1}{2}.\dfrac{15}{1}$.

$$\text{III}^\circ.\ \frac{7-7+1}{7-7+1}=\frac{\left(7+\frac{1}{2}\right)-\left(7-\frac{1}{2}\right)}{\left(7+\frac{1}{2}\right)-\left(7-\frac{1}{2}\right)}$$

=

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 14 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 14 - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot 14 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 14 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{15-13}{15-13}:$$

fluens major $\frac{15}{15-13}$, minor $\frac{13}{15-13}$; ſemiſumma $\frac{1}{2}\left(\frac{15+13}{15-13}\right)=7$ numerus propoſitus. Hic animadvertendum eſt, licet numerus propoſitus ſit integer, tamen ſemper quando artificiis traditis ad fluentem reducitur, naturam fractionis induere. In primo enim caſu eſt $\frac{7}{7-6}$ fluens major; in ſecundo eſt $\frac{7}{8-7}$ fluens minor: in tertio eſt $\frac{1}{2}\left(\frac{15+13}{15-13}\right)$: in quibus ſingulis eſt 7, ſed tamen in ſingulis diverſam formam atque naturam repræſentat ope denominatoris diverſi, a quo in ſingulis caſibus diverſe afficitur, & a quo fluens altera homologa exhibetur, quæ varia eſt valore & natura pro varia diviſione ejuſdem denominatoris.

## EXEMPLUM V.

§. 11. Sit numerus propoſitus $1'$, quem deſigno lineola ſuffixa ut a conſtanti (1) ſecernatur.

I°. modo erit $1' = \frac{1'}{1'-1'+1} = \frac{1}{1'+(1-1')} = \frac{1}{1'+o}$ in SA fluens una facta maxima, cui reſpondet ſua homologa $\frac{o}{o+1'}$ minima, & ſemidifferentia $\frac{1}{2}\left(\frac{1'-o}{1'+o}\right)$ maxima.

II°. $1' = \frac{1'}{1'-(1'-1)} = \frac{1'}{1'-o}$ SY fluens major facta minima, cui reſpondet homologa minor facta minima $= \frac{o}{1'-o}$, & ſemiſumma $\frac{1}{2}\left(\frac{1'+o}{1'-o}\right)$ minima. Vel $= \frac{1'}{(1+1')-1'} = \frac{1'}{2-1'}$ fluens minor, cui reſpondet fluens ma-

major $\frac{2}{2-1}$, & semisumma $\frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2-1}\right)$. Quare in systemate S A $\frac{1'}{1'+o}$ est maxima, cum sit minimus denominator $1'+o$: ergo cæteræ debent esse unitate minores. In systemate vero S Y $\frac{1'}{1'-o}$ est minima quia denominator est maximus, æqualis scilicet numeratori $1'$: ergo reliquæ fluentes majores unitatem necessario superent necesse est.

$$\text{III}^{\circ}.\ \frac{1'-1'+1}{1'-1'+1}=\frac{\left(1'+\frac{1}{2}\right)-\left(1'-\frac{1}{2}\right)}{\left(1'+\frac{1}{2}\right)-\left(1'-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot(2.1')+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}(2.1')-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot(2.1')+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}(2.1')-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$$

$=\frac{3-1}{3-1}$ ad S Y, & fluens major $\frac{3}{3-1}$, fluens minor $\frac{1}{3-1}$, & semisumma $\frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3-1}\right)=1$.

## EXEMPLUM VI.

§. 12. Sit nunc ipsum ($o$) in fluentem convertendum. Erit

I°. $o=\frac{o}{o-o+1}=\frac{o}{o+(1-o)}=\frac{o}{o+1}$, ad S A fluens minima, cui respondet sua homologa facta maxima $\frac{1}{1+o}$ & semidifferentia maxima $\frac{1}{2}\left(\frac{1'-o}{1'+o}\right)$ ut in primo casu exempli antecedentis.

II°. $\frac{o}{(1+o)-o}$ fluens minor facta minima systematis S Y, cui respondet fluens major homologa item minima $\frac{1'}{1'-o}$, & semisumma $\frac{1}{2}\left(\frac{1'+o}{1'-o}\right)$ ut supra. In utroque systemate tam summa, quam differentia fluentium homogarum æqualis est (1): a diversa vero ipsius zero positione distinguitur diver-

sa

ſa natura tam ſyſtematis, quam fluentium. Nam legitime diſpoſitæ formulæ dabunt $\frac{(1-o)+o}{(1-o)+o} = \frac{(1-o)-o}{(1-o)+o}$ in SA, $= \frac{(1+o)+o}{(1+o)-o} = \frac{(1+o)-o}{(1+o)-o}$ in SY: in quibus aucto per minimum zero, creſcente in utroque ſyſtemate minori fluente, fluens major decreſcit in SA, creſcit in SY: & in SA ſumma conſtans, differentia fluens; contra in SY. Creſcente $(o)$ ſupra unitatem, quæ erat ſumma in SA conſtans tranſit in differentiam conſtantem, & fit tranſitus a SA ad SY: & quæ erat differentia fit ſumma negativa ſyſtematis SY, quæ ſigno mutato tranſit in ſummam poſitivam ejuſdem SY; cum ſit, tranſgreſſo limite (1), ex: gr: $\frac{(1-o)-o}{(1-o)+o} = \frac{(1-11)-11}{(1-11)+11} = -\frac{11-(11-1)}{11-(11-1)} = \frac{11+(11-1)}{11-(11-1)}$. At in ſyſtemate SY retenta eadem formularum diſpoſitione (hoc eſt niſi ipſi $o$ ſignum mutetur) numquam ad SA fit tranſitus, creſcat licet $o$ uſque ad infinitum. Ex quo eruitur limitem minimum ſyſtematis SY eſſe maximum ſyſtematis SA, ultra quem egredi nequit niſi in ſyſtema SY convertatur: at in SY a zero uſque ad infinitum nulla ſyſtematis mutatione vagari licet.

III°. $\frac{1-o+o}{1-o+o} = \frac{\left(\frac{1}{2}+o\right)+\left(\frac{1}{2}-o\right)}{\left(\frac{1}{2}+o\right)+\left(\frac{1}{2}-o\right)} =$

$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.(2.o)\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.(2.o)\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.(2.o)\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.(2.o)\right)}$, & fluens homologa major $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2.o)$ facta minima $= \frac{1}{2}$; homologa minor facta maxima $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.(2.o) = \frac{1}{2}$, & ſemidifferentia $=$

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.(2.o)\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2.o)\right) = \frac{1}{2}(2.o) = o$, ipſum jam aſſumptum zero. Formula ſuperior donec creſcit $o$ intra limites $o$, &

& $\frac{1}{2}$ pertinet ad S A, quo limite tranſgreſſo tranſit in differentiam conſtantem, & ad S Y; quo docemur in hac tertia formulæ præparatione, in qua *o* eſt ſemidifferentia fluentium, donec fluens *o* eſt minor $\frac{1}{2}$, repugnare ſyſtema S Y; in quo differentia fluentium, quæ eſt ſemper conſtans, nequit eſſe fluens: viceverſa fluens *o* excedens $\frac{1}{2}$ tranſit ex dictis in ſemiſummam fluentium, quæ in S A cum ſit conſtans nequit eſſe fluens niſi tranſeat in S Y.

## EXEMPLUM VII.

§. 13. Vicem numeri in fluentem abſtractam convertendi gerat ($\infty$), ſcilicet infinitum abſolutum: Erit

I°. $\infty = \frac{\infty}{\infty - \infty + 1} = \frac{\infty}{\infty - (\infty - 1)}$ ſemper ad S Y; ſed in hoc caſu repræſentat fluentem majorem in limite maximo, cui reſpondet ſua homologa minor item maxima $\frac{\infty - 1}{\infty - (\infty - 1)}$, & earum ſemiſumma $\frac{1}{2}\left(\frac{\infty + (\infty - 1)}{\infty + (\infty - 1)}\right)$.

II°. $\infty = \frac{\infty}{(\infty + 1) - \infty}$ fluens mînor maxîma, & ſua homologa major item maxima $\frac{\infty + 1}{(\infty + 1) - \infty}$ & ſemiſumma $\frac{1}{2}\left(\frac{(\infty + 1) + \infty}{(\infty - 1) - \infty}\right)$.

III°. $$\frac{\infty - \infty + 1}{\infty - \infty + 1} = \frac{\left(\infty + \frac{1}{2}\right) - \left(\infty - \frac{1}{2}\right)}{\left(\infty + \frac{1}{2}\right) - \left(\infty - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \infty) + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \infty) - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \infty) + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \infty) - \frac{1}{2}\right)}$$ : fluens homologa ma-

jor

jor $= \dfrac{\frac{1}{2}(2.\infty)+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}.(2.\infty)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.(2.\infty)-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\infty+\frac{1}{2}}{1}$: minor $= \dfrac{\infty-\frac{1}{2}}{1}$, & semisumma

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\infty+\frac{1}{2}+\infty-\frac{1}{2}}{1}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{2.\infty}{1}\right)=\infty \text{ proposito.}$$

Si compares summam fluentium homologarum in singulis istis casibus, & consulas methodum communem, singulas hasce multum inter se differre fidenter pronuntiabis. Tamen perfectam inter singulas intercedere æqualitatem sic sumpta una quavis, demonstro. Sumatur primo $\frac{\infty+(\infty-1)}{\infty-(\infty-1)}$, quæ facto $\infty-1 = \infty'$, convertitur in secundam $\frac{(\infty'+1)+\infty'}{(\infty'+1)-\infty'}$: quod si ponas $\infty-\frac{1}{2} = \infty''$ exsurget tertia $\dfrac{\left(\infty''+\frac{1}{2}\right)+\left(\infty''-\frac{1}{2}\right)}{\left(\infty''+\frac{1}{2}\right)-\left(\infty''-\frac{1}{2}\right)}$: eodem artificio ex positione unius cæteras duas invenies. Hinc vera est æquatio $\frac{\infty+(\infty-1)}{\infty-(\infty-1)}$

$$=\frac{(\infty+1)+\infty}{(\infty+1)-\infty}=\frac{\left(\frac{1}{2}(2.\infty)+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}(2.\infty)-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}(2.\infty)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}(2.\infty)-\frac{1}{2}\right)};$$

dummodo advertas ( $\infty$ ) primæ formulæ fluentem majorem maximam repræsentare; secundum fluentem minorem maximam, quæ semper differt a majori per ( 1 ) constantem; tertium vero $\frac{1}{2}.2\infty = \infty$ semisummam fluentium homologarum significare, & a puncto medio dato originem ducere. Quare eodem

dem manente valore mutatur tantum in singulis istis formulis natura fluentium, earumque origo atque positio: quæ diligenter animadvertamus oportet, ne errore communi imbuti fluentes, quæ eodem symbolo notantur, identicas & quoad valorem, & quoad naturam & originem accipiamus, quæcumque fiat ejusdem formulæ transformatio. Quod contingit in hoc limite maximo, idem evenit & in limite minimo, nec non in casibus intermediis: ut propterea ejuranda sit doctrina communis, quæ docet in ∞ ( $\infty$ ) negligi posse quantitates finitas, si quibus comitatur; cum fluentes homologæ in utroque etiam limite semper differant quantitate constante (1): iisque affectionibus subjiciantur, pro diversa systematum natura, quibus intermediæ obnoxiæ sunt.

§. 14. Antequam progredior hic diligentissime est animadvertendum in superiori formula §. 6. $\dfrac{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}$ duobus terminis identicis $\frac{f}{g} - \frac{f}{g}$, & (1) conflata, terminum solitarium (1) esse semper constantem, & denominatorem fractionis repræsentare; ex cujus divisione in duas partes singuli fluentium homologarum numeratores exhibentur: at in terminis identicis $\frac{f}{g} - \frac{f}{g}$ evanescentibus fluxus origo constituenda est, cum in locum $\frac{of}{g}$ quicumque numerus substitui possit, eodem denominatore (1) perseverante. Idem contingit formulis $\dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g}\right)}$ S.A. quando $\frac{f}{g} < \frac{1}{2}$; $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2f}{g} - \frac{1}{2}\right)}$ S.V. quando $\frac{f}{g} > \frac{1}{2}$. Itaque omnes & singulæ fluentes utriusque systematis denominatore (1) tamquam primo ac communi denominatore gaudent: quæ tunc fiunt homologæ, quando summa, vel differentia earum numeratorum sit & ipsa = (1) denominatori (a cujus divisione numeratores fluentium homologarum oriuntur),

tur), ut inde deducatur fractio $\frac{1}{1}$. Sub hac forma igitur elatæ formulæ semper fluentes a constantibus distinguuntur, nec periculum est ut primæ pro secundis, & viceversa, accipiantur; cum nulla alia constans reperiatur quam 1 in primo casu; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ in secundo. Verum si formulæ superiores more communi ad simplicitatem, ut ajunt, reducantur, ac fiat $\frac{f - f + g}{f - f + g}$; $\frac{\frac{1}{2}g + f + \frac{1}{2}g - f}{\frac{1}{2}g + f + \frac{1}{2}g - f}$; $g$ locum constantis in utrisque occupat, $f$ fluentis: vel si fiat $\frac{1 - 1 + \frac{g}{f}}{1 - 1 + \frac{g}{f}}$; $\frac{\frac{1}{2}\frac{g}{f} + 1 + \frac{1}{2}\frac{g}{f} - 1}{\frac{1}{2}\frac{g}{f} + 1 + \frac{1}{2}\frac{g}{f} - 1}$, $\frac{g}{f}$ constantis sive denominatoris locum occupat, & 1 fluentis: facile tamen omnes ad primam ac veram formam reducuntur, si fiat $\frac{\frac{f - f + g}{f - f + g}}{1}$

$$= \frac{\frac{f - f + g}{g}}{1} = \frac{\frac{f}{g} - \frac{f}{g}}{1} + 1 = \frac{\frac{\frac{1}{2}g + f + \frac{1}{2}g - f}{g}}{1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{f}{g} + \frac{1}{2} - \frac{f}{g}}{1}; \text{ sive } \frac{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1}{\frac{f}{g} - \frac{f}{g} + 1};$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g}\right)}$$; & omnia rite procedunt.

§. 15.

§. 15. Difficultas tamen maxima, si doctrina supra tradita ignoretur; suboriri potest quando terminus fluens assumptus sit ( 1 ), vel ( 0 ), aut ejus inversum $\frac{1}{0} = \infty$: in quibus casibus vestigia communis Methodi secuti errorem offendimus, vel difficultatibus nullo remedio noto tollendis implicamur. Ut hoc exemplis declaretur, sumamus formulas Exempli V, in quo fluentem sumpsimus ( 1' ), & invenimus formulas $\frac{1' - 1' + 1}{1' - 1' + 1}$, &

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1')\right) - \left(\frac{1}{2}(2 \cdot 1') - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1')\right) - \left(\frac{1}{2}(2 \cdot 1') - \frac{1}{2}\right)},$$

in quibus quæ sunt fluentes evanescunt, manente $\frac{1}{1}$, vel $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ constante. Verum si fiat divisio per fluentem 1', erunt formulæ $\frac{1 - 1 + \frac{1}{1'}}{1 - 1 + \frac{1}{1'}}$, &

$$\frac{\left(\frac{1}{2 \cdot 1'} + \frac{1}{2}(2 \cdot 1)\right) - \left(\frac{1}{2}(2 \cdot 1) - \frac{1}{2 \cdot 1'}\right)}{\left(\frac{1}{2 \cdot 1'} + \frac{1}{2}(2 \cdot 1)\right) - \left(\frac{1}{2}(2 \cdot 1) - \frac{1}{2 \cdot 1'}\right)} = \frac{\frac{1}{1'} + 0}{\frac{1}{1'} + 0},$$

quæ si recte reducatur, dabit

$$\frac{\frac{1}{1'}}{\frac{1}{1'} + \left(1 - \frac{1}{1'}\right)} + \frac{1 - \frac{1}{1'}}{\frac{1}{1'} + \left(1 - \frac{1}{1'}\right)} \text{ S A},$$

vel

$$\frac{\frac{1}{1'}}{\frac{1}{1'} - \left(\frac{1}{1'} - 1\right)} - \frac{\left(\frac{1}{1'} - 1\right)}{\frac{1}{1'} - \left(\frac{1}{1'} - 1\right)} \text{ S Y}$$

=

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2.1}{1'}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2.1}{1'}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1'}{2}\cdot\frac{2.1}{1'}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2.1}{1'}-\frac{1}{2}\right)}$$ , quæ tamen eſt inverſa primæ, quam nobis propoſuimus.

§. 16. Sit nunc ($o$) Exempli VI numerus fluens, quod vidimus oriri a formula $\frac{o}{o-o+1} = \frac{o}{(1-o)+o}$ vel $= \frac{o}{(1+o)-o}$; cui reſpondet in primo caſu ſua homologa $\frac{1-o}{(1-o)+o}$, & in ſecundo $\frac{1+o}{(1+o)-o}$, ac earum ſumma in primo caſu $\frac{(1-o)+o}{(1-o)+o}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+o\right)+\left(\frac{1}{2}-o\right)}{\left(\frac{1}{2}+o\right)+\left(\frac{1}{2}-o\right)}$$ S A; earum differentia in ſecundo

$$\frac{(1+o)-o}{(1+o)-o} = \frac{\left(o+\frac{1}{2}\right)-\left(o-\frac{1}{2}\right)}{\left(o+\frac{1}{2}\right)-\left(o-\frac{1}{2}\right)}$$ S Y. Si vero utraque dividatur per ($o$) exſurget $\frac{\frac{1}{o}-1+1}{\frac{1}{o}-1+1} = \frac{\frac{1}{2.o}+1+\frac{1}{2.o}-1}{\frac{1}{2.o}+1+\frac{1}{2.o}-1}$;

$\frac{\frac{1}{0}+1-1}{\frac{1}{o}+1-1}$, in quibus locum fluentis occupat conſtans ( 1 ), & viceverſa fluens conſtantis locum. Quæ ſi more communi reducantur primæ $\frac{1-o+o}{1-o+o} = \frac{1+o-o}{1+o-o}$ dabunt $\frac{1\mp o.o}{1\mp o.o}$: ſecundæ $\frac{\infty-o}{\infty-o} = \frac{\infty+o}{\infty+o}$. Sumpto vero numero ( $\infty$ ) Exemp. VII erunt primæ formulæ reductæ more communi

$$\frac{1+\infty-\infty}{1+\infty-\infty}=\frac{1+0.\infty}{1+0.\infty}=\frac{1+\frac{0}{0}}{1+\frac{0}{0}}$$ , & facta divisione per ( $\infty$ )

$$\frac{\frac{1}{\infty}+1-1}{\frac{1}{\infty}+1-1}=\frac{\frac{1}{\infty}-1+1}{\frac{1}{\infty}-1+1}=\frac{0+0}{0+0}=\frac{0-0}{0-0}$$ : quæ singulæ

quid sibi velint nemo hactenus assecutus est, neque in posterum vulgatis methodis assequi poterit.

§. 17. Mea tamen Theoria arcanum hoc adhuc impervium nullo negotio palam prodit, atque ostendit primas formulas $\frac{1\mp 0.0}{1\mp 0.0}$, vel $\frac{1+\frac{0}{0}}{1+\frac{0}{0}}$ significare jam factam fuisse actu divisionem unitatis abstractæ in duas partes, quæ sunt fluentes limitis, easque a se invicem distinctas exhibere: secundas vero $\frac{\infty\pm 0}{\infty\pm 0}$, $\frac{0+0}{0+0}$ significare unitatem ipsam abstractam in duas fluentes limitis dividendam: ita ut transitus hic a divisione jam actu peracta ad divisionem indicatam duarum fluentium homologarum limitis, ac viceversa, totus peragatur a divisione $\frac{1\mp 0.0}{1\mp 0.0}$ per ( $0$ ), vel multiplicatione per ( $\infty$ ), & exsurgit $\frac{\infty\pm 0}{\infty\pm 0}$: contra vero hæc multiplicata per ( $0$ ), vel divisa per ( $\infty$ ) restituit iterum primam $\frac{1\mp 0.0}{1\mp 0.0}$. At $\frac{1+\frac{0}{0}}{1+\frac{0}{0}}$ multiplicata per ( $0$ ) vel divisa per ( $\infty$ ) transit in secundam $\frac{0+0}{0+0}$, quæ divisa per ( $0$ ) vel multiplicata per ( $\infty$ ) rursus in primam transmutatur; verbo fractio $\frac{1}{1}$ additione

tione vel ſubtractione ( $o \cdot o$ ) dat fluentes limitis alterutrius ſyſtematis homologas actu diviſas: at fractiones $\frac{o}{o}$, vel $\frac{\infty}{\infty}$ ejuſdem ( $o$ ) additione vel ſubtractione ambas utriuſque ſyſtematis fluentes limitis compendio continent, quæ evolutæ recidunt in fluentes ſuperiores actu diſtinctas. Itaque $\frac{o}{o}$ eſt fractio, ex cujus evolutione educuntur limites maximi ſyſtematis S Y, ſi fiat $\frac{o}{o} = \frac{o+o}{o+o}$

$$= \frac{o+1-1}{o+1-1} = \frac{1+\frac{1}{o}-\frac{1}{o}}{1+\frac{1}{o}-\frac{1}{o}} = \frac{1+\infty-\infty}{1+\infty-\infty} = \frac{\infty-(\infty-1)}{\infty-(\infty-1)}$$

ambæ ad S Y, ac tandem $\frac{\left(\frac{1}{2}(2.\infty)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}(2.\infty)-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}(2.\infty)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}(2.\infty)-\frac{1}{2}\right)}$;

quæ ſingulæ ad ſyſtema S Y pertinent: repugnat enim cum ſyſtemate S A infinitum poſſe conciliari. Singulæ iſtæ formulæ, in quibus ( $\infty$ ) eſt abſolutum non poſſunt amplius augeri, decreſcere tamen indefinite poſſunt ea tamen lege ut in formula $\frac{(1+\infty)}{1} - \frac{\infty}{1} \bar{\infty} (\infty)$ uſque ad ( $o$ ) minui poſſit ( eſt enim $\frac{\infty}{1}$ fluens minor ): at in formula $\frac{\infty}{1} - \left(\frac{\infty}{1} - 1\right) \bar{\infty} (\infty)$, quod eſt fluens major, minui tantum poſſit uſque ad ( 1 ). In tertia vero ( $\infty$ ) ultra ( 1 ) uſque ad $\frac{1}{2}$ decreſcere poteſt: in hoc enim caſu ( $\infty$ ) eſt æquale ſemiſummæ $\frac{1}{2} . 2\infty$ fluentium, quod factum $= \frac{1}{2}$, fluens minor $\infty - \frac{1}{2}$ fit *zero*, major $\infty + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ minima, ut ſemper ſervetur eadem inter ipſas differentia ( 1 ).

§. 18. Fractio vero $\frac{\infty}{\infty}$ eſt fractio quæ compendio continet fluentes homolo-

gas limitis systematis S A, nec non limitis minimi fluentium systematis S Y. Nam more nostro tractata erit $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty \mp o}{\infty \mp o} = \frac{\infty - 1 + 1}{\infty - 1 + 1} = \frac{\infty + 1 - 1}{\infty + 1 - 1}$

$$= \frac{1 \mp \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty}}{1 \mp \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty}} = \frac{(1 - o) + o}{(1 - o) + o} \text{ S A maxima \& minima,} = \frac{1 + o - o}{1 + o - o}$$

SY ambæ minimæ, vel $\dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot o)\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot o)\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot o)\right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot o)\right)}$ SA

in qua $\dfrac{\frac{1}{2} + o}{1}$ est fluens minima, $\dfrac{\frac{1}{2} - o}{1}$ maxima, in quo casu fluentes æquantur cum semidifferentia sit zero. At in systemate S Y non nisi $\frac{(1 + o)}{1} - \frac{o}{1}$ locum habere potest, cum fluentes nunquam possint inter se æquari; semper enim differant oportet vi systematis per (1). In hoc igitur systemate S Y eodem modo repugnat quominus fluens major fieri possit $(o)$, quo repugnat in S A alterutram ex fluentibus homologis fieri posse $(\infty)$. Ex hisce consequitur fractionem $\frac{o}{o}$ compendio fluentes homologas systematis S Y in limite maximo, in quo utræque sunt infinitæ, sub se continere: contra vero fractionem $\dfrac{1}{o \cdot \frac{1}{o}} = \frac{\infty}{\infty}$ fluentes maximam unam, alteram minimam systematis S A sub se complecti, repugnante altera $\frac{o}{o}$; quod tamen contrarium cuique videri poterit rem hanc ignoratione horum principiorum perfunctorie agenti. Hæc mire consentiunt & illustrant quæ diximus in P^e. I^a. & in CAP. III *hujus*. Nunc confer quæ circa fractionem hanc $\frac{o}{o}$, vel $\frac{\infty}{\infty}$ ab Analystis universim traduntur cum hisce meis, ut ex hoc etiam, quantum mea hæc Theoria veritate ac potentia communem antecellat, judicare possis: consecutio-

cutiones enim ex hisce pleno alveo profluentes, quæ nunc instant, non sinunt me in conferenda utraque Theoria diutius immorari. Advertas tantum hîc volo, hujusmodi fractiones $\frac{o}{o}$, $\frac{\infty}{\infty}$ a nobis doceri fluentes tantum homologas limitis lineares utriusque systematis sub se comprehendere, qui in eo nunc sumus, ut de systemate tantum lineari agamus: quid vero significent in aliis dimensionibus suo loco trademus. Illud tamen silentio non est prætereundum ex demonstratis luce clarius patere, pari passu sed inverso procedere ( $o$ ) cum ( $\infty$ ) absoluto, ( quod sæpius in P^e. I^a. inculcavimus ), dummodo quid ambo vere sint, & cui systemati conveniant, & quomodo recte applicari possint probe noscamus: ex quo etiam patet quam longe a veritate aberret communis omnium consensu recepta opinio, quæ libenter accepto ( $o$ ) tamquam limite minimo, ( $\infty$ ) infinitum quod est alter limes maximus, intra quos limites in systemate S Y necessario vagantur appositæ fluentes, tamquam absurdum extrudit.

§. 19. Ex formulis supra traditis illud etiam novum notatu dignum animadvertendum est, duplicem scilicet ipsius zero naturam, licet promiscue in methodo communi hac nota ( $o$ ) indicetur. *Zero* enim vel significat subtractionem alicujus numeri a se ipso, in quo casu vere est $b - b$: vel significat eumdem numerum unum & indivisum fluentem, qui, continua diminutione tandem in punctum a quo discesserat originis regressus, fit nullus, quo in casu nota ( $o$ ) legitime designatur. Differentia hæc quæ intercedit maxima inter unum & alterum zero diligenter est attendenda, ne numerus fluens continuo decremento nullus factus cum ipso numero magnitudinis cujuscumque a se ipso subtractus confundatur. Longe enim differre vidimus formulas $\frac{1 \pm o . \frac{f}{g}}{1} = \frac{1 \pm (1 - 1) . \frac{f}{g}}{1}$; & $\frac{1 \pm o . o}{1} = \frac{1 \pm (1 - 1) . o}{1}$, licet inter se utraque æquatur: prima enim exhibet duas fluentes finitas $\frac{1 \pm \frac{f}{g}}{1}$, $\mp \frac{\frac{f}{g}}{1}$ inter se inæquales; secunda $\frac{1 \pm o}{1}$, $\mp \frac{o}{1}$ duas fluentes limitis quarum prima $= 1$ maxima in S A, minima in S Y; secunda ( $o$ ) in utroque systemate minima. Quod si sumamus formulas $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{o}{2}\frac{f}{g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

+

$$+ ( 1 - 1 ) . \frac{f}{2g} = \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} . \frac{f}{g} \right)}{1} + \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \frac{f}{g} \right)}{1} \text{; \&}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{0}{2} . 0 = \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} . 0 \right)}{1} + \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . 0 \right)}{1} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} . 0 \right)$$

$+ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . 0 \right)$; dabit prima duas fluentes inter se inæquales; secunda duas æquales: in primis differentia $\frac{f}{g}$; in secundis differentia nulla. Hinc in formulis §. 16 $\frac{0 \pm 0}{0 \pm 0}$, *zero* primum positivum est quantitas fluendo facta zero, & $\pm 0 = \pm ( 1 - 1 )$, ac formula $\frac{0 \pm ( 1 - 1 )}{0 \pm ( 1 - 1 )}$, ut in eodem §. docuimus. Universim itaque in formulis quibus convenit, nullo modo omittendum est ( $0$ ). Vel enim oritur a differentia coefficientium, a subtractione scilicet ejusdem coefficientis numerici cuicumque quantitati applicati a se ipso: vel ( $0$ ) est ipsa quantitas fluens *zero* facta. In primo casu negligi nullo modo potest: quia si a differentia ad summam fiat transitus vel viceversa, exsurgit duplus valor illius quantitatis, quæ primum ratione coefficientis $1 - 1$ erat nulla. In secundo casu ( $0$ ) repræsentans quantitatem individuam *zero* factam omitti nequidem potest: quia ( $0$ ) & indicat punctum originis, in quo fluens est ( $0$ ), & additum alicui quantitati constanti repræsentat fluentem majorem factam minimam, ut est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} . 0$: at a constante detractum exhibet fluentem minorem in limite maximo, ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} . 0$

§. 20. Ex hujusce veritatis ignoratione incredibile dictu est quot & quanti in Analysim communem errores irrepserint, quæ terminos illos omnes, qui afficiuntur *zero*, & in æquatione evanescunt, universim nullo delectu habito penitus negligit & a calculo rejicit: ex qua omissione æquales fluentes fiunt quæ sunt inæquales, atque earum differentia fit nulla, quæ tamen finita est: ut videre est in exemplo superiori in quo facta more communi $x + x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{of}{g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, fit differentia $x - x = o$, quæ tamen est $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g} = \frac{f}{g}$. Crescit error in systemate SY, in quo est $\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g} + \frac{1}{2}\right)}{1}$

$+ \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g} - \frac{1}{2}\right)}{1}$, si fiat $x + x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2f}{g} = \frac{f}{g}$, & $x - x = o$,

sive differentia nulla, quæ in hoc systemate prorsus repugnant. Universim enim loquendo in systemate S A nunquam summa, quæ est constans $= 1$, nullescere potest; differentia vero potest quidem fieri zero in eo tantum casu, in quo fluentes singulæ sunt dimidiæ unitatis, nusquam alias. At in systemate S Y nec summa nec differentia unquam fieri potest zero; minimus enim valor summæ reducitur ad unitatem, in quo tantum casu summa æqualis est differentiæ, quæ semper constans est & unitati æqualis. Qui error quæ & quanta procedente calculo errorum inde nascentium caussa esse possit non est hujusce loci inquirere. Hic tantum innuo ignorata hac duplici ratione, qua termini in calculo nullescere possunt, postremis hisce temporibus & magni nominis Analystas duplicem *zero* geometricum unum, alterum metaphisicum commentos fuisse, ac unum ab altero natura differre; nec non *zero* reale a *zero* imaginario: ut errores, in quos necessario impingunt in concinnandis calculis hac labe infectis aliquo modo eluderent. Sed de hoc alias.

§. 21. Hisce explicatis ad formulas, quæ continent fluentes medias homologas in utroque systemate rite conformandas accedentes solvamus necesse est primum sequens

## PROBLEMA III.

Data quacumque fluente alterutrius systematis suam homologam invenire.

Hoc tamen Problema est cum II ita conjunctum ut unum sine altero solvi nequeat, dummodo eam fluentibus formam tribuamus, quam requirit systema. Ex II colligitur, præparato quocumque numero ad fluentem abstractam, necessario haberi ex eadem formula suam fluentem homologam. Accedamus itaque ad solutionem

## PROBLEMATIS IV.

§. 22. Datum quemcumque numerum in duas fluentes homologas dividere, & ad utrumque systema referre.

Pro-

Problema hoc solvi potest superioribus formulis fluentium limitis, substituendo in locum ( $o$ ) vel ( $\infty$ ) numerum finitum propositum; juvat tamen doctrinam hanc sequentibus majori in lumine collocare. Sit igitur primum numerus propositus integer 7 Exempl. IV, fac ex demonstratis $\frac{7}{7} = \frac{\frac{7}{1} \mp o}{\frac{7}{1} \mp o}$

$$= \frac{\frac{7}{1} - 1 + 1}{\frac{7}{1} - 1 + 1} = \frac{\frac{7}{1} + 1 - 1}{\frac{7}{1} + 1 - 1}$$

, in quarum prima compendio continentur fluentes homologæ systematis S A; in secunda fluentes homologæ systematis S Y. Facta vero divisione per $\frac{7}{1}$, habentur ex prima $\frac{\left(1 - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{7}}{\left(1 - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{7}}$ fluentes homologæ singillatim systematis S A $= \frac{6}{6+1} + \frac{1}{1+6}$ : & ex secunda

$$\frac{1 + \frac{1}{7}}{\left(1 + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}} - \frac{\frac{1}{7}}{\left(1 + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}} = \frac{8}{8-1} - \frac{1}{8-1}$$

fluentes homologæ systematis S Y. Verum cum $\frac{1}{7}$ sit fractio, in qua denominator 7 est in S A = summæ fluentium, & in S Y earum differentiæ ea lege, ut numerator ( 1 ) sit alterutra ex illis partibus, in quas infinitimode dividi potest 7, quin in ejus valore aliqua mutatio eveniat; ( atque ideo semper constans perseverat ); patet numeratorem ( 1 ) naturam fluentis necessario induere oportere. Divide igitur 7 per $m$ fluentem, quæ alterutram ex illis infinitis partibus homologis, in quas dividi potest denominator 7, necessario repræsentabit, & habebis $\frac{7}{m} = \frac{\frac{7}{m} - 1 + 1}{\frac{7}{m} - 1 + 1} = \frac{\frac{7}{m} + 1 - 1}{\frac{7}{m} + 1 - 1}$; & facta divisione per

$\frac{7}{m}$ ſe ſe offerent fluentes homologæ a ſe invicem ſeparatæ

1ª. $\dfrac{1-\frac{m}{7}}{\left(1-\frac{m}{7}\right)+\frac{m}{7}}+\dfrac{\frac{m}{7}}{\frac{m}{7}+\left(1-\frac{m}{7}\right)}$ S A: 2.ª $\dfrac{1+\frac{m}{7}}{\left(1+\frac{m}{7}\right)-\frac{m}{7}}-\dfrac{\frac{m}{7}}{\left(1+\frac{m}{7}\right)-\frac{m}{7}}$ S Y: 3.ª $\dfrac{\frac{m}{7}}{\frac{m}{7}-\left(\frac{m}{7}-1\right)}-\dfrac{\left(\frac{m}{7}-1\right)}{\frac{m}{7}-\left(\frac{m}{7}-1\right)}$ S Y:

4.ª $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}\right)}+\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}\right)}$

ſumma S A: 5.ª $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}-\frac{1}{2}\right)}-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{7}-\frac{1}{2}\right)}$ differentia S Y. Hic notandum cum in primis formulis $\dfrac{1\mp\frac{m}{7}\pm\frac{m}{7}}{1}$, $\frac{m}{7}$ differentiam fluentium repræſentet; & cum in poſtremis, ſuppoſito puncto medio, terminum fluentem ſemidifferentiam in S A, ſemiſummam in S Y exhibere docuerimus; ſi retinere velimus in poſtremis formulis eamdem numero fluentem $\frac{m}{7}$, quæ eſt in primis, neceſſe eſſe dividere $\frac{m}{7}$ per 2: vidimus enim CAP. IV §. 5 & ſeqq. fluen-

fluentem $\frac{m}{7}$ primarum formularum a puncto medio dato prorumpentem hinc inde bifariam dividi. Quod si velimus in ultimis formulis semisummam, vel semidifferentiam repræsentari a fluente $\frac{m}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{7}$, ut fecimus in exemplis superioribus, erit fluens in primis formulis $\frac{2 \cdot m}{7}$. Juvat tamen in posterum simplicitatis gratia primam inire viam.

§. 23. In formulis superioribus fluente *m* a *zero* usque ad 7 valent formulæ 1ª, 2ª, & 4ª: fluente *m* a 7 usque ad infinitum, 2ª, 3ª, & 5ª. legitimæ fiunt, repugnantibus primis. Posito igitur $m = 3$, erunt fluentes 1ª. formulæ

$$\frac{1 - \frac{3}{7}}{\left(1 - \frac{3}{7}\right) + \frac{3}{7}}, \quad \frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{7} + \left(1 - \frac{3}{7}\right)} = \frac{4}{4+3}, \frac{3}{3+4} \text{ ad SA};$$

fluentes 2ª. formulæ ad S Y $\frac{1 + \frac{3}{7}}{\left(1 + \frac{3}{7}\right) - \frac{3}{7}}$; $\frac{\frac{3}{7}}{\left(1 + \frac{3}{7}\right) - \frac{3}{7}}$

$= \frac{10}{10-3}$; $\frac{3}{10-3}$: fluentes formulæ 4ª. ad S A

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}\right)}, \quad \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \frac{3}{7}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}\right)}$$

$= \frac{5}{5+2}$; $\frac{2}{2+5}$; quæ seorsim sumptæ in singulis inæquales sunt, licet earum summa in 1.ª, & 4.ª, earum differentia in 2.ª sit eadem; nempe $\frac{4+3}{4+3} = \frac{10-3}{10-3} = \frac{5+2}{5+2} = \frac{7}{7}$. Posito vero $m = 9$, erunt fluentes 2.ª formulæ

læ ad S Y $\dfrac{1+\frac{9}{7}}{\left(1+\frac{9}{7}\right)-\frac{9}{7}}$, $\dfrac{\frac{9}{7}}{\left(1+\frac{9}{7}\right)-\frac{9}{7}} = \dfrac{16}{16-9}$, $\dfrac{9}{16-9}$ : fluentes 3.ª formulæ item ad S Y $\dfrac{\frac{9}{7}}{\frac{9}{7}-\left(\frac{9}{7}-1\right)}$, $\dfrac{\frac{9}{7}-1}{\frac{9}{7}-\left(\frac{9}{7}-1\right)}$ $= \dfrac{9}{9-2}$, $\dfrac{2}{9-2}$ : fluentes formulæ 5.ª ad S Y

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}-\frac{1}{2}\right)},\ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}-\frac{1}{2}\right)}$$

$= \dfrac{8}{8-1}$, $\dfrac{1}{8-1}$; in singulis diversæ, & earum differentia $\dfrac{16-9}{16-9} = \dfrac{9-2}{9-2} = \dfrac{8-1}{8-1} = \dfrac{7}{7}$, ut in primis. Hinc donec $m$ est numerus integer semper remanet idem denominator fluentium primo sumptus, sive eadem fractio, ut supra, $\frac{7}{7}$; sive idem numerus propositus. Sed si $m$ sit numerus fractus, denominator communis fluentium est æqualis denominatore primo sumpto in denominatorem fractionis $m$. Sic ex. gr. si sit $m = \frac{5}{3}$, erit $\dfrac{7}{m\cdot\frac{7}{m}} = \dfrac{7}{\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{\frac{5}{3}}}$

$= \dfrac{3\cdot 7 \mp 1 \pm 1}{5\cdot\frac{3\cdot 7}{5} \mp 1 \pm 1}$, & divisione peracta per $\dfrac{3\cdot 7}{5}$, erit

$$\frac{1\mp\frac{5}{3\cdot 7}\pm\frac{5}{3\cdot 7}}{1\mp\frac{5}{3\cdot 7}\pm\frac{5}{3\cdot 7}} = \frac{\left(1-\frac{5}{3\cdot 7}\right)+\frac{5}{3\cdot 7}}{\left(1-\frac{5}{3\cdot 7}\right)+\frac{5}{3\cdot 7}} = \frac{16}{16+5}+\frac{5}{5+16}\ \text{S A},$$



=

$$= \frac{\left(1 + \frac{5}{3\cdot 7}\right) - \frac{5}{3\cdot 7}}{\left(1 + \frac{5}{3\cdot 7}\right) - \frac{5}{3\cdot 7}} = \frac{26}{26-5} - \frac{5}{26-5} \text{ S Y.}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3\cdot 7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3\cdot 7}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3\cdot 7}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3\cdot 7}\right)} = \frac{13}{13+8} + \frac{8}{8+13} \text{ S A,}$$

& singularum summa $\frac{16+5}{16+5} = \frac{26-5}{26-5} = \frac{13+8}{13+8} = \frac{21}{21}$.

§. 24. Verum cum formula §. 22 $\frac{7}{m \cdot \frac{7}{m}}$ sit etiam $= \frac{7}{m} \cdot \frac{m}{7}$

$= \frac{\frac{m}{7}}{7 \cdot \frac{m}{7}} = \frac{\frac{m}{7} \mp 1 \pm 1}{\frac{m}{7} \mp 1 \pm 1}$, ac divisa per $\frac{m}{7}$, convertatur in

$\frac{1 \mp \frac{7}{m} \pm \frac{7}{m}}{1 \mp \frac{7}{m} \pm \frac{7}{m}}$; patet ex una eademque fractione ejusdem numeratoris ac denominatoris erui posse quemcumque numerum tam directum, quam inversum cujuscumque valoris in duas fluentes homologas dividendum. Quinimmo si ponatur in formula $\frac{7}{m \cdot \frac{7}{m}}$ $m$ negativus, sitque $\frac{7}{-m \cdot \frac{7}{-m}} = \frac{\frac{7}{-m} - 1 + 1}{\frac{7}{-m} - 1 + 1}$

$= \frac{\frac{7}{-m} + 1 - 1}{\frac{7}{-m} + 1 - 1}$: hæc evoluta dabit $\frac{\left(1 + \frac{m}{7}\right) - \frac{m}{7}}{\left(1 + \frac{m}{7}\right) - \frac{m}{7}} = \frac{\left(1 - \frac{m}{7}\right) + \frac{m}{7}}{\left(1 - \frac{m}{7}\right) + \frac{m}{7}}$:

hoc est quæ posito $m$ positivo pertinebat ad S A, convertitur in S Y, & viceversa. Hîc antequam progrediar maxime interest animum attendere ad conditio-

tionem nostræ formulæ, a qua tam directum, quam inversum numerum, scilicet tam $\frac{7}{m\cdot\frac{7}{m}}$, quam $\frac{m}{7\cdot\frac{m}{7}}$, erui posse superius ostendimus. Ex prima evoluta formula habentur fluentes homologæ $\frac{1-\frac{m}{7}}{1}$, $\frac{\frac{m}{7}}{1}$, vel $\frac{7-m}{7}, \frac{m}{7}$; ex secunda $\frac{1-\frac{7}{m}}{1}$, $\frac{\frac{7}{m}}{1}$, vel $-\left(\frac{7-m}{m}\right)$; $\frac{7}{m}$ si $m<7$, vel viceversa in prima $-\left(\frac{m-7}{7}\right)$ si $m>7$. Insuper $\frac{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}$

$$=\frac{1}{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}=\frac{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}{1}=\frac{1-\frac{7}{m}+\frac{7}{m}}{1-\frac{7}{m}+\frac{7}{m}}=\frac{1}{1-\frac{7}{m}+\frac{7}{m}}$$

$=\frac{1-\frac{7}{m}+\frac{7}{m}}{1}$ : ex quibus deducitur vel $\left(\frac{1}{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}\right)^{-1}$

$=\frac{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}{1}$ ; vel $\left(\frac{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}{1}\right)^{-1}=\frac{1}{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}$:

& $\frac{1-\left(\frac{m}{7}\right)^{-1}+\left(\frac{m}{7}\right)^{-1}}{1}=\frac{1-\frac{7}{m}+\frac{7}{m}}{1}$, vel $\frac{1-\left(\frac{7}{m}\right)^{-1}+\left(\frac{7}{m}\right)^{-1}}{1}$

$=\frac{1-\frac{m}{7}+\frac{m}{7}}{1}$ &c: hinc eruitur positivum æquale negativo; summa æqua-

lis

lis differentiæ; directum inverso æquale: idque necessario cum sit $\frac{1}{1} = \frac{7}{7} = \frac{m}{m}$. Quænam ergo erit via, qua ab hisce ambagibus liceat emergere, & aliquid certi inde deducere? Nulla alia certe quidem reliqua est via, nisi ut prius determinetur in fractione proposita $\frac{7}{m \cdot \frac{7}{m}} = \frac{m}{7 \cdot \frac{m}{7}}$ utrum 7 vel $m$ accipiendus sit denominator fractionis, qui vicem constantis necessario gerat semper oportet. Cum enim fractio proposita ( sive numerus ) dividenda sit in duas fractiones homologas fluentes solitarias invicem disjunctas, quæ tamen legem systematis, ad quod pertinent inter se perpetuo servent; quisque videt hoc nullo modo obtineri posse nisi numerator in duas partes dispertiatur. Nam ex fractionum natura denominator potest quidem indicare partes, in quas dividendus sit numerator, sed ex ipso ( numeratore manente integro ac constante ) divisio indicata actu obtineri nequit: quomodo enim $\frac{1}{1 - \frac{m}{7} + \frac{m}{7}}$, vel $\frac{7}{7 - m + m}$ poteris actu dividere in duas fractiones scire velim? Igitur data fractione $\frac{m}{7}$ erit directa si velis 7 constantem, $m$ fluentem; fractio enim $\frac{m}{7}$ erit $\frac{m}{(7 - m) + m}$ fluens S A, cui respondet sua homologa $\frac{7 - m}{(7 - m) + m}$; vel $\frac{m}{7} = \frac{m}{(7 + m) - m}$ ad S Y fluens minor &c., ut supra. Quod si velis $m$ constantem, 7 fluentem necessario facienda est fractionis inversio; & in hoc casu erit $\frac{m}{7} = \left(\frac{m}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{m}$ : idem dicas respective de aliis formulis superioribus. Sed nunc satis sit rem tanti momenti leviter innuisse, de qua inferius CAP. VI erit pro necessitate & dignitate agendum, ut difficultates omnes tollantur, in quas identidem offendit vulgaris methodus nullo modo suis institutis ac præceptis diluendas.

§. 25. Quare formula maxime generalis apta ad quemcumque numerum in duas partes fluentes dividendum, & proprio systemati applicandum erit sequens

$\frac{1' \mp o}{1' \mp o}$, quæ more noſtro evoluta dat ſequentes: 1ª. $\frac{(1 - \frac{1'}{1'}) + \frac{1'}{1'}}{(1 - \frac{1'}{1'}) + \frac{1'}{1'}}$ SA.

2ª. $\frac{(1 + \frac{1'}{1'}) - \frac{1'}{1'}}{(1 + \frac{1'}{1'}) - \frac{1'}{1'}}$ : 3ª. $\frac{\frac{1'}{1'} - (\frac{1'}{1'} - 1)}{\frac{1'}{1'} - (\frac{1'}{1'} - 1)}$ utraque ad S Y:

ſed in 2ª. $\frac{1'}{1'}$ fluens minor; in 3ª. $\frac{1'}{1'}$ fluens major:

4ª. $\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right)}$ S A:

5ª. $\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'} - \frac{1}{2}\right)}$ SY. In primis tribus formulis unitas ſemper ſolitaria & integra reperitur: in duabus ultimis dividitur (1) ſemper in partes æquales ſigno poſitivo conjunctas (ſcilicet $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$): quæ cum ſit in ſingulis ſemper eadem nullam arbitrio relinquit ſui valoris mutationem, atque ideo neceſſaria eſt. Fractio vero $\frac{1'}{1'}$ in primis formulis ducta eſt in $(1 - 1)$: eſtque $(1 - 1)\cdot\frac{1'}{1'}$; in ſecundis eſt $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1'}{1'} = (1 - 1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}$; quæ ideo fluentis naturam induit, cum quivis numerus in ejus locum ſubſtitui poſſit, hac tamen lege ut in fractione $\frac{1'}{1'}$ denominator (1′) quemcumque numerum repræſentare poſſit, ſed conſtans & idem in utraque fluente homologa, atque ſua diviſione indicans numeratores ſingulos fluen-

fluentium homologarum. Numerator vero ( $1'$ ) in prima fluere poteſt a minimo ſive a ( $o$ ) uſque ad ( $1'$ ) maximum, manente eodem ſyſtemate: atque ideo $\frac{1 - \frac{1'}{1'}}{1}$ eſt fluens minima $= o$; $\frac{\frac{1'}{1'}}{1}$ maxima $= 1$; & formula $1^a$ eſt limitis ſyſtematis S A: in formula $2^a$. $\frac{\frac{1'}{1'}}{1}$ repræſentat fluentem minorem SY, & numerator ( $1'$ ) fluit a ( $o$ ) uſque ad ( $\infty$ ): ergo non eſt limitis ſed media. At $3^a$, in qua $\frac{\frac{1'}{1'}}{1}$ vicem ſubit fluentis majoris, & fluit ab ( $1$ ) uſque ad ( $\infty$ ), eſt formula limitis minimi utriuſque fluentis. Numerator vero fractionis $\frac{1'}{1'}$ in $4^a$. fluere poteſt a ( $o$ ) uſque ad ( $1$ ): continet igitur formula $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}}{1}$ limitem maximum majoris fluentis, & $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}}{1}$ limitem minimum minoris. Ac tandem in $5^a$ habetur limes minimus fluentis majoris $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'} + \frac{1}{2}}{1}$, & limes minimus fluentis minoris $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'} - \frac{1}{2}}{1}$. Inſuper in $4^a$, in qua facta fluentium ſubtractione invenitur $\frac{2}{2} \cdot \frac{1'}{1'}$; erit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}$ ſemidifferentia fluentium homologarum: at in $5^a$, in qua ſumma fluentium homologarum eſt $\frac{2}{2} \cdot \frac{1'}{1'}$, erit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}$ ſemiſumma fluentium homologarum.

§. 26. Hinc ſequens apprime neceſſaria ſtatuenda eſt, ac probe tenenda

## PROPOSITIO.

In formula $4^a$. ſyſtematis S A terminus alteruter ex poſitivis æquatur ſemiſummæ

mæ constanti fluentium homologarum, atque ideo semper constans $= \frac{1}{2}$ : alteruter ex terminis diverso signo affectis æquatur semidifferentiæ fluenti fluentium homologarum. Contra vero in $5^a$. systematis S Y alteruter ex positivis est fluens, utpote æqualis semisummæ fluenti fluentium homologarum: alteruter ex terminis contrario signo affectis æqualis semidifferentiæ constanti fluentium homologarum est & ipse constans $= \frac{1}{2}$.

Hoc patet ex doctrina in hoc Cap: jam tradita, & e §°. superiori.

§. 27. Quamobrem si in locum fluentis $\frac{1'}{1'}$ in formula generali $1^a$. §. 25 substituatur quivis numerus unitate minor, referet hic alterutram ex fluentibus systematis S A. Quod si numerus quivis intra ($o$) & ($\infty$) contentus in locum $\frac{1'}{1'}$ substituatur in formula generali $2^a$, hic erit semper fluens minor S Y: at in $3^a$. $\frac{1'}{1'}$ fluentem majorem S Y semper repræsentans vagari poterit intra limites (1) & ($\infty$): in $4^a$. vero $\frac{1'}{1'}$ differentiam fluentium S A, earumdem summam in $5^a$. S Y continebit. Tres igitur primæ formulæ generales inserviunt ad inveniendam alterutram ex fluentibus homologis, atque earum differentiam in S A; summam in reliquis duabus data alterutra ex fluentibus. Inservit vero $4^a$. & $5^a$. ad inveniendas singulas fluentes homologas sui respectivi systematis, data in $4^a$. earum differentia, summa in $5^a$. Hinc cum in utroque systemate & utraque fluens, & earum differentia in S A, summa in S Y semper indeterminatæ sint & quoad valorem, & quoad naturam, & infinitis valoribus successive obnoxiæ, utpote limitibus propriis conclusæ; patet ad obtinendum singularum determinatum valorem ac naturam necessario sumendam esse arbitrio, vel conditione Problematis indicante, unam ex tribus ad aliquam naturam, & peculiarem valorem determinatam, ut cæteræ duæ, quæ remanent, natura & valore innotescant. Quare præsidio formularum generalium §. 25. semper erit in potestate solutio sequentis

## PROBLEMATIS.

Dato valore unius ex istis tribus fluentibus invenire reliquas duas.

## EXEMPLUM.

§. 28. Proponatur $\frac{4}{7}$ numerus in locum $\frac{1'}{1'}$ substituendus in formulis superioribus generalibus §. 25. Cum hujusmodi fractio non nisi formulis $1^a$, $2^a$, & $4^a$. applicari possit utpote unitate minor, consequitur hujusmodi numerum in singulis istis formulis diversam induere naturam. In $1^a$. enim erit $\dfrac{1-\frac{1'}{1'}+\frac{1'}{1'}}{1-\frac{1'}{1'}+\frac{1'}{1'}}$

$$= \frac{1-\frac{4}{7}+\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}+\frac{4}{7}} = \frac{3}{3+4} + \frac{4}{4+3}$$; & obtinetur denominator divisus in duas partes, ex quibus conflantur singuli numeratores fluentium homologarum, & $\frac{4}{7}$ est fluens major systematis SA. Substitutus vero in formula $2^a$ dabit $\dfrac{1+\frac{1'}{1'}-\frac{1'}{1'}}{1+\frac{1'}{1'}-\frac{1'}{1'}} = \dfrac{1+\frac{4}{7}-\frac{4}{7}}{1+\frac{4}{7}-\frac{4}{7}} = \dfrac{11}{11-4} - \dfrac{4}{11-4}$ : & $\dfrac{4}{11-4} = \dfrac{4}{7}$ naturam assumit fluentis minoris systematis SY, cui respondet sua homologa major $\dfrac{11}{11-4}$. Quod si aptetur $4^a$, erit

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1'}{1'}\right)} =$$

( 1

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}$$

: in quo casu $\frac{4}{7}$ differentiam fluentium homologarum repræsentat systematis S A. Quæ formula duobus diversis modis efferri potest: primo modo cum sit fluens major

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}=\frac{\frac{11}{2.7}}{\frac{11}{2.7}+\frac{3}{2.7}}$$

, neque 11 dividi possit per 2, erit denominator fractionis $2.7=14$, & fluens major $=\frac{11}{11+3}$, minor $\frac{3}{3+11}$, & $\frac{4}{7}=\frac{11}{11+3}-\frac{3}{11+3}$ differentia fluentium, ac tota formula erit $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}=$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{11+3}{11+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{11-3}{11+3}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3+11}{3+11}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{11-3}{11+3}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{11+3}{11+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{11-3}{11+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3+11}{3+11}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{11-3}{11+3}\right)}:$$

secundo modo erit

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}.+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\right)}\right\}}$$

quæ reducta transit in antecedentem. Inferius tamen §. 38 ostendemus quandonam hac ultima tantum, utpote sola legitima, uti necesse sit. Invenimus igitur eamdem $\frac{4}{7}=\frac{4}{4+3}$ fluentem majorem S A, $=\frac{4}{11-4}$ fluentem mi-

norem S Y, $= \frac{11-3}{11+3}$ differentiam fluentium homologarum systematis S A $\frac{11}{11+3}$, $\frac{3}{3+11}$, ac tandem $= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)}$ differentiam fluentium homologarum ejusdem systematis S A, nempe fluentium $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{4}{7}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)}$, $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{4}{7}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{4}{7}\right)}$ dato puncto medio. Repugnat aptari posse $\frac{4}{7}$ $3^{a}$, & $5^{a}$. eodem systemate S Y manente; quia si in istis substituatur, cum $\frac{1'}{1'} - 1$ fiat negativa, hæc $3^{a}$ convertitur in $1^{am}$ S A: ac eadem ratione $5^{a}$ convertitur in $4^{am}$. Quod non animadversum a Methodo communi, quæ semper, quocumque valore donantur fluentes, idem signum (+), (—) quo primum erant affectæ in formulis retinet, impingit inscia in positivum æquale negativo, prima imaginarii male sana origo.

§. 29. Vide igitur determinationem valoris tantum alicujus quantitatis nullo modo ejus naturam determinare posse, cum in nostro Exemplo $\frac{4}{7}$, qui tribus formulis superioribus æque recte applicari potest, diversam in singulis naturam assumat: quibus si addas dividi etiam posse in duas fluentes utriusque systematis, ut docet PROB. IV, ac etiam protonumerum constituere, ut ostendit PROB. I, nec non repræsentare posse semisummam S Y $= \frac{1}{2} . \frac{8}{7}$; facile intelliges, determinatione valoris, non nisi quibus formulis nullo modo aptari queat consequi posse, cæteris quibus potest, indeterminatis. Necessario igitur in quovis numero distinguenda est ejus natura ab ejus valore: potest enim determinari valor absque natura; & absque valore natura; & potest determinari valor & natura. Verum illud probe advertendum, quod si valor tantum determinetur, cætera in incertum relinquuntur. Contra vero determinatio cujuscumque naturæ, quam pro varia formulæ conformatione fluens assumere potest, apprime necessaria est ad diversa Loca geometrica constituenda, quibus fine nulla omni-

omnino hæc Scientia reputanda eſt, quæcumque ſumatur valoris determinatio. Statuta enim natura cognoſcuntur limites cujuſcumque ſyſtematis, quos Locus geometricus exhibet, qui limites, cum infinitos fluentium valores peculiares concludant, oſtendunt quinam valor determinatus in locum fluentis jam natura determinatæ ſubſtitui legitime poſſit. Tota igitur hujuſce Scientiæ vis atque amplitudo in eo ſita eſt, ut inveniantur methodi, regulæ, artificia, quibus formulæ fluentium legitime conformari poſſint ad fluentium naturam determinandam: nec non leges, quibus ab una ad alteram naturam diverſa formularum transformatione & legitimus a Loco geometrico ad Locum geometricum tranſitus obtineatur: quibus rite firmatis ſtatim cognoſcitur quemnam & quotuplicem Locum geometricum valor quicumque determinatus fluentis requirat, quemnam reſpuat. Quæ cum ita ſint, aliis judicandum relinquo quid a vulgari methodo ſperandum ſit, quæ neglecta prorſus Theoria generali, atque directa concinnandi formulas generales ad Loca geometrica applicandas, ad valores tantum peculiares fluentium hactenus intenta fuerit, eo tamen exitu, ut hoc ipſum, de quo tantum ſollicita eſt (ignorata prorſus diverſa limitum natura, pro diverſa ratione formulæ ſub qua fluens concluditur) raro & non niſi forte fortuna conſequi recte potuerit.

§. 30. Quamobrem quoniam vidimus etiam determinato alicujus fluentis valore maxime indeterminatam eſſe ejus naturam; ut univerſim totum hoc negotium exhauriatur, tradendæ ſunt regulæ, quibus liceat ad abſolutam eorum determinationem pervenire: quæ ſunt neceſſariæ ad conſtituendum ſyſtema pro varia natura, quam numerus propoſitus ſuſcipere poteſt. Sed primum hîc ordine ponendæ ſunt Formulæ generales ſupra inventæ, ad quas referendus eſt numerus datus pro varia natura, qua affici poteſt: quæ ſunt

$$\text{I.}\quad M + N = \frac{\left(1 - \frac{1'}{1'}\right) + \frac{1'}{1'}}{\left(1 - \frac{1'}{1'}\right) + \frac{1'}{1'}} \cdot \qquad SA$$

$$\text{II.}\quad M - N = \frac{\left(1 + \frac{1'}{1'}\right) - \frac{1'}{1'}}{\left(1 + \frac{1'}{1'}\right) - \frac{1'}{1'}} \qquad SY$$

$$\text{III.}\quad M - N = \frac{\frac{1'}{1'} - \left(\frac{1'}{1'} - 1\right)}{\frac{1'}{1'} - \left(\frac{1'}{1'} - 1\right)} \qquad SY$$

IV.

$$\text{IV. } M + N = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'}\right)} SA$$

$$\text{V. } M - N = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1'}{1'} - \frac{1}{2}\right)} SY$$

$$\text{VI. } M+N = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1+1'}{2}\right)+\left(\frac{1-1'}{2}\right)}{\left(\frac{1+1'}{2}\right)+\left(\frac{1-1'}{2}\right)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1+1'}{2}\right)-\left(\frac{1-1'}{2}\right)}{\left(\frac{1+1'}{2}\right)+\left(\frac{1-1'}{2}\right)}\right]\right\} + \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1-1'}{2}\right)+\left(\frac{1+1'}{2}\right)}{\left(\frac{1-1'}{2}\right)+\left(\frac{1+1'}{2}\right)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1+1'}{2}\right)-\left(\frac{1-1'}{2}\right)}{\left(\frac{1+1'}{2}\right)+\left(\frac{1-1'}{2}\right)}\right]\right\}}{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+1'}{2}\right)}{\left(\frac{1+1'}{2}\right)+\left(\frac{1-1'}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{1-1'}{2}\right)}{\left(\frac{1-1'}{2}\right)+\left(\frac{1+1'}{2}\right)} SA$$

$$\text{VII. } M-N = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1'+1}{2}\right)+\left(\frac{1'-1}{2}\right)}{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)}{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)}\right]\right\} - \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1'+1}{2}\right)+\left(\frac{1'-1}{2}\right)}{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1'}{2}\right)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)}{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)}\right]\right\}}{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1'+1}{2}\right)}{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1'-1}{2}\right)}{\left(\frac{1'+1}{2}\right)-\left(\frac{1'-1}{2}\right)} SY.$$

Facile est cognoscere VI[am] a IV[a]: , & VII[am] a V[a] deductam fuisse. Necessitas vero harum ultimarum inferius patebit.

§. 31. Ut vero utraque VI[a]. & VII[a]. hanc quam habent formam retineant ( quoniam de reliquis §. 25. egimus) necesse est in VI supponere $(1')$ in limite maximo factam $(1)$ fluere posse continua diminutione usque ad $(o)$, in quo casu fluentium differentia $\frac{\left(\frac{1+1'}{2}\right) - \left(\frac{1-1'}{2}\right)}{\left(\frac{1+1'}{2}\right) + \left(\frac{1-1'}{2}\right)} =$

$= \frac{\frac{2}{2} \cdot o}{1} = o$, atque ideo ſemper pertinet ad SA. VII$^a$ vero, in qua (1′) fluens facta minima continuo incremento creſcere quidem poteſt uſque ad infinitum non vero infra (1) minui, requirit differentiam fluentium conſtantem, ſummam vero fluentem & ſyſtema SY. Ipſæ vero formulæ VI$^a$. & VII$^a$., ſi earum valor ſpectetur, ſunt quidem æquales, ſed forma & limitibus penitus diverſæ, ita ut (1′) in VI$^a$. fieri poſſit decreſcendo unitate minor, puta fractio $\frac{1}{7}$, in qua numerator (manente conſtante denominatore 7) fluere poteſt a ($o$) uſque ad (7), ad quem perventus non ultra fluere poteſt natura ſyſtematis SA ſervata, niſi ſumatur denominator alius major (7), ſive fractio ex: gr: $\frac{1}{9}$, qua ſubſtituta numerator fluere poteſt a ($o$) uſque ad (9), & ſic ad infinitum. Contra vero in ſyſtemate SY numerator fractionis qui repræſentat fluentem (1′) non poteſt eſſe minor denominatore, creſcere vero poteſt uſque ad infinitum. Quare in ſyſtemate SA creſcente denominatore uſque ad ($\infty$) numerator fractionis limitibus ſemper magis productis fluere poteſt a ($o$) uſque ad ($\infty$): at in ſyſtemate SY quo magis creſcit denominator, eo magis anguſtioribus limitibus numerator fluens continetur, ita ut facto denominatore ($\infty$) numerator eſſe nequeat niſi & ipſe ($\infty$), & fluens minima $=$ (1). Hinc in ſyſtemate SA differentia fluentium homologarum continetur intra ($o$) & (1): at in ſyſtemate SY ſumma intra limites ($\infty$) & (1′): in SA differentia creſcit a ($o$) uſque ad (1): in SY decreſcit ab infinito ($\infty$) uſque ad (1); quia in SA numerator ſemper minor denominatore, in SY ſemper major denominatore. Quamobrem in ſyſtemate SA fluentes homologæ a ratione æqualitatis $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ profectæ, quando differentia eſt ($o$), differunt ſemper magis inter ſe valore, donec una facta maxima $= 1$, altera fiat minima $= o$, manente ſemper eadem ſumma: at in ſyſtemate SY fluentes homologæ, quæ, donec ſumma eſt infinita, minori ratione poſſibili inter ſe diſtant, ſunt enim inter ſe ut $\frac{\infty + 1}{2}$ ad $\frac{\infty - 1}{2}$, decreſcente ſumma ſemper magis invicem diſſociantur, donec facta ſumma minima $= 1$, fluens major ſit (1) & minor ($o$) ſcilicet in ratione $1 : o$.

§. 32. Hiſce explicatis animadvertatur ad abſolutam hujuſce Problematis determinationem obtinendam tria neceſſario arbitrio, aut ex peculiaribus circumſtan-

ſtantiis data ſint oportere: numerus ſcilicet, ipſius natura, & ſyſtema. Quare omnimode determinatum erit ſequens

## PROBLEMA VI.

Dato valore, natura fluentis linearis, & ſyſtemate lineari invenire fluentes reliquas ſyſtematis homologas.

Sit numerus datus $\frac{4}{11}$. Quoniam, ſi ut protonumerus accipiatur, ſuperius oſtendimus eum ſub formula $\frac{1}{1} \cdot \frac{4}{11}$ complecti debere: & ſi conſideretur tamquam aggregatum duarum fluentium homologarum, quid agendum ſit Prob. IV *hujus Cap.* nos doceat; reducta prius fractione $\frac{4}{\frac{11 \cdot 4}{11}}$ ad fractionem $\frac{4 \cdot 11}{4 \cdot 11}$ $= \frac{44}{44}$; ex dictis patet hujuſmodi $\frac{4}{11}$ tam unam ex fluentibus homologis S A; quam differentiam fluentium vel ſemidifferentiam ejuſdem ſyſtematis S A, quam tandem fluentem homologam minorem ſyſtematis S Y repræſentare poſſe, cum ſit unitate minor. Cum vero in ſingulis iſtis caſibus diverſa ſit formula, eodem valore manente, ſub qua legitime comprehendi debet, invenienda eſt in ſingulis iſtis caſibus quæ ſit ea forma, quæ ipſi convenit.

1°. Sit $\frac{4}{11}$ fluens ſyſtematis S A, quæ ideo pertinebit ad formulam I.$^{am}$ ſubſtituta fractione $\frac{4}{11}$ in locum $\frac{1}{1}$, eritque $M + N = \frac{1 - \frac{4}{11} + \frac{4}{11}}{1 - \frac{4}{11} + \frac{4}{11}}$ $= \frac{(11 - 4) + 4}{(11 - 4) + 4} = \frac{7 + 4}{7 + 4} = \frac{11}{11}$. Ergo primum erit 11° ſubſtituendus in locum (1)°, eſtque (11) numerus ille integer qui dividendus eſt in duas fluentes homologas $\frac{7}{7 + 4}$, $\frac{4}{4 + 7}$, denominatore indicante ſingulos fluentium numeratores. Inventis fluentibus etit earum differentia $\frac{7 - 4}{7 + 4}$: qua inventa habetur

M+N

$$M + N = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7+4}{7+4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7-4}{7+4}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{4+7}{4+7}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7-4}{7+4}\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7+4}{7+4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7-4}{7+4}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{4+7}{4+7}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7-4}{7+4}\right)\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}\right)} \text{IV}_a. \ \& \ \frac{4}{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{4+7}{4+7}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7-4}{7+4}\right)$$

2°. Sit nunc $\frac{4}{11}$ differentia fluentium homologârum ſyſtematis S A, ex qua eruendus eſt tam numerator vel denominator fractionis 1° $= \frac{1}{1}$, quam fluentes ſingulæ homologæ: atque ideo referenda eſt ad formulàm IV$^{am}$, erit

$$M + N = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}\right)}$$

$= \frac{\left(\frac{11+4}{2}\right) + \left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right) + \left(\frac{11-4}{2}\right)}$, in qua cum $11 + 4$ nequeat exacte dividi per ( 2 ), erit $\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right) + \left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right) + \left(\frac{11-4}{2}\right)} = \frac{(11+4) + (11-4)}{(11+4) + (11-4)}$

$= \frac{15+7}{15+7} = \frac{22}{22}$ : ergo in hoc caſu denominator conſtans fractionis non eſt ut ſupra 11 ſed 22, & fluentes homologæ $\frac{15}{15+7}$, $\frac{7}{7+15}$, & earum diffe-



ren-

rentia $\frac{15 - 7}{15 + 7}$, & semidifferentia $= \frac{1}{2}\left(\frac{15 - 7}{15 + 7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15 + 7}$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}$ valore non forma.

3°. Sit nunc $\frac{4}{11}$ semidifferentia fluentium homologarum S A, quæ relata ad formulam IV dabit $M + N = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11}\right)}$

$= \frac{\left(\frac{11 + 8}{2}\right) + \left(\frac{11 - 8}{2}\right)}{\left(\frac{11 + 8}{2}\right) + \left(\frac{11 - 8}{2}\right)} = \frac{19 + 3}{19 + 3} = \frac{22}{22}$ : & 1° = 22° ut supra: sed fluentes homologæ $\frac{19}{19 + 3}$ major, $\frac{3}{3 + 19}$ minor: tam enim $15 + 7$, quam $19 + 3 = 22$, atque ob id tam fluentes superiores $\frac{15}{15 + 7}$, $\frac{7}{7 + 15}$; quam hæ eodem gaudent denominatore 22. Hîc vero semidifferentia $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{19 - 3}{19 + 3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{19 + 3}$.

4°. Tandem $\frac{4}{11}$ repræsentet fluentem minorem S Y, quæ ideo erit referenda ad formulam II^am^. ex qua invenies facta substitutione $M - N = \frac{\left(1 + \frac{4}{11}\right) - \frac{4}{11}}{\left(1 + \frac{4}{11}\right) - \frac{4}{11}}$

$= \frac{(11 + 4) - 4}{(11 + 4) - 4} = \frac{11}{11}$, denominatore scilicet (11) ut in casu 1.°: & fluens major $\frac{15}{15 - 4}$, minor $\frac{4}{15 - 4}$, quæ si referatur ad V.^am^ dabit

M—N

$$M-N=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{15+4}{15-4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{15-4}{15-4}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{15+4}{15-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{15-4}{15-4}\right)\right)}{1}:\&$$

$$\frac{4}{11}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{15+4}{15-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{15-4}{15-4}\right)}{1}$$ . Idem igitur numerus $\frac{4}{11}$ in tot forma diversas fractiones transmutatur pro diversitate naturæ, quam huic valori $\frac{4}{11}$ tribuimus: eritque $\frac{4}{11}=\frac{4}{4+7}=\frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{4+7}{4+7}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{7-4}{7+4}\right)}{1}$ minor fluens S A, $=\frac{2}{2}\left(\frac{15-7}{15+7}\right)=\frac{2}{2}\cdot\frac{8}{15+7}$ differentia, $=\frac{1}{2}\left(\frac{19-3}{19+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{19+3}$ semidifferentia S A, $=\frac{4}{15-4}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{15+4}{15-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{15-4}{15-4}\right)}{1}$ fluens minor S Y. Ut igitur hujusmodi numerus $\frac{4}{11}$ absolute determinetur, datum sit oportet systema tam in dimensione, quam in natura, & etiam natura fluentis ipsius in jam assumpto systemate. Quod si valor etiam ipse $x$ indeterminatus sit, nihil omnino ab absoluta ipsius $x$ indeterminatione erui poterit, nisi prius ad illud omne, quod suscipere potest munus & officium præparetur: hoc est formulæ primum singulæ, ad quas referri poterit, prius inveniantur. Sed cum hujusmodi absolute indeterminata $x$ sit etiam talis in dimensione: immensum prorsus esset formulas omnes generales cuicumque dimensioni aptas invenire & tradere, nisi prius statuatur dimensio simplex atque linearis; qua supposita singulæ formulæ ( ut fecimus ) generales tradantur, ad quas numerus linearis referri potest: ut inde ad secundas dimensiones transitus legitime & prospero successu obtineri possit. Hoc est præcipuum ac unum Analyseos abstractæ munus, & hæc est methodus quæ dicitur directa, legibus prius, atque regulis firmanda, ut in casibus peculiaribus legitima formula, atque geometrica constructio sine erroris periculo eligi possit. Methodus vero hæc directa, quæ a simplicioribus ad magis composita progreditur, est illa quam *Methodum absoluti zero* appellavimus, cui inversa respondet altera, quam *Methodum absoluti infiniti* diximus, de qua suo loco. Quam Methodum tamen

directam ignorare prorsus Analysim communem, ex his, quæ hactenus diximus, evidentissime patet.

§. 33. Dimensione porro lineari (ut in nostro casu) statuta, quicumque numerus indeterminatus intra formulas generales utriusque systematis linearis superius a nobis traditas concluditur, ad quas tantum legitime aptari potest. Determinato vero valore minuitur quidem indeterminatio, exclusis illis formulis, quibus aptari repugnat: remanet tamen indeterminatus numerus datus quoad naturam, nisi prius systema atque natura, ad quæ illum referre volumus, arbitrio eligatur; ut videre est in exemplo superiori; a quo ut magis Theoria abstracta illustretur, animadvertamus diversitatem denominatoris, quo in casibus superioribus §. 32 afficiuntur fluentes homologæ, determinari a fractione generali $1^\circ = \frac{11}{11}$ in casu p°: & $1^\circ = \frac{22}{22}$ in casibus 2.° & 3.°, a qua eruitur quinam esse debeat denominator communis fluentibus homologis: quo singulæ affectæ ad minimos reductæ terminos intelligendæ sunt, sive ad fractiones simpliciores, quibus simul gaudere possunt. Ita in casu 3.° vera & simplicior formula, sub qua differentia $\frac{8}{11}$ efferri debet, est $\frac{16}{22}$: quæ si abstracte spectetur, reduci posse videtur ad $\frac{8}{11}$: hac tamen divisione facta fluentes homologæ essent $\frac{\frac{19}{2}}{\frac{19+3}{2}}$, & $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3+19}{2}}$ quæ ad fractiones simplices reductæ sunt $\frac{19}{19+3}$, $\frac{3}{19+3}$, a quibus deducitur vera forma fractionis, qua afficienda est earum differentia, scilicet $\frac{19-3}{19+3} = \frac{16}{19+3}$. Omitto ambiguitatem, in quam nos traheret denominator (11), si fluentes exhiberentur sequenti modo $\frac{\frac{19}{2}}{11}$, $\frac{\frac{3}{2}}{11}$: dubium enim esset utrum earum reductio legitima esset $\frac{11 \cdot 19}{2}$, $\frac{11 \cdot 3}{2}$, an $\frac{\frac{19}{2}}{\frac{11}{1}}$,

3

$\frac{\frac{\frac{3}{2}}{11}}{1} = \frac{19}{22}$, $\frac{3}{22}$ quæ sunt legitimæ: quinimmo primis $\frac{\frac{19}{2}}{11}$, $\frac{\frac{3}{2}}{11}$ sive $\frac{11.19}{2}$, $\frac{11.3}{2}$ vulgo assensus facilius præberi poterit. Porro hæc denominatoris duplicatio toties continget, quoties in formula differentiæ fluentium in S A, vel summæ fluentium in S Y numerator non sit par, vel impar eo modo, quo est denominator, ut est in nostro casu $\frac{4}{11}$ vel $\frac{8}{11}$. Nam si loco $\frac{4}{11}$ ponatur $\frac{3}{11}$, erit $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11} = \frac{11+3}{11.2} = \frac{7}{11}$, & $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11} = \frac{11-3}{11.2} = \frac{4}{11}$ : & data $\frac{9}{11}$, erit $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{11} = \frac{11+9}{11.2} = \frac{20}{11.2} = \frac{10}{11}$; $\frac{11-9}{11.2} = \frac{2}{11.2} = \frac{1}{11}$ : summa enim vel differentia duorum numerorum parium vel imparium semper exhibet numerum parem per (2) dividendum.

§. 34. Illud etiam silentio non est prætereundum, quod in formulis casus 1.$^{i}$ & 4$^{i}$. relatis ad I.$^{am}$ & II.$^{am}$ generalem §. 30, (quæ sunt in S A $\frac{(1-\frac{4}{11})+\frac{4}{11}}{(1-\frac{4}{11})+\frac{4}{11}}$, & in S Y $\frac{(1+\frac{4}{11})-\frac{4}{11}}{(1+\frac{4}{11})-\frac{4}{11}}$, in quibus $\frac{4}{11}$ est una ex fluentibus homologis, cui in S A respondet homologa altera $1-\frac{4}{11}$, & in S Y $1+\frac{4}{11}$), substitui potest in locum $\frac{4}{11}$ sua respective homologa, ut habeatur $\frac{\left(1-(1-\frac{4}{11})\right)+(1-\frac{4}{11})}{\left(1-(1-\frac{4}{11})\right)+(1-\frac{4}{11})}$

=

$$=\frac{(1-\frac{7}{11})+\frac{7}{11}}{(1-\frac{7}{11})+\frac{7}{11}}$$ in S A: & in S Y $$\frac{\left(1+(1+\frac{4}{11})\right)-(1+\frac{4}{11})}{\left(1+(1+\frac{4}{11})\right)-(1+\frac{4}{11})}$$

$$=\frac{(1+\frac{15}{11})-\frac{15}{11}}{(1+\frac{15}{11})-\frac{15}{11}}$$ : in quo systemate S Y quæ primum erat major $\frac{15}{11}$,

fit $\frac{15}{26-15}$ minor, cum major sit $\frac{26}{11}=\frac{26}{26-15}$: ideoque in hoc systemate quando numerus propositus est unitate major, semper tam fluentem majorem, quam minorem repræsentare potest: nec major a minori secerni potest nisi ope formulæ, qua uti volumus. Si enim fiat $(1+\frac{26}{11})-\frac{26}{11}$ erit $\frac{26}{11}$ minor fluens pertinens ad formulam II.$^{am}$: at facto $\frac{26}{11}-(\frac{26}{11}-1)$, erit $\frac{26}{11}$ fluens major relata ad formulam III.$^{am}$ At in S A tam major quam minor fluens ab eadem formula I.$^{a}$ complectitur $\frac{1-\frac{4}{11}+\frac{4}{11}}{1-\frac{4}{11}+\frac{4}{11}}=\frac{7+4}{7+4}$

$$=\frac{1-\frac{7}{11}+\frac{7}{11}}{1-\frac{7}{11}+\frac{7}{11}}=\frac{4+7}{4+7}$$ inversione tamen facta fluentium. Verum

$\frac{7}{11}$ homologa major nunquam potest semidifferentiam indicare: duplicata enim semper superat unitatem. Et sane in hac suppositione erit formula

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{11}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{11}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{11}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{11}-\frac{1}{2}\right)}$$, quæ pertinet ad formulam V.$^{am}$

SY

SY, estque $\dfrac{\left(\frac{11+14}{2}\right)-\left(\frac{14-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+14}{2}\right)-\left(\frac{14-11}{2}\right)}=\dfrac{25-3}{25-3}$: & fluens major $\dfrac{25}{25-3}$,

minor $\dfrac{3}{25-3}$, & semisumma $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25+3}{25-3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{14}{11}$: est ergo

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{14}{11}$ semisumma fluentium homologarum in systemate S Y: earumquè

summa $\dfrac{28}{25-3}$.

Quæ $\dfrac{14}{11}$ potest esse in hoc systemate S Y tam fluens minor quam major: in

1.° casu relata ad formulam II.$^{am}$ erit $\dfrac{\left(1+\frac{14}{11}\right)-\frac{14}{11}}{\left(1+\frac{14}{11}\right)-\frac{14}{11}}=\dfrac{25-14}{25-14}=\dfrac{11}{11}$,

fluens major $\dfrac{25}{25-14}$, minor $\dfrac{14}{25-14}$: in 2.° casu relata ad formulam

III.$^{am}$ erit $\dfrac{\frac{14}{11}-\left(\frac{14}{11}-1\right)}{\frac{14}{11}-\left(\frac{14}{11}-1\right)}=\dfrac{14-3}{14-3}$, fluens major $\dfrac{14}{14-3}$, minor $\dfrac{3}{14-3}$.

Quare erit $\dfrac{14}{11}=\dfrac{14}{14-3}$ fluens major, $=\dfrac{14}{25-14}$ fluens minor, $=$ $\dfrac{25+3}{25-3}$ summa fluentium homologarum, atque singulæ ad S Y relatæ: singulæ tamen natura & munere prorsus diversæ; atque ideo diversa forma gaudent, a qua tantum quænam sit earum natura cognosci potest.

§. 35. Hactenus primis tantum formulis generalibus, exceptis duabus ultimis §. 30 numerum $\dfrac{4}{11}$ aptavimus: verum per ea, quæ in posterum dicturi sumus præstat idem exemplum §. 32 etiam duabus ultimis VI. & VII. accom-

commodare. 1°. igitur posita $\frac{4}{11}$ fluens homologa S A nequit nisi cum formula VI$^a$. comparari: quæ $\frac{4}{11}$ cum sit minor dimidio unitatis erit fluens minor S A;

$$\& \ \frac{4}{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{11+m}{2}\right)-\left(\frac{11-m}{2}\right)}{\left(\frac{11+m}{2}\right)+\left(\frac{11-m}{2}\right)} \right\} = \frac{\frac{11-m}{2}}{\left(\frac{11+m}{2}\right)+\left(\frac{11-m}{2}\right)},$$

ideoque $2 \cdot 4 = 11 - m$; & $m = 11 - 8 = 3$: ergo summa fluentium homologarum

$$M+N = \frac{\left\{\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\}\right] + \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\}\right]\right\}}{1}$$

sive fluens proposita $\frac{\frac{11-3}{2}}{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}$, cui respondet major $\frac{\frac{11+3}{2}}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}$ & differentia fluentium homologarum $\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}$. Si $\frac{4}{11}$ formulæ fluentis majoris comparassem, invenissem $2 \cdot 4 = 11 + m$, & $m = -11 + 8 = -3$, scilicet negativus, quo substituto in formula majoris fluentis

I

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+m}{2}\right)+\left(\frac{11-m}{2}\right)}{\left(\frac{11+m}{2}\right)+\left(\frac{11-m}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+m}{2}\right)-\left(\frac{11-m}{2}\right)}{\left(\frac{11+m}{2}\right)+\left(\frac{11-m}{2}\right)}\right\}}{1}\ \text{dabit}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11-3}{2}\right)-\left(\frac{11+3}{2}\right)}{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}\right\}}{1}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\}}{1}$$

atque ideo formula majoris fluentis ſubſtitutione $m$ negativi convertitur in minorem. Hoc vero dictum volo, ut clariſſime evincatur quantum a veritate abludat communis methodus, quæ quoties incidit in æquationem ex: gr: $m=-3$, qua indicatur $m$ ſumendam eſſe negativam, eam tamen retinet in formulis poſitivam: atque ideo offendit in poſitivum æquale negativo, in reale imaginario. In noſtra enim formula manifeſte patet, quod, ſi in locum ($m$) ſubſtituto ejus valore dato ($-3$) major formula generalis fluentis majoris huic minori comparata convertatur in minorem (quæ ſtatim erat minori formulæ generali comparanda), convertendam etiam eſſe ($m$) poſitivam in negativam, ut legitima formulæ generalis cum data comparatio inſtituatur.

§. 36. 2°. Sit nunc $\frac{4}{11}$ differentia fluentium homologarum S A: erit igitur $\frac{4}{11}=\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right)-\left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}$: & fluens major $\frac{\frac{11+4}{2}}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}$:

minor $\frac{\frac{11-4}{2}}{\left(\frac{11-4}{2}\right)+\left(\frac{11+4}{2}\right)}$. 3°. Quod ſi ponatur $\frac{4}{11}$ ſemidifferentia



fluen-

fluentium homologarum, erit differentia $\frac{8}{11} = \frac{\left(\frac{11+8}{2}\right)-\left(\frac{11-8}{2}\right)}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}$ : &

fluens major $\frac{\frac{11+8}{2}}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}$ : minor $\frac{\frac{11-8}{2}}{\left(\frac{11-8}{2}\right)+\left(\frac{11+8}{2}\right)}$.

4°. At si $\frac{4}{11}$ ponatur fluens minor systematis S Y, erit comparanda cum formula generali fluentis minoris ejusdem systematis, eritque $\frac{4}{11} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)+\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right]}{1}$$

$= \frac{\frac{m-11}{2}}{11}$ : ergo $8 = m - 11$; & $m = 11 + 8$: ideoque vera forma hujusce fluentis erit $\frac{4}{11} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)+\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)-\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)-\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)-\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}\right]}{1}$$

$= \frac{\frac{(11+8)-11}{2}}{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)-\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}$, fluens major $\frac{\frac{(11+8)+11}{2}}{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)-\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}$ :

&

& summa fluentium $\frac{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)+\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(11+8)+11}{2}\right)-\left(\frac{(11+8)-11}{2}\right)} = \frac{19}{11}$. Hæc vero si comparetur cum fluente majori SY erit $2 . 4 = m + 11$, & $m = 8 - 11 = -3$: & facta substitutione $(-3)$ in locum $(m)$, invenies

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)+\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right]}{1} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right]}{1} =$$

$\frac{\frac{11-3}{2}}{\left(\frac{11-3}{2}\right)+\left(\frac{11+3}{2}\right)} = \frac{4}{11}$, quæ tamen convertitur in fluentem minorem systematis SA: quod cum veritate apprime consentit: fluens enim minor SY, & unitate minor, sumpta negativa, convertitur in fluentem positivam systematis SA: quo ostenditur, legitimum formularum usum ad rectam a qua defleximus viam, comparatione illegitime facta, nos iterum revocare, dummodo operationibus necessariis vim non inferamus. Hinc in formula generali in hoc casu ponenda est $(m)$ negative sumpta, quæ exhibetur ab æquatione $m = -3$, sive $-m = -3$, ut omnia ad amussim cohæreant.

§. 37. Posita vero 1°. summa fluentium $\frac{14}{11}$ erit $\frac{1}{2} . \frac{14}{11} =$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)+\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{14+11}{2}\right)+\left(\frac{14-11}{2}\right)}{\left(\frac{14+11}{2}\right)-\left(\frac{14-11}{2}\right)}\right]$$

& fluens major $\dfrac{\frac{14+11}{2}}{\left(\frac{14+11}{2}\right)-\left(\frac{14-11}{2}\right)}$; & minor $\dfrac{\frac{14-11}{2}}{\left(\frac{14+11}{2}\right)-\left(\frac{14-11}{2}\right)}$.

2°. Sit nunc $\frac{14}{11}$ fluens minor SY: erit $\frac{14}{11}$ =

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\frac{m+11}{2}\right)+\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right\}}{1}; \&$$

$14 = \frac{m-11}{2}$; & $m = 28 + 11 = 6 + 11 + 11 + 11$; ergo $\frac{14}{11}$ =

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)+\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)}\right\}}{1}$$

$$= \frac{\frac{(6+11+11+11)-11}{2}}{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)}, \text{ \& fluens major}$$

$$\frac{\frac{(6+11+11+11)+11}{2}}{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)} = \frac{25}{25-14}; \text{ \& minor}$$

$$= \frac{\frac{(6+11+11+11)-11}{2}}{\left(\frac{(6+11+11+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11+11+11)-11}{2}\right)} = \frac{14}{25-14}.$$

3°.

3°. Sit tandem $\frac{14}{11}$ fluens major S Y : atque ideo $\frac{14}{11} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)+\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)}\right]}{1} =$$

$$\frac{\frac{m+11}{2}}{\left(\frac{m+11}{2}\right)-\left(\frac{m-11}{2}\right)} : \&\ 14 = \frac{m+11}{2},\ \&\ m = 28 - 11 = 17$$

$= 6 + 11$ : ergo fluens major $\frac{14}{11} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{(6+11)+11}{2}\right)+\left(\frac{(6+11)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(6+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11)-11}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{(6+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11)-11}{2}\right)}{\left(\frac{(6+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11)-11}{2}\right)}\right]}{1}$$

$$= \frac{\frac{(6+11)+11}{2}}{\left(\frac{(6+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11)-11}{2}\right)} = \frac{14}{14-3}$$ , fluens minor

$$\frac{\frac{(6+11)-11}{2}}{\left(\frac{(6+11)+11}{2}\right)-\left(\frac{(6+11)-11}{2}\right)} = \frac{3}{14-3}$$

Quæ omnes ſi reducantur recidunt in formulas ſuperiores. Quare oritur nova Methodus quemcumque numerum in duas fluentes dividere, & ad utrumque ſyſtema præparare, atque quemcumque numerum ad reliquas ſyſtematis utriuſque partes fluentes, quas ſuſcipere poteſt, legitima conſtituta formula, reducere; idque ope formularum generalium VI[a] & VII[a], §. 30.

§. 38. Si utraſque methodos, quarum una primis quinque, & altera duabus ultimis formulis generalibus nititur, inter ſe compares, comperies donec rationalibus numeris utimur, tam primas §. 32 a primis deductas formulis tranſmutari

tari

tari posse artificio a nobis adhibito in ultimas §. 35 a duabus VI.ª & VII.ª derivatas, quam vicissim hasce ultimas facta reductione in primas converti: ut supervacaneum videri possit diversas hasce methodos formulis diversis expressas singillatim a nobis fuisse distinctas. Verum si ad irrationales numeros animum convertamus palam fiet formulas primas, nisi ad duas ultimas reducantur, numeris aximetris satisfacere nullo modo posse. Termini enim formularum ex numeris rationalibus & aximetris conflati nunquam possunt ad unum atque individuum numerum rationalem reduci ita, ut denominator sub uno atque individuo rationali numero constante efferri possit, retenta primarum formularum conformatione: quæ quidem conditio in utroque systemate apprime necessaria est. Quod quidem facile obtinetur in primis formulis si rationalibus numeris fluens afficiatur: vidimus enim §. 32 & 35 tam $\dfrac{1-\frac{4}{11}}{1-\frac{4}{11}+\frac{4}{11}}$ esse $=$ $\dfrac{7}{7+4}$, quam $= \dfrac{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3}{11}$: cum tam numeri rationales $1-\frac{4}{11}$ in rationalem numerum $\frac{7}{11}$, quam $\dfrac{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}}{11}\cdot 3 = \dfrac{\frac{14}{2}}{11} = \frac{7}{11}$, & vicissim transmutentur. At si fluens numerus irrationalis sit, præter ea, quæ notavimus §. 27 *Capit.* IV. *superioris*, diligentissime observandum est nullum numerum aximetrum solitarium, aut ex rationali & aximetro conflatum denominatoris naturam induere posse: cum denominator ex: gr: $4+\sqrt{3}$, non possit esse constans, fluente numeratore $\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$: etenim mutatione $\sqrt{3}$ & ipse valore continuo mutabitur: idem dicas velim si in locum (4) alium numerum aximetrum substituas: oportet igitur denominatorem esse numerum rationalem & integrum ut necessarias systematis vicissitudines subeat, quin valor mutetur. Verum in tribus primis formulis numerus irrationalis aximeter unam ex fluentibus referre poterit, dummodo denominator numerus rationalis sit: de quibus tamen non nisi LIB. II. pro necessitate atque dignitate agi potest. At in formulis IVª. & Vª. fluentes, si irrationales numeri immisceantur, semper duobus terminis, rationali loco constantis, & aximetro loco fluentis, constent necesse est.

§. 39.

§. 39. Verum ut melius intelligatur differentia, quæ intercedit inter formulas rationalibus tantum numeris conflatas, & inter illas, quæ rationalibus & aximetris constant; ponatur, si fieri poteſt, $\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ fluens minor ſyſtematis S A, quæ formulæ VI.ª comparata, dabit $\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})+m\right)-\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})-m\right)}{\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})+m\right)+\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})-m\right)}\right\}$$ : ergo erit

$\sqrt{3} = \frac{4+\sqrt{3}}{2} - m$, & $m = \frac{4+\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$; ſive $m = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$:

ergo $$\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)}{\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})+(\frac{4-\sqrt{3}}{2})\right)+\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})-(\frac{4-\sqrt{3}}{2})\right)}$$

in qua poſito $\sqrt{3}$ fluente, fluat etiam denominator oportet: aliter eſſet

$$= \frac{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)}{\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})+(\frac{4-\sqrt{3}}{2})\right)+\left((\frac{4+\sqrt{3}}{2})-(\frac{4-\sqrt{3}}{2})\right)}$$, ſive

fluens minor æqualis conſtanti $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ detracta fluente $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$; nunquam $\sqrt{3}$ ſolitariæ.

Quod ſi ponatur $\frac{\sqrt{3}}{4}$ fluens ſyſtematis S A, erit ex noſtra methodo $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{4+m}{2}\right)-\left(\frac{4-m}{2}\right)}{\left(\frac{4+m}{2}\right)+\left(\frac{4-m}{2}\right)}\right\}$$; & $\sqrt{3} = \frac{4-m}{2}$, &

*m*

$m = 4 - 2\sqrt{3}$: ergo $\frac{4+m}{2} = \frac{4+4-2\sqrt{3}}{2} = 4 - \sqrt{3}$, &

$\frac{4-m}{2} = \sqrt{3}$: ergo $\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{4-m}{2}}{\left(\frac{4+m}{2}\right)+\left(\frac{4-m}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}+\sqrt{3}}$;

in quo casu $\frac{\sqrt{3}}{4}$ est quidem fluens, cui respondet sua homologa

$\frac{4-\sqrt{3}}{(4-\sqrt{3})+\sqrt{3}}$, earumque summa $\frac{4-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}+\sqrt{3}} =$

$\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$, quæ pertinet ad formulam I.$^{am}$, quæ tamen nunquam

formulæ VI.$^{æ}$ aptari potest. Potest tamen $\frac{\sqrt{3}}{4}$ differentiam fluentium repræ-

sentare, & esse $\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)}$, & fluens major

$\frac{\frac{4+\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)}$, minor $\frac{\frac{4-\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)}$,

quæ singulæ nequeunt ad simpliciorem formam reduci: atque ad VI.$^{am}$ generalem sunt referendæ.

§. 40. Vice versa $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$, quæ est unitate major nequit relata ad formulam V.$^{am}$ summam fluentium in S Y; neque $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ differentiam fluentium in S A relata ad formulam IV.$^{am}$ repræsentare. Si enim hoc fieri posset, esset

esset $\frac{4+\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{(4+\sqrt{3})+4}{2}\right)+\left(\frac{(4+\sqrt{3})-4}{2}\right)}{\left(\frac{(4+\sqrt{3})+4}{2}\right)-\left(\frac{(4+\sqrt{3})-4}{2}\right)} =$

$\frac{4+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{4+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}}{1+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$, quæ tamen est summa fluentium ad formulam III.$^{ma}$ S Y pertinentium, sive $\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}}{1+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$

& $\frac{4-\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{4+(4-\sqrt{3})}{2}\right)-\left(\frac{4-(4-\sqrt{3})}{2}\right)}{\left(\frac{4+(4-\sqrt{3})}{2}\right)+\left(\frac{4-(4-\sqrt{3})}{2}\right)} =$

$\frac{4-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}}$, quæ est differentia fluentium formulæ I.$^{æ}$, quæ est $\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}}$: quarum tamen utraque nequit cum formulis V.$^{a}$ vel IV.$^{a}$ conciliari, quæ medium punctum datum requirunt. Nam in S A utraque fluens numero constante $\frac{1}{2}$ positivo afficitur, & in S Y majori fluenti additur, minori demitur idem constans $\frac{1}{2}$; atque ideo nequit esse fluens nisi numerus irrationalis, qui in S A sit dimidium differentiæ, in

S Y dimidium summæ. Quare donec fractio proposita est rationalis, si minor est unitate, in formulis singulis generalibus potest esse tam una ex fluentibus, quam fluentium differentia in S A, quam fluens minor S Y. Si vero est unitate major tam summam, quam alterutram ex homologis repræsentare potest in S Y. Sed si formula numeris aximetris misceatur, tunc in formulis VI.ª & VII.ª punctum medium requirentibus irrationalis numerus solitarie acceptus non nisi semidifferentiam fluentium, vel differentiam in S A, semisummam, vel summam fluentium in S Y repræsentat; & conjunctio rationalis numeri cum aximetro non nisi unam ex fluentibus significare potest; rationali constante, fluente aximetro. Hoc vero totum clarius in LIB. II intelligetur.

§. 41. Quare formula ex: gr: $\frac{\sqrt{3}}{11+\sqrt{3}}$, in qua tam denominator quam numerator ob fluentem $\sqrt{3}$ est fluens, est formula illegitima quæ nulli systemati accomodari potest, nisi fiat $\frac{\sqrt{3}}{11+\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{11+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{11-\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{11+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{11-\sqrt{3}}{2}\right)}$ facto $\left(\frac{1+1}{2}\right)\sqrt{3} = \left(\frac{1-1}{2}\right)\sqrt{3}$, idest quæ erant diversæ $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ in primo casu, fiant identicæ in secundo, ut docuimus T. I. P. I.ª. Simili modo $\frac{11+\sqrt{3}}{11}$, quæ facta $\frac{11+\sqrt{3}}{11} = \frac{11+\sqrt{3}}{(11+\sqrt{3})-\sqrt{3}}$ est fluens major S Y, si denominator $(11+\sqrt{3})-\sqrt{3}$ hoc diverso modo disponatur $\sqrt{3}+(11-\sqrt{3})$, $\sqrt{3}$ in numeratore necessario sumenda est negativa; ac summa fluentium $\frac{(11-\sqrt{3})+\sqrt{3}}{(11-\sqrt{3})+\sqrt{3}}$ quæ pertinet ad S A: facta vero $\frac{(11-\sqrt{3})+\sqrt{3}}{(11-\sqrt{3})+\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{2}.11-\frac{2}{2}.\sqrt{3}+\frac{2}{2}\sqrt{3}}{\frac{2}{2}.11-\frac{2}{2}.\sqrt{3}+\frac{2}{2}\sqrt{3}}$

=

$$=\frac{\left(\frac{11+2.\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{11-2.\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{11+2.\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{11-2.\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\left(\frac{11+\sqrt{12}}{2}\right)+\left(\frac{11-\sqrt{12}}{2}\right)}{\left(\frac{11+\sqrt{12}}{2}\right)+\left(\frac{11-\sqrt{12}}{2}\right)},$$

vel $=\frac{\left(\frac{11+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{11-\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{11+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{11-\sqrt{3}}{2}\right)}$; quoniam tam $\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{12}}{2}=0\sqrt{12}$, quam $\left(\frac{1-1}{2}\right)\sqrt{3}=0.\sqrt{3}$: nec non

$\left(\frac{1-1}{2}\right).0=\frac{0.0}{2}$: ( in quo casu nullescit & ipse aximeter numerus $\sqrt{12}$, vel $\sqrt{3}$)

quæ semper differentiam fluentium homologarum repræsentat: ex hoc ipso igitur quod semper nullescat in formula quocumque valore afficiatur, quin formula valore mutetur, naturam fluentis ut diximus §. 25. semper assumat necesse est: $\frac{11}{2}+\frac{11}{2}$ vero constans necessario debet esse: cum (11) denominatorem constantem repræsentet. Universim igitur a varia divisione denominatoris pendet varius singularum numeratorum fluentium valor atque natura: partes vero, quæ nullescunt in denominatore, fluentes sunt; quæ intactæ remanent, constantes. Secunda tamen methodus a formulis VI$^a$. & VII$^a$. exhibita est in origine prima, quæ docet unitatem constantem bifariam esse dividendam, atque alteri dimidiæ parti addendam, ab altera detrahendam quamcumque fluentem rationalem vel aximetram, quæ si minor est dimidio unitatis æqualis fit semidifferentiæ fluentium, & pertinet ad S A; si major est æqualis semisummæ fluentium, & pertinet ad S Y. Hæc fluens, si rationalis est, reduci potest ad simpliciorem formam, quam exhibet formula generalis IV$^a$., vel V$^a$.: ex quibus colligitur quemcumque numerum rationalem tam unam ex fluentibus, quam semidifferentiam, vel semisummam repræsentare posse. At si irrationalis solitaria exhibeatur, non nisi semidifferentiam in S A, semisummam in S Y referre poterit. Quod si rationali & aximetro numero constet, non nisi alterutram ex fluentibus naturam suscipere poterit ea lege, ut rationalis constans sit, & aximeter fluens æqualis semidifferentiæ in S A, semisummæ in S Y: quæ fluentes nequeunt in formulis VI$^a$., & VII$^a$., quæ tertium punctum datum requirunt, ad simpliciorem reduci formam. Puncto vero medio sublato reducuntur ad

unam ex tribus primis formulis generalibus, in quibus una fluens est numerus aximeter solitarius, altera rationali constante & eodem aximetro numero conflata.

§. 42. Universim igitur fiat $\frac{1}{1} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ : & posita differentia

fluentium $\frac{\sqrt{5}}{9}$, erit $= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{5}}{9}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{5}}{9}\right)}$

$= \frac{\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)}$, & fluens major

$\frac{\frac{9+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)}$, minor $\frac{\frac{9-\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)}$,

quæ nequeunt ob aximetram fluentem $\sqrt{5}$ ad simpliciorem formam reduci, retento puncto medio dato, quod formulæ VI^a. & VII^a. requirunt. At si fiat

earum summa $= \frac{9+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{9+\sqrt{5}-\sqrt{5}}$ convertitur in formulam II^am. SY, & facta

$\frac{\sqrt{5}+(9-\sqrt{5})}{\sqrt{5}+(9-\sqrt{5})}$ pertinet ad I^am. SA. Verum si fluens $\sqrt{5}$ fiat $\sqrt{4}$, erit

$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{4}}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{4}}{9}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{4}}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{4}}{9}\right)} =$

1

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{9+2}{2}\right)+\left(\frac{9-2}{2}\right)}{\left(\frac{9+2}{2}\right)+\left(\frac{9-2}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{9+2}{2}\right)-\left(\frac{9-2}{2}\right)}{\left(\frac{9+2}{2}\right)+\left(\frac{9-2}{2}\right)}\right]\right\}+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{9+2}{2}\right)+\left(\frac{9-2}{2}\right)}{\left(\frac{9+2}{2}\right)+\left(\frac{9-2}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{9+2}{2}\right)-\left(\frac{9-2}{2}\right)}{\left(\frac{9+2}{2}\right)+\left(\frac{9-2}{2}\right)}\right]\right\}}{1}=$$

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{11}{2}-\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}\right]\right\}+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{11}{2}-\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}\right]\right\}}{1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{11+7}{11+7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{11-7}{11+7}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{11+7}{11+7}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{11-7}{11+7}\right)\right)}{1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{18}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{18}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{18}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{18}\right)}{1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{9}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\right)}{1}$$

$=\frac{11}{18}+\frac{7}{18}=\frac{(9+2)+(9-2)}{(9+2)+(9-2)}=\frac{18}{18}$ : hoc eſt denominatore in (18) converſo. Quod ſi $\sqrt{5}$ fluendo fiat $\sqrt{110}$ : tunc fit converſio ad SY, & differentia fluentium $\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{110}}{9}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{110}}{9}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{110}}{9}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{110}}{9}-\frac{1}{2}\right)}$ conſtans, & $\frac{\sqrt{110}}{9}$ ſumma fluentium : cætera ut in caſu primo tractentur.

§. 43. Ex demonſtratis in toto hoc Capite conſequitur generale ac maxime neceſſarium in tota Analyſi Corollarium: quod ſcilicet quando ab una natura ad alteram, ab uno ad alterum ſyſtema tranſitus faciendus eſt, ſi una tantum fluens ex homologis ſyſtematis aſſumpti habeatur, & fluens termino conſtante & fluente conſtet, terminus fluens tamquam ſi non eſſet omittendus eſt, ſervato tantum conſtante: quo artificio fluens ad minimum reducitur, ſi terminus fluens ſigno poſitivo termino conſtanti conjunctus fuerit: contra ad maximum ſi ſigno

signo negativo. In formulis enim integris, quæ fluentes homologas complectuntur, cum termini fluentes utriusque homologæ fluentis, si simul uniantur, evanescant, nec nisi a diversa denominatoris divisione quid vere sint cognosci possit, consequitur; numeratorem etiam singulæ fluentis solitarie sumptæ varie conformari eo modo debere, quo denominator communis numeratores utriusque fluentis inter se divisos continet, varie conformatur. Ita in exemplo superiori ex

generali formula IV.$^a$ eruimus fluentem majorem esse $\dfrac{\frac{9+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)}$,

minorem $\dfrac{\frac{9-\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)}$: at si velis hujusmodi fluentes solitarias ad formulam I$^{am}$. aptare, nunquam id obtinere poteris, nisi ponas fluentem $\sqrt{5} = o$, quo facto prima fit $\dfrac{\frac{9}{2}+o}{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}$ fluens major minima; secunda fluens minor maxima $\dfrac{\frac{9}{2}-o}{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}$ inter se æquales: quæ simul additæ

dant $\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}+\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}} = \dfrac{9}{9} = \dfrac{(9-\sqrt{5})+\sqrt{5}}{(9-\sqrt{5})+\sqrt{5}}$

$= \dfrac{\left(1-\frac{\sqrt{5}}{9}\right)+\frac{\sqrt{5}}{9}}{\left(1-\frac{\sqrt{5}}{9}\right)+\frac{\sqrt{5}}{9}}$ SA $= \dfrac{\left(1+\frac{\sqrt{5}}{9}\right)-\frac{\sqrt{5}}{9}}{\left(1+\frac{\sqrt{5}}{9}\right)-\frac{\sqrt{5}}{9}}$ SY. Quamobrem

in

in hiſce caſibus cautius agetur ſi ſimul conjungantur fluentes homologæ, ex quarum conjunctione, termini qui ſunt conſtantes remanent, fluentes evaneſcunt, cum ſimul æquentur $1^{\circ} = \frac{m}{m}$, & ex qua invenitur valor ($m$) denominatoris conſtantis a formula requiſitus, quo fluentes homologæ ſingulæ ad fractiones ſimpliciores reducuntur.





# CAPUT VI.

*De fluentibus abstractis numero constante & fluente singillatim conflatis, ac de illis exponente negativo — 1 affectis.*

§. 1. PRæter eam, quam nobis necessariam præstant opem formulæ generales VIª. & VIIª. Cap: superioris in numeris aximetris ad fluentes homologas utriusque systematis reducendis, ad quod exequendum formulæ IVª. & Vª. omnino impares reperiuntur; aliæ & quidem non levioris momenti utilitates inde in totam Analysim dimanant, quas quidem operæ pretium est in hoc Capite diligenter persequi ad arcana quædam analytica explicanda, & ad gravissimas difficultates tollendas, quas frustra vetus Analysis methodis, quibus utitur, enodare ac tollere hactenus conata fuit. Ac primum, ut a numeris rationalibus exordiamur, propositæ sint formulæ numeris rationalibus constantes ad normam generalium VIª. & VIIª. conflatæ: nempe

$$1.^a\ \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7-5}{2}\right)+\left(\frac{7+5}{2}\right)}{\left(\frac{7-5}{2}\right)+\left(\frac{7+5}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]}{1}$$

$$2.^a\ \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right]}{1}:$$

in quibus singulorum terminorum tam numerator quam denominator dividi potest numero communi 7, vel 5. Verum si in 1ª. & 2ª. fiat divisio per 7, invenies 1ᵃᵐ. =

$\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}}{1}$$, in qua 1 eſt ſumma fluentium homologarum, $\frac{5}{7}$ differentia; 1 denominator conſtans, & ſyſtema S A legitimum ac idem ut in primo caſu. At $2^a$. fit =

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{7}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{7}\right)}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{5}{7}}$$; quæ ut legitima ſit reducenda eſt ad denominatorem 1, fitque $\frac{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}}{1}$:

quo docemur formulam hanc ſyſtematis S Y dividendam eſſe per numerum minorem 5. Contra vero ſi dividas $1^{am}$. & $2^{am}$. per 5; hæc intacta remanet, $1^a$. iterum reducitur ad diviſorem 7. Quare in $1^a$. denominator fractionis vicem conſtantis gerens erit 7 numerus major, & terminus fluens $\frac{5}{7}$ unitate minor æqualis differentiæ fluentium, & earum ſumma = 1 conſtans. At in $2^a$. terminus fluens $\frac{7}{5}$ ſummæ fluentium æqualis unitate major; 5 numerus minor denominator conſtans, & differentia fluentium conſtans = 1. Ex una igitur tantum formularum præparatione pendet diverſa ſyſtematum natura, ita ut in $1^a$. denominator conſtans ſemper ſit numerus rationalis major, qui hic

eſt 7, & fluens minor 5; contra vero in 2ª. denominator conſtans erit numerus rationalis minor, qui hîc eſt 5, & fluens numerus major, qui hîc eſt 7.

§. 2. Et ſane in termino $\dfrac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}$ evaneſcit 5 manente 7; in termino vero $\dfrac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}$ evaneſcit 7, & remanet 5: ſed in 1.ª $\dfrac{\frac{7}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{7}{2}}$ eſt ſumma fluentinm; in 2.ª $\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}$ eſt differentia: ergo in 1.ª ſumma conſtans major differentia fluente; in 2.ª differentia conſtans minor ſumma fluente. Quare poſito conſtante 7 majori, erit neceſſario amplectenda formula ad S A, & numero fluente lineola ſuffixa diſtincto, erit ſumma fluentium conſtans M + N =

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)-\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7-5'}{2}\right)+\left(\frac{7+5'}{2}\right)}{\left(\frac{7-5'}{2}\right)+\left(\frac{7+5'}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)-\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]}{1}=\frac{7}{7}$$

& differentia fluentium fluens M — N =

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)-\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\frac{7+5'}{2}\right)-\left(\frac{7-5'}{2}\right)}{\left(\frac{7+5'}{2}\right)+\left(\frac{7-5'}{2}\right)}\right]}{1}=\frac{5'}{7}$$

fluente 5' a zero uſque ad 7. At poſito conſtante 5 minori, neceſſario ſe offert formula ſyſtematis S Y, in quo M + N =

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)+\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)+\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]}{1}=\frac{\dot{7}}{5}$$

fluente $\dot{7}$ a 5 usque ad infinitum: differentia vero constans $M - N =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)+\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)+\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)}{\left(\frac{\dot{7}+5}{2}\right)-\left(\frac{\dot{7}-5}{2}\right)}\right]}{1}=\frac{5}{5}.$$

Igitur fractio $\dfrac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}$ necessario pertinet ad S A fluente 5 a zero usque ad 7, quem prætergredi nequit manente systemate; potest tamen augeri 7, facto 5 fractione unitate minori, ex: gr: $\frac{5}{11}$, in quo casu reducta formula est $\dfrac{\left(\frac{7\cdot 11+5}{2}\right)+\left(\frac{7\cdot 11-5}{2}\right)}{\left(\frac{7\cdot 11+5}{2}\right)+\left(\frac{7\cdot 11-5}{2}\right)}$ in qua 5 a zero usque ad 77 fluere potest, manente constante denominatore 77: cum in primo casu sint fluentes $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{7}$, earumque differentia $\frac{5}{7}$ fluens; in secundo fluentes $\frac{41}{77}$, $\frac{36}{77}$; earumque differentia fluens $\frac{5}{77}$. At si sumatur

$\dfrac{\left(\dfrac{7+5}{2}\right)-\left(\dfrac{7-5}{2}\right)}{\left(\dfrac{7+5}{2}\right)-\left(\dfrac{7-5}{2}\right)}$, erit $7 > 5$ semper fluens, & numeratorem fractionis repræsentabit, 5 vero minor denominatorem, & fluens major $\dfrac{6}{5}$, minor $\dfrac{1}{5}$, summa fluens $\dfrac{7}{5}$, differentia constans $\dfrac{5}{5}$. Verum cum fluens major semper unitatem superare debeat, si summam fluentium numeratorum velis minorem 5, hoc nunquam manente systemate obtinere poteris, nisi denominatorem sumas minorem 5; nisi ex: gr: ponas fluentem majorem $\dfrac{5}{4}$, minorem $\dfrac{1}{4}$, ut sit $\dfrac{\left(\dfrac{6+4}{2}\right)-\left(\dfrac{6-4}{2}\right)}{\left(\dfrac{6+4}{2}\right)-\left(\dfrac{6-4}{2}\right)}$. Verum in utroque casu si numerator ac denominator singulæ fractionis dividi possit per 2, denominator constans erit ille idem numerus major in S A, minor in S Y, quem exhibet formula. Quod si divisio per 2 nequeat obtineri denominator constans duplus erit numeri a formula exhibiti. Si enim habeatur $\dfrac{\left(\dfrac{7+4}{2}\right)+\left(\dfrac{7-4}{2}\right)}{\left(\dfrac{7+4}{2}\right)+\left(\dfrac{7-4}{2}\right)}$, in quo casu divisio per 2 obtineri nequit, erit formula $\dfrac{(7+4)+(7-4)}{(7+4)+(7-4)}=\dfrac{14}{14}$, hoc est denominator erit duplus, & formula sic efferri debet $\dfrac{\left(\dfrac{14+8}{2}\right)+\left(\dfrac{14-8}{2}\right)}{\left(\dfrac{14+8}{2}\right)+\left(\dfrac{14-8}{2}\right)}$, & fluens major $\dfrac{11}{11+3}$, minor $\dfrac{3}{3+11}$; quæ sunt superiores $\dfrac{\dfrac{11}{2}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{11}{2}+\dfrac{3}{2}}$

=

$$= \frac{11+3}{11+3}.\ \text{Et in S Y}\ \frac{\left(\frac{7+4}{2}\right)-\left(\frac{7-4}{2}\right)}{\left(\frac{7+4}{2}\right)-\left(\frac{7-4}{2}\right)} = \frac{(7+4)-(7-4)}{(7+4)-(7-4)}$$

$$= \frac{8}{8}.\ \text{ergo}\ \frac{\left(\frac{14+8}{2}\right)-\left(\frac{14-8}{2}\right)}{\left(\frac{14+8}{2}\right)-\left(\frac{14-8}{2}\right)} = \frac{11}{8} - \frac{3}{8} = \frac{11}{11-3} - \frac{3}{11-3}.$$

§. 3. Donec igitur numeris rationalibus utimur, ex una generali formula superiori methodo præparata ad alteram semper transitum licet obtinere; dummodo numerus, qui in prima constans sumptus fuerat, ponatur fluens; contra, qui erat fluens, ponatur constans: atque ideo ab uno systemate ad alterum semper patet aditus. Itaque posita ex: gr: fluente $\frac{11}{11+4}$, quæ est fluens major S A, in qua denominator 15 debet esse constans ex §. 24 Cap: V, si reducatur ad formulam VI^am^. §. 30. Cap: V, invenies $\frac{11}{11+4} + \frac{4}{4+11} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)}{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+7'}{2}\right)-\left(\frac{15-7'}{2}\right)}{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15-7'}{2}\right)+\left(\frac{15+\dot{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-7'}{2}\right)+\left(\frac{15+\dot{7}}{2}\right)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+\dot{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-7'}{2}\right)}{\left(\frac{15+\dot{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\dot{7}}{2}\right)}\right]}{1} =$$

$M + N = \frac{15}{15}$ S A; in qua summa numeratorum fluentium, quæ æquatur denominatori constanti, constans sit necesse est, differentia vero fluens: at si velis constantem 7 & fluentem 15, ex demonstratis oportet ut 7 in locum denominatoris succedat: mutandus igitur est denominator primus $\left(\frac{\dot{15}+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)$ in $\left(\frac{15'+7}{2}\right)-\left(\frac{15'-7}{2}\right)$: qua facta mutatione fluentium differentia fit

con-

conſtans, ſumma fluens, & tranſitus fit a ſyſtemate S A ad ſyſtema S Y, formulaque ſuperior in ſequentem tranſmutatur, ſive in VII^am. §. 30. Cap: V.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]=$$

$$1$$

$$M-N=\frac{7}{7}=\frac{\left(\frac{1'5+7}{2}\right)}{\left(\frac{1'5+7}{2}\right)-\left(\frac{1'5-7}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1'5-7}{2}\right)}{\left(\frac{1'5+7}{2}\right)-\left(\frac{1'5-7}{2}\right)}=$$

$\frac{11}{11-4}-\frac{4}{11-4}$ S Y. Donec igitur legitime, prout conditio diverſa formularum & ſyſtematum requirit, noſmet geramus, nunquam in abſurdum impingi poteſt. Verum ſi in prima formula conſtituti velimus, manente eadem formula, fieri 7 majorem 15, vel 7, quæ eſt fluens, fieri conſtantem, & 15 fluentem, quæ erat conſtans; incidimus incaute in abſurdum nunquam ſanandum: cum facta hac nova ſuppoſitione, prima quæ erat ad S A, neceſſario tranſmutetur in ſecundam ſyſtematis S Y (quod re ipſa comperies): quæ enim erat primum ſumma fluentium conſtans tranſit in differentiam conſtantem, & quæ erat differentia fluens tranſit in ſummam fluentium fluentem: atque ideo fluens minor N, quæ in S A alteri homologæ M addenda erat, mutata conditione ab M ſubtrahenda eſt. Quibus evidentiſſime demonſtratur error perpetuus vulgatæ methodi, quæ tranſgreſſo formulæ primæ limite incidit in poſitivum æquale negativo ſumpto N poſitivo, cujus valor in formula in negativum converſus fuerat. Errorem eumdem in ſecunda formula offendes, ſi methodum notam ſecutus, ponas 15 minorem 7, & tamen velis N negativam, licet ejus valor in formula neceſſario converſus fuerit in poſitivum; ut ſæpe ac ſæpius in P^e. I^a. adverti. Ex hoc vero graviſſimo ſane errore non ſolum quæ fit negativa ſupponitur poſitiva, & viceverſa: ſed etiam fluentium ſingularum valores retento primo denominatore male aſſignantur. Ita in exemplo allato, quæ erat $M=\frac{11}{11+4}=\frac{11}{15}$, & $N=\frac{4}{4+11}=\frac{4}{15}$, ſi fiat 7 conſtans, oritur $M=\frac{11}{11-4}=\frac{11}{7}$, & $N=-N=\frac{-4}{11-4}\;\frac{-4}{7}$: quæ inter ſe differunt mirum quantum!

§. 4.

§. 4. Nunc ad fluentes aximetras nosmet convertentes revocemus oportet quæ in fine Cap: V. §. 41. ostendimus: in formulis scilicet generalibus VI^a. & VII^a., quando irrationalibus miscentur, fluentes singulas constare numero rationali & aximetro, communi divisore 2 affectas, quia simul in unum atque individuum numerum reduci nequeunt: differentiam vero fluentium in S A, summam in S Y ab individuo numero aximetro exhiberi: atque insuper numerum, qui constantis vicem gerit, utpote denominatori æqualem, semper rationalem esse oportere. Hisce animadversis, si sit ex: gr: summa fluentium S A

$$\frac{\left(\frac{15+\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)}$$

, in qua $\sqrt{\dot{7}}$ est fluens, rationalis 15 constans, & fluens major

$$\frac{\frac{15+\sqrt{\dot{7}}}{2}}{\left(\frac{15+\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)}=\frac{15+\sqrt{\dot{7}}}{30}$$

; minor

$$\frac{\frac{15-\sqrt{\dot{7}}}{2}}{\left(\frac{15+\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{\dot{7}}}{2}\right)}=\frac{15-\sqrt{\dot{7}}}{30}$$

, ac si velis qui erat constans in fluentem, & e contra, transmutare, hoc est ad systema S Y te convertere; utrumque fractionis terminum per $\sqrt{\dot{7}}$ multiplices oportet, ut sit

$$\frac{\left(\frac{15\cdot\sqrt{\dot{7}}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\cdot\sqrt{\dot{7}}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\cdot\sqrt{\dot{7}}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\cdot\sqrt{\dot{7}}-7}{2}\right)}$$

, & fluens major erit

$$\frac{\frac{15\sqrt{7}+7}{2}}{\left(\frac{15.\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15.\sqrt{7}-7}{2}\right)} = \frac{15.\sqrt{7}+7}{14}$$ ; minor

$$\frac{\frac{15.\sqrt{7}-7}{2}}{\left(\frac{15.\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15.\sqrt{7}-7}{2}\right)} = \frac{15.\sqrt{7}-7}{14}$$ , sive earum differentia ex dictis §. 2 $\frac{\left(\frac{30\sqrt{7}+14}{2}\right)-\left(\frac{30\sqrt{7}-14}{2}\right)}{\left(\frac{30\sqrt{7}+14}{2}\right)-\left(\frac{30\sqrt{7}-14}{2}\right)} = \frac{14}{14}$

Hoc modo aximetria in utroque systemate semper fluentem terminum numeratoris afficit, denominatore semper rationali manente. Simili modo si a systemate S Y ad S A transitus fiat, divide singulos fractionis terminos per $\sqrt{7}$, & mutatis signis legitimam formulam systemati SA respondentem invenies. In prima systematis SA manente 15, numerus fuens 7 sub radicali usque ad $15^2$ crescere potest, at in SY manente 7, 15 usque ad $\sqrt{7}$ minui potest. In hisce vero formulis aximetris utriusque systematis, semper denominator constans singulæ fluentis erit duplus termini rationalis constantis numeratoris. In primo enim casu SA, summa constans terminorum constantium rationalium numeratorum, sive summa fluentium æqualis est denominatori; in SY vero differentia constans fluentium. Contra vero differentia fluentium fluens erit æqualis duplo termino fluente 2. $\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{7}}{15}$ in SA: & summa fluentium fluens in SY æqualis duplo termino fluente 2. $\frac{\frac{30.\sqrt{7}}{2}}{14} = \frac{30\sqrt{7}}{14} = \frac{15\sqrt{7}}{7}$.

Itaque formulæ generales VI^a. & VII^a. in hoc aximetriæ casu legitimæ erunt sequentes.

§. 5.

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right]+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right]\right\}}{1}=$$

$$=\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}:\ M+N\ \&$$

ⁿSY. VII.ª

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right]-\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right]\right\}}{1}$$

$$=\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}.\ M-N$$

§. 5. Hujusmodi formularum conformatio, quam vidimus etiam in numeris rationalibus in origine esse primam, positis numeris aximetris ad simpliciorem nequit reduci formam, atque est adeo necessaria, si punctum datum medium quærimus, ut sublato communi divisore 2, & facta denominatoris reductione, si fluentes singillatim sumantur, erit in VIª. fluens major $\frac{15\sqrt{7}}{30+\sqrt{7}-\sqrt{7}}$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{7}}{15}}{2+\frac{\sqrt{7}}{15}-\frac{\sqrt{7}}{15}} = \frac{1+\frac{\sqrt{7}}{15}}{\left(1+\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}$$ ; & fluens

minor $\frac{1-\frac{\sqrt{7}}{15}}{\left(1-\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}$, quæ singulæ sic elatæ a legitima forma abludunt, licet eumdem ac antea valorem præseferant. Nam numerator tam majoris fluentis $1+\frac{\sqrt{7}}{15}$, quam minoris $1-\frac{\sqrt{7}}{15}$, est duplus veri, quem requirit systema: item communis denominator 2 est duplus legitimi denominatoris; qui in hoc casu semper æqualis est unitati. Ut igitur hæ ultimæ ad legitimam reducantur formam, fac $\frac{1+\frac{\sqrt{7}}{15}}{2+\frac{\sqrt{7}}{15}-\frac{\sqrt{7}}{15}}$

$$= \frac{\frac{1+\frac{\sqrt{7}}{15}}{2}}{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}} = \frac{\frac{1+\frac{\sqrt{7}}{15}}{2}}{\left[\frac{1+\frac{\sqrt{7}}{15}}{2}\right]+\left[\frac{1-\frac{\sqrt{7}}{15}}{2}\right]}$$

$$= \frac{\frac{15+\sqrt{7}}{2}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}$$ ; quæ est superior legitima: eodem modo

re

te geras oportet in reductione minoris fluentis $\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{7}}{15}}{2-\dfrac{\sqrt{7}}{15}+\dfrac{\sqrt{7}}{15}}$. Similiter

si a fluentibus formulæ VII$^a$. auferatur divisor 2, erit major

$$\frac{\dfrac{15\sqrt{7}}{7}+1}{\left(\dfrac{15\sqrt{7}}{7}+1\right)-\left(\dfrac{15\sqrt{7}}{7}-1\right)}, \text{ \& minor}$$

$$\frac{\dfrac{15\sqrt{7}}{7}-1}{\left(\dfrac{15\sqrt{7}}{7}+1\right)-\left(\dfrac{15\sqrt{7}}{7}-1\right)},$$ quæ singulæ illegitimæ sunt, nec ad veram reduces formam, nisi facias $\dfrac{\dfrac{15\sqrt{7}}{7}\pm 1}{\dfrac{15\sqrt{7}}{7}-\dfrac{15\sqrt{7}}{7}+2}=$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{15\sqrt{7}}{7}\pm 1}{2}}{\dfrac{\left(\dfrac{15\sqrt{7}}{7}+1\right)}{2}-\dfrac{\left(\dfrac{15\sqrt{7}}{7}-1\right)}{2}}=\frac{\dfrac{15\sqrt{7}\pm 7}{2}}{\left(\dfrac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}.$$

Quare in systemate SA terminus fluens singularum fluentium necessario erit æqualis semidifferentiæ fluenti fluentium homologarum; & in systemate SY semisummæ fluenti fluentium homologarum. Divisor igitur 2 in formulis aximetris VI$^a$. & VII$^a$. ita est necessarius, ut hoc sublato tollatur etiam singularum fluentium legitima conformatio.

§. 6. Formulæ vero generales superiores ad hanc etiam sequentem formam legitime reduci possunt, nempe

VIII.ª

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}\right\}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}\right\}\right\}}{1}$$

IX.ª

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right\}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}\right\}\right\}}{1}$$

Hæ hac ratione conſtructæ denominatore conſtante ( 1 ) ſemper afficiuntur, qui in VI.ª ſummam fluentium conſtantem, in VII.ª differentiam fluentium conſtantem repræſentat: & in VI.ª $\frac{\sqrt{7}}{15}$, in VII.ª $\frac{15\sqrt{7}}{7}$ unica fluens; æqualis in VI.ª differentiæ fluentium, ſummæ fluentium in VII.ª: atque ideo in VI.ª fluens hæc ſemper eſt fractio unitate minor; in VII.ª fractio ſemper unitate major: quos limites ſi reſpective tranſgrediamur, fluens ad alteram formulam, ad quam jure ſpectat eſt aptanda. Donec terminus fluens eſt aximeter, nulla alia formularum reductio præter illas, quas ſuperius tradidimus, obtineri poteſt, niſi quæ ſublato puncto medio ad formulas generales I.ªᵐ, II.ªᵐ, ac III.ªᵐ §. 30 Cap: V nos ducat. Ita VI.ª $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}$ reducitur ad $\dfrac{1-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}{1-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}$ quæ eſt I.ª ad S A: hac tamen differentia, quod hîc $\frac{1}{2}$ . $\frac{\sqrt{7}}{15}$ ſit altera fluens homologa, quæ in VI.ª

ſemi-

ſemidifferentiam fluentium repræſentabat. Vel convertitur in $\frac{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}$

quæ eſt II.ª ad S Y, referente $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}$ fluentem minorem ejuſdem ſyſtematis

S Y. At VII.ª $\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}$

reducitur ad ſequentem $\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}}$ quæ eſt

II.ª ad S Y, minore fluente $\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}$ : vel reducitur ad

$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-1\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-1\right)}$ quæ eſt III.ª donec eſt

$\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}$ unitate major, quæ hîc convertitur in fluentem majorem S Y. Quod ſi termini fluentes fluendo rationales fiant, tunc formulæ ulteriorem patiuntur reductionem, cum fluentes ſingulæ homologæ in unum rationalem numerum contrahi poſſint, qui proinde ſinguli fluentes cenſendi ſunt, iis legibus moderandi, quas in Capitibus ſuperioribus tradidimus.

§. 7. Ex hiſce jactis principiis pleno alveo fluunt conſecutiones prorſus mirabiles, quas Analyſtæ in ſubducendis calculis tantum intenti, ignorata prorſus diverſa ſyſtematum atque fluentium natura, fruſtra enodare hactenus conati ſunt: in quas tamen ſi cæco ducti calculo forte fortuna ipſi incidunt, ſpecioſo paradoxorum nomine cohoneſtant, aliis vero tamquam graviſſimos errores non ferendos exprobrant. Nos ut harum conſecutionum veritas in tam aperto lumine collocetur, ut nullus amplius nec errori, nec dubitationi, nec myſterio locus

cus relinquatur, quæ erunt magis necessaria, in aliquot Theoremata distribuemus, & exemplis numericis applicabimus, ac postremo methodum vulgatam cum hac nostra comparabimus. Litteris vero M, N non nisi signa quædam arbitrio sumpta fluentes homologas abstractas utriusque systematis indicantia significare volumus, quæ & quoad naturam, & quoad formam & positionem ignotæ prorsus censendæ sunt, quæque nullo modo, nisi instituta cum altero membro ex datis & fluentibus systematis conflato comparatione, determinari possunt: quemadmodum sunt *x*, *y* &c a communi methodo passim usurpatæ, quæ a nostris abstractis M, N non differunt, si communes per protonumerum divisæ intelligantur.

## THEOREMA I.

Est M + N SA = M — N SY.

§. 8. Ex superius demonstratis constat esse

$$M + N = \begin{Bmatrix} 1.^a & \dfrac{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)}{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)} \\ 2.^a & \dfrac{11+4}{11+4} \\ 3.^a & \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7'}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7'}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7'}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7'}{15}\right)} \\ 4.^a & \dfrac{\left(\frac{15+\sqrt{7}'}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}'}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}'}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}'}{2}\right)} \\ 5.^a & \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}'}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}'}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}'}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}'}{15}\right)} \\ & \text{\&c.} \end{Bmatrix} SA =$$

1.ª

$$
M - N = \left\{
\begin{array}{ll}
\text{I.}^{a} & \dfrac{\left(\dfrac{\dot{15} + 7}{2}\right) - \left(\dfrac{\acute{15} - 7}{2}\right)}{\left(\dfrac{\acute{15} + 7}{2}\right) - \left(\dfrac{\acute{15} - 7}{2}\right)} \\[3ex]
\text{II.}^{a} & \dfrac{11 - 4}{11 - 4} \\[3ex]
\text{III.}^{a} & \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\dot{15}}{7} + \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\acute{15}}{7} - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\acute{15}}{7} + \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\acute{15}}{7} - \dfrac{1}{2}\right)} \\[3ex]
\text{IV.}^{a} & \dfrac{\left(\dfrac{15 \cdot \acute{\sqrt{7}} + 7}{2}\right) - \left(\dfrac{15\, \acute{\sqrt{7}} - 7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15 \cdot \acute{\sqrt{7}} + 7}{2}\right) - \left(\dfrac{15\, \acute{\sqrt{7}} - 7}{2}\right)} \\[3ex]
\text{V.}^{a} & \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{15\, \acute{\sqrt{7}}}{7} + \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{15\, \dot{\sqrt{7}}}{7} - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{15\, \acute{\sqrt{7}}}{7} + \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{15\, \acute{\sqrt{7}}}{7} - \dfrac{1}{2}\right)} \\[3ex]
 & \text{\&c.}
\end{array}
\right\} S\,Y.
$$

Perfecta igitur æqualitas intercedit inter ſingulas haſce formulas utriuſque ſyſtematis, ſingulæ tamen fluentes S A differunt natura & valore a ſingulis fluentibus S Y: atque illæ ejuſdem ſyſtematis ſemper forma nonnunquam valore differunt ab aliis non homologis ejuſdem formulæ. Nam ſingulæ majores fluentes formularum 1.ª, 2.ª, 3.ª nec non minores reſpective inter ſe æquantur: non ſunt tamen inter ſe homologæ reputandæ cum diverſa forma afficiantur: ſingula tamen ex iſtis differt etiam valore ab illis 4.ª & 5.ª: idem dicas de formulis S Y. Inſuper quæ ſunt ſyſtematis S A fluentes homologæ adduntur, quæ pertinent ad S Y invicem ſubtrahuntur. Æqualitas igitur intercedit inter ſummam

mam fluentium S A & inter differentiam fluentium S Y: sed singulæ fluentes unius systematis differunt forma ac valore a singulis fluentibus alterius. Singula fluens formulæ 1.ª, 3.ª: 4.ª & 5.ª, componitur ex constante positiva, & ex fluente addita fluenti majori, subtracta a minori: ac termini singularum fluentium utrinque positivi sunt constantes, qui diverso signo afficiuntur fluentes. At in 2.ª, in qua terminus fluens & constans, utpote ambo rationales, simul in unum & individuum numerum conjunguntur, singula fluens uno tantum fluente numero constat, ut est $\frac{11}{11+4} = \frac{m}{m+n}$; $\frac{4}{4+11} = \frac{n}{n+m}$. Hanc vero formam nequeunt suscipere fluentes 4.ª & 5.ª formulæ numeris aximetris intermixtæ, in quibus termini rationales constantes sunt, aximetri fluentes. Idem dicas de fluentibus formularum S Y, hac tantum differentia, quod in S Y termini singularum fluentium positivi sunt fluentes, qui diverso signo afficiuntur constantes. Facta vero hac fluentium terminorum a constantibus distinctione, facile erit cuique formulas generales concinnare ad normam illarum, quas supra tradidimus, quas brevitatis gratia hîc omitto.

§. 9. Nunc harum veritatum face præeunte vulgatam methodum consulamus. Hæc primum docet esse $x + y = x - y$, quia in formulis superioribus utraque est $= 1^{\circ} = 1$. Hoc quidem verissimum est; sed cum ignoret in hoc generali & fæcundissimo symbolo $1^{\circ}$ totam Scientiam hanc compendio contineri, posita $x + y = x' - y'$, sumit $x = x'$, & $y = - y'$, & $y + y' = o$, quod mirum quantum repugnat! Si enim sit ex: gr: $x + y$ S A $= \frac{11}{15} + \frac{4}{15}$, & $x' - y'$ S Y $= \frac{11}{7} - \frac{4}{7}$, erit ex communi doctrina $\frac{11}{15} = \frac{11}{7}$, & $y + y' = \frac{4}{15} + \frac{4}{7} = \frac{88}{105} = o$. Hinc statim in ipso exordio a veritate positi principii deflectens in devia ducitur, atque in illos errores, quos cum sæpe in toto hoc Opere persecutus fuerim, nunc prætereo. Hoc tantum hîc innuam necesse est, quod vulgata methodus perpetuo abutitur illo vero ac generali principio, quo docetur posse mutatione signorum quemcumque terminum datum ab uno ad alterum æqualitatis membrum rite transferri; eo quia hoc principium, quod vere convenit tantum numeris datis, etiam fluentibus nullo delectu atque cautione perpetuo applicat. Nam posita ex: gr: æquatione vera $x + y = \frac{11}{11+4} + \frac{4}{4+11} = x' - y' = \frac{11}{11-4} - \frac{4}{11-4}$ si fiat secundi termini translatio, erit $x + y' = \frac{11}{11+4} + \frac{4}{11-4} = x' - y = \frac{11}{11-4}$

—

$= \dfrac{4}{11+4}$, in qua valor quidem convenit, ſed ſimul conjunguntur fluentes diverſi ſyſtematis, quæ nullo affinitatis vinculo conſociantur; & ſi reductio fiat; erit $\dfrac{137}{105} = \dfrac{137}{105}$, quæ tranſit in fluentem majorem ſyſtematis S Y, ſi fiat $\dfrac{137}{105} = \dfrac{137}{137-32}$; vel in minorem $\dfrac{137}{242-137}$ ejuſdem ſyſtematis, atque proinde non poteſt amplius aptari ad S A. Nequit igitur hujuſmodi terminorum tranſpoſitio tuto atque cum utilitate adhiberi, niſi advertas facta hac tranſlatione naturam fluentium & ſyſtematis, manente eodem valore, mutari: nec poſſe primo ſumptam ſyſtematis ac fluentium naturam ſervari, niſi poſita ex: gr: $x + y = x' - y'$, & facta tranſpoſitione $x + y' = x' - y$, intelligatur $y'$, quæ erat fuens minor S Y, facta ejuſdem translatione, converti in fluentem majorem, vel minorem S A: & viceverſa $y$ quæ erat in S A major vel minor fluens, facta translatione, converti in fluentem minorem S Y; ita ut depoſita prima natura ac valore naturam ac valorem illum aſſumat quem ſyſtema, in quod ſubit, requirit; quemadmodum ſæpe in P^e. I^a. animadvertimus: Sed nunc hoc innuiſſe ſufficiat.

## THEOREMA II.

§. 10. $\overline{M+N}\ SA = (M+N)^{-1}\ SA = \overline{M-N}\ SY = (M-N)^{-1}\ SY$. Cum in exemplo aſſumpto idem ſit

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)} = \left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]^{-1} =$$

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)} = \left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]^{-1}$$ demonſtrata manet

Propoſitio.

Verum videndum quandonam sumenda sit $(M+N)^{-1}$ SA loco M+N SA, & $(M-N)^{-1}$ SY loco M—N SY, & viceversa: hoc est, quando formula intelligenda sit directa vel inversa. Ut id cognoscamus, memoria revocandum est, quod innuimus CAP. V. §. 24. nempe tam denominatorem, quam numeratorem cujuscumque fluentis formularum superiorum divisum esse in utroque systemate in numeratores singulos fluentes fluentium homologarum, sed denominatorem nullo modo posse in duas fluentes separatas segregari, ac tantum indicare quinam debeant esse numeratores fluentes homologarum fluentium. Itaque si in formulis superioribus contra naturam suam numerator in unum individuum numerum constantem redigatur, & denominator in duos fluentes numeros dispertiatur, fractio invertitur inverso officio numeratoris in denominatorem; atque ideo exponente negativo afficienda est, ut facta inversione ab exponente negativo indicata & numerator loco denominatoris positus, & denominator loco numeratoris uterque ad suum necessarium munus restituatur, ut fractio possit actu in duas fluentes homologas solitarias separari. Ita posita $\dfrac{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)}{\left(\frac{15+7'}{2}\right)+\left(\frac{15-7'}{2}\right)}$ $= \frac{m}{15} + \frac{n}{15}$, fractio censenda est directa: at si fiat $= \frac{15}{m+n}$, hæc exponente negativo est afficienda, cum vere sit $\frac{15}{m+n} = \left(\frac{15}{m+n}\right)^{-1} = \frac{m}{15} + \frac{n}{15}$.

Idem dicas de differentia fluentium M—N SY $= (M-N)^{-1}$ SY.

## THEOREMA III.

§. 11. In æquatione Theorematis I. mutato utriusque membri systemate; hoc est posito M—N SY = M—N SA non amplius perfecta inter hæc membra valoris æqualitas servatur.

Ex demonstratis sumpta una ex formulis superioribus constat summam fluentium homologarum in SY esse $\dfrac{\left(\frac{15'+7}{2}\right)+\left(\frac{15'-7}{2}\right)}{\left(\frac{15'+7}{2}\right)-\left(\frac{15'-7}{2}\right)}$ = M+N SY;

&

& differentiam fluentium in fyftemate S A effe $\dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}$

$= M - N\ SA$: fed oculis ipfis patet hafce inter fe æquari non poffe, ergo demonftratum eft Theorema.

## THEOREMA IV.

§. 12. $M+N\ SY = (M-N)^{-1}\ SA$, & $M-N\ SA = (M+N)^{-1}\ SY$

Ex Theoremate primo habetur $\dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)} =$

$\dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}$ : fed ex hac neceffario eruitur 1°.

$$\dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}$$ ; nec non 2°.

$$\dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7}{2}\right)}$$ ; in quibus

fingulis determinandum eft fyftema antequam fingulorum natura cognofcatur: hoc eft ex §. 3°. & 4°. *hujus* determinari oportet utrum numerus 7, vel 15 fluens fumendus fit, ut poffit determinari quinam fit denominator conftans: fed in fuperioribus formulis abftracte fumptis nulla fubeft ratio cur potius unus aut alter numerus fluens eligendus fit; ergo alteruter fluentis vicem gerere poteft.

Itaque si ponatur 7 fluens, erit 1°. $\dfrac{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)} = (M-N)^{-1}\ SA$; & 2°. $\dfrac{\left(\dfrac{15+7'}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7'}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7'}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7'}{2}\right)} = M-N\ SA$: at si ponatur 15 fluens, erit 1°. $\dfrac{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)} = M+N\ SY$; 2°. $\dfrac{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)} = (M+N)^{-1}\ SY$: eritque $M+N\ SY = (M-N)^{-1}\ SA$, & $M-N\ SA = (M+N)^{-1}\ SY$. Q. E. D.

Idem deduci poterat ex Téoremate II. . Nam invenies in 1°.

$$\frac{\left(\dfrac{15+7'}{2}\right)+\left(\dfrac{15-7'}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+7'}{2}\right)-\left(\dfrac{15-7'}{2}\right)} = \left(\frac{15}{m-n}\right)^{-1} = (M-N)^{-1}\ SA\text{: vel}$$

$$\frac{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)+\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)}{\left(\dfrac{15'+7}{2}\right)-\left(\dfrac{15'-7}{2}\right)} = \frac{m+n}{7} = M+N\ SY\text{: in 2°.}$$

(15

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{m-n}{15} = M-N\ SA\text{: vel}$$

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{7}{m+n}^{-1} = (M+N)^{-1}\ SY.$$

## THEOREMA V.

§. 13. $(M-N)^{-1}\ SA = M-(-N) = M+N\ SY$; $(M+N)^{-1}\ SY = M-(+N) = M-N\ SA$: & viceversa $M+N\ SY = M-(-N) = (M-N)^{-1}\ SA$; & $M-N\ SA = M-(+N) = (M+N)^{-1}\ SY$, transitu facto ab exponente negativo $-1$ ad coefficientem $-1$ applicatum minori fluenti N.

Nam facto fluente numero 15 ex Theor: II. & IV. est

$$\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]^{-1} = (M-N)^{-1}\ SA =$$

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)} = M+N\ SY\text{; \& facto fluente 7 est}$$

(15

$$\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]^{-1} = (M+N)^{-1}\ SY =$$

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)} = M - N\ SA.$$ Sed idem obtinetur si fiat

$$\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]^{-1} = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(-\left(\frac{15-7}{2}\right)\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(+\left(\frac{15-7}{2}\right)\right)} = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}.$$

Similiter

$$\left[\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right]^{-1} = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15-7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(+\left(\frac{15-7}{2}\right)\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(-\left(\frac{15-7}{2}\right)\right)} = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}:$$

ergo patet propositum.

Hæc hactenus demonstrata Theoremata omnibus illis formulis applicari pos-

sunt

ſunt, quæ eamdem, quam formulæ exempli aſſumpti §. 8, formam habent. Ex quibus Corollarium illud generale & maxime neceſſarium eruitur: directionem ſcilicet vel inverſionem formulæ ſuperioris unice pendere in origine a numero, quem volumus naturam fluentis induere, a quo pendet etiam ſyſtema. Ex hujuſce veritatis maximi in tota Analyſi momenti ignoratione quoties vetus Analyſis cæco ducta calculo in haſce exponentis negativi formulas impingit, toties quo ſe vertat neſcit, atque ea a veritate aliena ad hujuſce myſterii explicationem comminiſcitur, quæ ſuo loco ad examen vocabo. Nunc quoniam varia eſt ratio, qua exponens negativus tractandus eſt pro varia ſingulæ formulæ §. 8. modificatione, & prout fluentes vel ſolitariæ, vel ſimul hoc exponente negativo afficiuntur, quæ varia ratio arbitrio noſtro relinquitur; neceſſe eſt in hac exponenda nos diligentius immorari. Ac primum videndum quid eveniat ſingulis fluentibus ſi ſinguli ſingulæ fluentis termini exponente —1 afficiantur.

## THEOREMA VI.

§. 14. Dico igitur in ſiſtemate S A ſi ſinguli termini unius fluentis exponente —1 afficiantur, fluentem ipſam tranſmutari in ſuam homologam poſitivam, & quas erat major converti in minorem, & viceverſa: hoc eſt eſſe $\overset{-1}{M}\ SA = N\ SA$; $\overset{-1}{N}\ SA = M\ SA$.

Ex ſuperius demonſtratis quæcumque fluens major ſyſtematis S A ſub una ex illis, quas tradidimus, formis concludatur neceſſe eſt. Itaque ſi fiat $\overset{-1}{M}$

$$= \frac{11^{-1}}{11^{-1} + 4^{-1}} = \frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}}, \text{ erit } \overset{-1}{M} = \frac{1}{11 \cdot \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{4}\right)}$$

=

$$=\frac{1}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{\frac{15+\sqrt{7}}{2}}+\frac{1}{\frac{15-\sqrt{7}}{2}}\right]}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1\sqrt{7}}{2\,15}\right)\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}\right]}:$$

hoc est $M^{-1}=\frac{4}{4+11}=\frac{\frac{15-\sqrt{7}}{2}}{\frac{15-\sqrt{7}}{2}+\frac{15+\sqrt{7}}{2}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}=N \text{ minori: eadem methodo}$$

invenies $N^{-1}=M$. Q. E. D.

## THEOREMA VII.

§. 15. In systemate S Y fluens major $M^{-1}=-N$ minori; & minor $-N^{-1}=M$ majori.

Nam ex §. 8. erit $M^{-1}=\frac{11^{-1}}{11^{-1}-4^{-1}}=\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}}$

$$=\frac{\left(\frac{\frac{15\sqrt{7}}{7}+1}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{\frac{15\sqrt{7}}{7}+1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{\frac{15\sqrt{7}}{7}-1}{2}\right)^{-1}},\ \text{sed}\ M^{-1}=\frac{1}{11\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{4}\right)}$$

=

$$= \frac{1}{1 - \frac{11}{4}} = \frac{4}{4 - 11} = \frac{-4}{11 - 4} : \& - N^{-1} = \frac{-4^{-1}}{11^{-1} - 4^{-1}}$$

$$= -. \frac{1}{4\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{4}\right)} = - . \frac{1}{\frac{4}{11} - 1} = \frac{-11}{4 - 11} = \frac{11}{11 - 4}.$$ Idem invenies in aliis formulis: ergo patet propositum. Quare hac methodo exponentis $-1$ in utroque systemate a fluente majori, vel minori transitus fit ad ejus homologam minorem, vel majorem eo etiam signo minori præfixo, quo simul conjungendæ sunt ad obtinendam in S A summam; in S Y differentiam constantem.

§. 16. Hîc animadvertas oportet in formulis §. 8, si excipias 2.am in S A; II.am in S Y, hujusmodi obtineri fluentium homologarum permutationem, si exponens negativus $-1$ transferatur in coefficientem applicatum numero minori, qui illic est 7, vel $\sqrt{7}$. Nam facta hac translatione erit in S A

$$\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}} = \frac{\frac{15+(-\sqrt{7})}{2}}{\left(\frac{15+(-\sqrt{7})}{2}\right) + \left(\frac{15-(-\sqrt{7})}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{15-\sqrt{7}}{2}}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right) + \left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)} : \& \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}. - \frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}. - \frac{\sqrt{7}}{15}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}. - \frac{\sqrt{7}}{15}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)};$$

Similiter in S Y $$\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}} =$$

 (15

$$\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+(-7)}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-(-7)}{2}\right)}=\frac{-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}:$$

$$\& \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)^{-1}}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}.$$

$$=\frac{-\left(\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\right)}$$ : Sed hujusmodi consecutiones veras esse duo superiora Theoremata nos docent; ergo utrumque artificium ad permutationem fluentium in utroque systemate obtinendam legitime adhiberi potest. Quamobrem in hisce formulis translatione exponentis $-1$ in coefficientem eo modo, quo hîc docuimus, nova & elegans exsurgit methodus, qua permutatio fluentium homologarum in utroque systemate obtinetur.

§. 17. Innueram § superiori ultimum hoc artificium applicari non posse formulis 2.ª S A $\frac{11+4}{11+4}$; II.ª S Y $\frac{11-4}{11-4}$, in quibus singula fluens numeris rationalibus conflata, nempe $\frac{\frac{15+7}{2}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}$,

$\frac{\frac{15-7}{2}}{\left(\frac{15-7}{2}\right)+\left(\frac{15+7}{2}\right)}$; in S A, $\frac{\frac{15+7}{2}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}$,

$\frac{\frac{15-7}{2}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}$ in S Y in unum atque individuum numeratorem

ratio-

rationalem reducta fuerat. Ut vero methodus generalis inveniatur, quæ universim omnibus atque singulis formulis §. 8 æque recte applicari possit, demonstrandum est sequens

## THEOREMA VIII.

In systemate $S A M^{-1} + N^{-1} = -M - N = N + M$.

Ut hoc demonstrem sit linea geometrica A B ( Tab. I. *Fig.* 27 ) protonumerus: per ea, quæ docuimus CAP. III erit $(M + N) . AB =$

$$\left(\frac{\frac{15+7}{2} + \frac{15-7}{2}}{\frac{15+7}{2} + \frac{15-7}{2}}\right) . AB = (AC + CD) + BC - CD)$$

$= \left(\frac{11}{11+4} + \frac{4}{4+11}\right) . AB = AD + BD$. Ergo $(-M - N) AB = -AD - BD = Bd + Ad$: hoc est A D facta negativa transit a puncto originis A ad punctum originis B, fitque $-AD = Bd$; & similiter B D facta negativa transit a puncto originis B ad punctum originis A, estque $-BD = Ad$, si directio fluentium ( ut moris est ) spectetur. At si $-AD$ transit in B d, sufficitur necessario in puncto originis A sua homologa $Ad = -BD$, & quæ in primo casu ex puncto originis A fluens erat A D major transmutatur in A d minorem æqualem homologæ B D negativæ; & quæ ex puncto originis B fluens erat B D minor convertitur in B d majorem æqualem homologæ A D ab altero originis puncto A profectæ. Ergo retentis iisdem originis punctis A, B succedit in punctum A fluens A d, in punctum B fluens B d. Ergo fluentes abstractæ $-M - N = N + M$. Sed ex Theoremate VI est $M^{-1} + N^{-1} = N + M$: ergo universim $M^{-1} + N^{-1} = -M - N = N + M$. Q. E. D.

In hoc igitur systemate fluentes ambæ signo negativo affectæ non sunt vere negativæ, sed significant tantum in suis originis punctis A & B permutari invicem, fierique A D, Ad; & B D, B d: hoc est primo sumptam directionem ac plagam inverti. Nam si A D facta negativa repræsentat valore & positione B d positivam, & B D negativa A d positivam, quisque videt in punctum originis A, relicto primo suo originis puncto B, succedere minorem B D, fierique A d: & contra in punctum originis B, relicto suo originis puncto A, succedere majorem A D, fierique B d. Quod si una tantum fluens nega-

gativa — M sumatur, fit positiva mutato suo primo originis puncto: ergo in eo, in quo erat primum, originis puncto convertitur in suam homologam N. Et quoniam in hoc systemate S A est per Theor: VI. $M^{-1} = \frac{m^{-1}}{m^{-1} + n^{-1}}$ $= \frac{n}{n+m}$; & per hoc $-M = \frac{-m}{-m-n} = \frac{n}{n+m}$ erit universim $M^{-1} + N^{-1} = \frac{m^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}} + \frac{n^{-1}}{n^{-1}+m^{-1}} = -M - N = \frac{-m}{-m-n}$ $+ \frac{(-n)}{-n-m} = \frac{n}{n+m} + \frac{m}{m+n}$.

## THEOREMA IX.

§. 18. In systemate S A differentia fluentium homologarum, si singulæ exponente vel coefficiente negativo $-1$ afficiantur, ex positiva fit negativa.

Cum sit enim $M - N = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right) - \left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right) + \left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{7}{15}$, erit ex demonstratis §. 16 $M^{-1} - N^{-1} = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}$

$= \frac{\left(\frac{15-7}{2}\right) - \left(\frac{15+7}{2}\right)}{\left(\frac{15-7}{2}\right) + \left(\frac{15+7}{2}\right)} = \frac{-7}{15}$ quæ est fractio negativa: ergo patet primum. Sed ex Theor: VIII $-M = N$; $-N = M$; $-m = n$; $-n = m$: ergo $-M - (-N) = N - M = \frac{-m}{-m-n}$

(—

$$-\frac{(-n)}{n-m}=\frac{n}{n+m}-\frac{m}{m+n}=-\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$$ posita $m > n$. Quod erat secundum.

## THEOREMA X.

§. 19. In systemate S Y differentia fluentium homologarum, si singulæ, ut supra, exponente vel coefficiente — 1 afficiantur, semper ut positiva sumenda est; cum ipsæ non nisi permutationem fluentium, & oppositam fluentium homologarum plagam indigitent.

Posita enim $M - N = \dfrac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{7}{7}$ erit ex Theorem: VII $M^{-1} - N^{-1} = \dfrac{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}} = - M+N$

$$= \frac{-\left(\frac{15-7}{2}\right)+\left(\frac{15+7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{7}{7}$$ semper positiva. Si itaque sit (M—N) A B = A D — B D ( *Fig.* 28 ) erit ( $M^{-1} - N^{-1}$ ) A B = (-N+M) A B = — A d + B d. Ergo fluens major S Y retento eodem originis puncto A conversa est in fluentem minorem negativam A d; & fluens minor negativa retento eodem originis puncto B conversa est in fluentem majorem positivam B d postquam exponente — 1 affectæ fuerunt. Quod est primum. At si exponens — 1 transeat in coefficientem, ut sit — M —.— N = — M + N = $\dfrac{-m}{-m-.-n} - . \dfrac{-n}{-m-.-n} = \dfrac{-m}{n+m} + \dfrac{n}{n+m}$, ex — M, quæ in hoc systemate ex dictis necessario est fluens minor, eruitur $\dfrac{-m}{n-m}$ affectam exponente negativo in fluentem minorem transmutari.

Quod

Quod si utamur artificio §. 16, fiatque $M^{-1} - N^{-1} =$

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}} = \frac{\left(\frac{15-7}{2}\right) - \left(\frac{15+7}{2}\right)}{\left(\frac{15-7}{2}\right) - \left(\frac{15+7}{2}\right)} = \frac{-7}{-7}$$; quoniam ex Theor: VII. $M^{-1} = -N$ minori; & $-N^{-1} = M$ majori, erit

$$M^{-1} - N^{-1} = -N + M = \frac{-\left(-\left(\frac{15-7}{2}\right) + \left(\frac{15+7}{2}\right)\right)}{-\left(-\left(\frac{15-7}{2}\right) + \left(\frac{15+7}{2}\right)\right)} =$$

$$\frac{-\left(\frac{15-7}{2}\right) + \left(\frac{15+7}{2}\right)}{-\left(\frac{15-7}{2}\right) + \left(\frac{15+7}{7}\right)} = \frac{7}{7}$$ : quæ ideo semper ut positiva sumenda est.

Quare in hoc systemate S Y differentia fluentium quæ semper constans est, semper positiva sumenda est, ac signum ( $-1$ ) fluentibus singulis suffixum vel præfixum non nisi fluentium, qnæ sempar simul ab eadem plaga procedunt, oppositam directionem permutatione fluentium ostendit.

## THEOREMA XI.

§. 20. Contra vero in hoc systemate S Y summa fluentium homologarum fluens si singulæ fluentes exponente vel coefficiente negativo $-1$ afficiantur semper ex positiva transit in negativam & vice versa.

Summa fluentium in S Y posita M majori est $M - (-N) =$

$$\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right) + \left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right) - \left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{15}{7}$$ : sed ex Theorem: VII $M^{-1}$

$$-(N^{-1} = -N - M = -\frac{\left(\frac{15-7}{2}\right) - \left(\frac{15+7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right) - \left(\frac{15-7}{2}\right)}$$; ergo

M

$M^{-1} - (-N^{-1} = -N - M = \frac{-15}{7}$. Quod ſi utamur artificio § 16,

erit $M^{-1} + N^{-1} = \frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+7}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{15-7}{2}\right)^{-1}}$

$= \frac{\left(\frac{15-7}{2}\right) + \left(\frac{15+7}{2}\right)}{\left(\frac{15-7}{2}\right) - \left(\frac{15+7}{2}\right)} = \frac{15}{-7}$. Quod erat primum : ex quo eruitur hoc artificio manentibus iiſdem originis punctis ſingularum fluentium, primam, quæ erat fluens major A D = M, converſam fuiſſe in minorem Ad in contrariâ directione primæ, & B D = N minorem converſam fuiſſe in majorem ſuæ primæ directioni oppoſitam B d. Quod ſi fiat $M^{-1}$

$-(-N^{-1} = -M - N = \frac{(m)^{-1}}{m^{-1} - n^{-1}} + \frac{(n)^{-1}}{m^{-1} - n^{-1}} = \frac{-m}{-m+n}\ \frac{-n}{-m+n}$; erit

$\frac{-\left(\frac{15+7}{2}\right) - \left(\frac{15-7}{2}\right)}{-\left(\frac{15+7}{2}\right) + \left(\frac{15-7}{2}\right)} = \frac{-11}{-11+4}\ \frac{-4}{-11+4} = \frac{-15}{-7}$ : quo docemur primam

M majorem relicto ſuo primo originis puncto A ad punctum B originis intacto manente ſuo valore translatam fuiſſe, ac ſimiliter minorem N ex puncto B translatam fuiſſe in A. Ea igitur tantum intercedit differentia inter methodum exponentis negativi — 1, & methodum coefficientis negativi — 1, quod in prima fluentes, retentis primæ ſuæ originis punctis, major in minorem & minor in majorem tranſmutantur: in ſecunda, retentis iiſdem valoribus ſingularum fluentium, mutant invicem ſua originis puncta : repugnat enim in utraque methodo conciliari poſſe ſimul & identitatem primi valoris, & primi puncti originis ſingularum fluentium.

§. 21. Quare in ſyſtemate S A conſtitutus ſi idem punctum originis primo ſumptum ſingularum fluentium retinere velis, tranſmutanda eſt fluens ſigno negativo affecta in ſuam homologam : quo facto ſemper negativum vitatur ; nec niſi fluentium permutatio conſequitur. Nam ſi ex : gr : punctum originis fluentis

tis M sit A, (*Fig.* 27.) & punctum B fluentis N, formula negativa $-M-N$ significat primam fluentem ex puncto originis A esse in directione oppositam suæ homologæ M ex puncto B originis obviam occurrentis; ideoque esse N: similiter fluentem alteram ex puncto originis B esse in directione opposita suæ homologæ N ex puncto altero A prorumpentis, ac proinde esse revera M: ac demum esse $-M-N=N+M=M^{-1}+N^{-1}$. Verum in systemate S Y in quo fluentes a punctis A, B profectæ per eamdem simul directionem procedunt, si data differentia fluentium $M-N$ convertatur in $-M-(-N)=-M+N$, patet primam fluentium directionem in oppositam, nec non valorem mutatum fuisse, retento singularum originis puncto: ideoque necessario quæ erat major fit minor, & minor fit major: At in primo casu formulæ $M^{-1}-N^{-1}=-N+M$, fluentes invicem mutant suum originis punctum, ac directionem, retento eodem ac prius valore: & hæc est differentia quæ inter fluentes exponente $-1$. negativo & illas coefficiente eodem $-1$. negativo affectas intercedit: ut hisce probe intellectis facile sit conciliare æquationem $M^{-1}-N^{-1}=-N+M=-M+N$.

§. 22. Verum ut clarius percipias totam hujusce novæ methodi in utroque systemate œconomiam, ac re ipsa cognoscas hanc exponentis negativi $-1$ methodum primam esse in origine atque natura, & ab hac pendere illam communem, qua signa coefficientium singulorum terminorum ex positivis in negativa, & viceversa, mutantur, quæ nisi ab illa exponentis negativi instruatur atque regatur, in devia ducat necesse est; mecum velim reputes ex doctrina *Capit: superiorum* in systemate S A primam formulæ summæ fluentis M ab origine A prorumpentis, & fluentis N ab origine B profectæ divisionem a puncto dato C medio sumendam esse, ac bifariam dividendam ut sit $M+N=\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{N+M}{2}\right)=AC+BC$ (*Fig.* 27) quæ proinde æquales quidem sunt, sed diversæ; (pono hîc protonumerum $AB=1$, qui intelligatur applicatus singulis fluentibus abstractis, ne quod *Cap*: III de ratione, qua peragenda est hæc applicatio, docui hîc repetam). Rursus ex demonstratis constat dimidiam differentiam fluentium $\frac{1}{2}(M-N)$ identicam addendam uni dimidio summæ, subtrahendam ab altero. Porro si primo dimidio A C addatur C D, & subtrahatur a B C, erit $M+N=\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right)+\left(\frac{N+M}{2}\right)-$

(M

$\left(\frac{M-N}{2}\right) = (AC + CD) + (BC - CD) = AD + BD$, scilicet M major, N minor: at si primo dimidio demas C d addas secundo erit $M+N = \left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right) + \left(\frac{N+M}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right) = (AC - Cd) + (BC + Cd) = Ad + Bd$: quo facto iisdem fluentium singularum retentis puncti originis, M major convertitur in N minorem, & N minor in M majorem symbolorum etiam transmutatione: quod quidem obtinetur methodo exponentis negativi *Theorem*: VI demonstrata, in quo scilicet $M^{-1} + N^{-1} = N + M$. Verum si primo dimidio A C addas C d, & subtrahas a B C, ut sit $(AC + Cd) + (BC - Cd)$, hæc formula si identitatem terminorum servatam velis, prorsus repugnat: C d enim superimposita C A habet partem communem cum A C, atque ideo nunquam cum A C summam, quemadmodum C d diversam a B C nunquam subtractionem significare potest. Ut itaque formula verificetur, vel ponenda est $AC = BC$, sive A C negativa $= -\frac{M-N}{2}$, & B C negativa $= -\frac{N-M}{2}$, ut sit $\left(-\frac{M-N}{2}\right) + \left(-\frac{M+N}{2}\right) + \left(-\frac{N+M}{2}\right) - \left(-\frac{M+N}{2}\right) = -M - N = Bd + Ad$: vel loco C d ponenda est C D, hoc est C D negativa $= -\left(\frac{M-N}{2}\right)$; eritque

$$\left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right) + \left(\frac{N+M}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right) = N + M = Ad + Bd:$$

utroque modo recte. Et primo modo — M negativa ex *Theorem*: VIII repræsentat N in alterum originis punctum B, & — N idem est ac in alterum originis punctum A translata: igitur symbolum — M transfertur in B, & — N in A, id quod secundus modus exponente negativo —1 clare ostendit: hac tantum differentia, quod in formula prima transmutantur originis puncta primum sumpta, & cum sit $M + N = AD + BD$, erit $-M - N = Bd + Ad$: at secundo modo cum sit $M + N = AD + BD$ erit $M^{-1} + N^{-1} = Ad + Bd$, manentibus iisdem punctis originis in formula, quæ primum sumpta fuerat. Quare aperte constat, licet summa fluentium formam negativam præseferat, tamen semper positivam censendam esse, nec aliud significare, nisi inversionem punctorum originis primo sumptorum, atque ideo directionis. At

ſi ſemidifferentia ex poſitiva fiat negativa, & viceverſa, retinentur prima originis puncta, nec ulla fit inverſio ab una ad alteram plagam, quod exponentis negativi —1 ope eleganter obtinetur.

§. 23. Nunc ad ſyſtema S Y tranſeuntes, in quo fluentes homologæ a diverſis punctis enatæ per eamdem ſimul directionem procedunt, jam ſupra ſatis documus tranſitum fieri a ſyſtemate S A ad ſyſtema S Y quoties fluens terminus identicus, qui additur uni dimidio conſtanti, & ſubtrahitur ab altero, major fit ipſo dimidio conſtante, atque ideo quæ prius erat ſemidifferentia fluens identica convertitur in ſemiſummam fluentem, & quæ erat ſemiſumma utrinque diverſa conſtans convertitur in ſemidifferentiam utrinque diverſam conſtantem, & formula ſyſtematis S A convertitur in ſequentem $M+N\ SA = \left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right) + \left(\frac{N+M}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right) = M-N\ SY = \left(\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)\right) = (CD + AC) - (CD - BC) = AD - BD$ (*Fig*: 28; & fluens major $AD = M$; minor $BD = N$. Quod ſi ponatur $(CD + BC) - (CD - AC)$, hæc formula, ſi identitas ſingulorum terminorum ſervetur, repugnans eſt & abſurda quia ut diximus §. *ſuperiori*, B C ſuperimponitur C D, & A C additur neceſſario C D. Ut igitur verificetur, duplex iniri poteſt via. Primum fiat $-CD$, ut ſit $(-CD + BC) - (-CD - AC) = (Cd + BC) - Cd - AC) = Bd - Ad$: ſed in hoc caſu fluens major M tranſit a puncto originis A ad punctum originis B, & fluens minor N tranſit a puncto originis B ad punctum originis A, retentis ſingularum iiſdem valoribus primo ſumptis, fitque directionis mutatio, ideoque tanquam negativas ſe ſe offerunt. Secundo vero modo poſita $(CD + AC) - (CD - BC)$, fac $(-Cd + AC) - (-Cd - BC) = -(Cd - AC) + (Cd + BC) = -Ad + Bd$: quo iiſdem punctis originis in formula primo ſumptis retentis, tantum quæ erat a puncto originis A major poſitiva convertitur in N minorem, & quæ erat in puncto originis B minor convertitur in M majorem, mutata ſingularum directione. Utroque modo invertitur utriuſque fluentis directio, ac illarum plaga: ſed hoc ſecundo modo vitatur in formula negativum eidem ſymbolo M præfixum, quod primum ſumptum fuerat poſitivum, & converſio negativi — N in poſitivum: quibus ſymbolis M & N cum eumdem valorem, quem primum habebant perperam tribuat vetus Analyſis, miſere hallucinatur, & quod ſua natura poſitivum eſt, tamquam negativum falſo aſſumit. Fallacia hæc omnino tollitur a noſtra exponentis negativi —1 methodo. Si enim primum ſe ſe exhibeat $M-N = \left(\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)\right) =$

M

$M - N$; fac $M^{-1} - N^{-1} = \left(\frac{M^{-1} + N^{-1}}{2}\right) + \left(\frac{M^{-1} N^{-1}}{2}\right) -$
$\left(\frac{M^{-1} + N^{-1}}{2}\right) - \left(\frac{M^{-1} - N^{-1}}{2}\right) = -M + N = N - M$ eadem differentia positiva atque iisdem expressa symbolis, transmutatione fluentis M majoris in N minorem, & fluentis N minoris in M majorem. Quare universim in methodo exponentis negativi —1 quoties fluens mutat valorem, mutat etiam symbolum, quo primum arbitrio elata fuerat, & quæ erat major fit minor tam valore quam symbolo, & vice versa; ut nullus errori locus relinquatur. At in methodo coefficientis negativi mutatione signi mutatur quidem fluentium singularum valor & natura, sed cum eadem symbola primo sumpta fluentibus singulis retineantur, incaute vetus Analysis quæ erat major M positiva, falso credit etiam majorem factam — M, & contra — N quæ erat minor, supponit minorem, quando fit positiva: hinc perpetua illa fallacia positivi æqualis negativo: &c.

§. 24. Hisce explicatis ad plenam hujusce difficilis sane negotii illustrationem opportunum judico in apposita TABULA formulas generales utriusque systematis utraque methodo tam scilicet exponentis negativi, quam coefficientis negativi — 1 oculis ipsis subjicere, ut utra utri præstet re ipsa cognoscamus. Ac primum necessarium est advertere, denominatorem (1), quo divisimus formulas nostræ TABULÆ ita esse necessarium, ut ullo modo omitti nequeat, donec formulæ ita constitutæ sunt: singula enim fluens numeratoris formularum nostræ TAB. non nisi numeratorem singulæ fluentis repræsentat, in quas denominator (1) dividendus est; quam divisionem brevitatis gratia omittimus. Reducta vero singula formula ad simplicem hujusce formæ ex: gr:

$$\frac{\frac{15+\sqrt{7}}{2}}{\frac{15+\sqrt{7}}{2} + \frac{15-\sqrt{7}}{2}} + \frac{\frac{15-\sqrt{7}}{2}}{\frac{15-\sqrt{7}}{2} + \frac{15+\sqrt{7}}{2}} \text{ denominator } (1)$$

debet omnino omitti: tunc enim numeratores $\frac{15+\sqrt{7}}{2}$, $\frac{15-\sqrt{7}}{2}$ sunt vere numeratores singularum fluentium, & loco (1) succedit denominator 15. Deinde in singulis istis formulis assumo $M > N$, & $m > n$, & primæ sex pertinent ad systema S A; sex posteriores ad systema S Y. Ac primum memoria revocandum (quod ostendimus *Cap:* III) in S A, in quo fluentes sin-

gulæ a diverſis originis punctis prorumpentes obviam ſibi occurrunt, & major M conſtat ſemiſumma conſtante, & ſemidifferentia fluente eodem ſigno affectis; contra minor N conſtat ſemiſumma, & ſemidifferentia contrario ſigno affectis; ad habendam earum ſummam ſumendam eſſe utrinque ſemiſummam diverſam, & identicam ſemidifferentiam; contra vero ad obtinendam earum differentiam neceſſario ſumendam eſſe ſemiſummam identicam, ſemidifferentiam diverſam: nequit enim in lineis vera obtineri ſubtractio, niſi ad idem originis punctum referantur. Similiter in ſyſtemate SY, in quo fluentes a diverſis originis punctis enaſcentes ſemper eamdem partem verſus procedunt, & fluens major M conſtat ſemiſumma fluente & ſemidifferentia conſtante eodem ſigno affectis, diverſo ſigno affectis in fluente minori N; ad habendam earum differentiam ſumenda eſt utrinque identica ſemiſumma, ſemidifferentia diverſa; ad habendam vero ſummam ſumenda eſt ſemiſumma diverſa, identica ſemidifferentia. Quibus revocatis patet ex noſtra TABULA $3^{am}$. eamdem eſſe ac $5^{am}$.; & $4^{am}$. ac $6^{am}$., quemadmodum demonſtrat formula numerica, cui cæteræ comparantur: fierique $M^{-1} + N^{-1} = -M - N = N + M$; & $M^{-1} - N^{-1} = -M + N = N - M$: hoc eſt ſummam ſemper eſſe poſitivam, ac tantum indicare fluentium permutationem; differentiam vero ex poſitiva fieri negativam: ut docent Theorem: VIII., & IX. Cum enim quæ erat major fiat minor, in formula differentiæ ſubtrahitur major a minori, atque ideo differentia exurgit negativa. In Syſtemate vero SY formula $9^a$ eſt eadem ac $11^a$; & $10^a$ ac $12^a$: ac eſt $M^{-1} - N^{-1} = -M + N = -N + M$: $M^{-1} + N^{-1} = -M - N = -N - M$: ut docent Theorem: X, XI: eſt ſcilicet differentia ſemper poſitiva: quia facta fluentium permutatione major poſitiva fit minor negativa, & minor negativa fit major poſitiva: ideoque ſemper ſubtrahitur minor a majori poſitiva. Contra in formula ſummæ major M poſitiva convertitur in N minorem negativam, & minor N poſitiva convertitur in majorem M negativam: ergo utraque negativa, atque proinde etiam earum ſumma.

§. 25. Nunc ulterius progredientes demonſtremus ſequens

## THEOREMA XII.

Nulla fluens alterutrius ſyſtematis abſolute & in ſe conſiderata poteſt eſſe negativa.

Jam ſuperius demonſtravimus in ſyſtemate SA fluentem majorem M æqualem eſſe ſemiſummæ conſtanti ipſarum fluentium, addita ſemidifferentia fluente; & minorem N æqualem eſſe eidem ſemiſummæ detracta ſemidifferentia: in ſyſtemate vero SY M fluentem majorem æqualem ſemiſummæ fluenti, addita ſemidifferentia conſtante; N vero minorem æqualem eidem ſemiſummæ, ſubtracta ſemidifferentia. Sed repugnat ſemiſummam fieri poſſe minorem ſemidifferentia, in

in quo uno casu una ex fluentibus evadere posset negativa; ergo repugnat fluentem aliquam absolute spectatam alterutrius systematis natura sua esse & dici posse negativam. Q. E. D.

§. 26. Fluentes igitur utriusque systematis nullo affectæ signo + semper positivæ censendæ sunt, & in eodem systemate constitutæ non nisi inter se permutari possunt, ut ostendimus Theorem: VI & VII exponentis negativi — 1 præsidio. Ex quo consequitur in utroque systemate signum anceps ±, quando præfigitur alicui término, semper tacite indicare terminum aliquem antecedentem, cui addendus est vel subtrahendus terminus signo ± actu affectus, qui cum in fluentibus utriusque systematis sit minor antecedente, (utpote semidifferentia addenda vel subtrahenda semisummæ) semper dat cum suo antecedente summam vel subtractionem positivam. Quoties itaque terminus aliquis signo negativo affectus se exhibet, inditio est, hunc nunquam solitarium esse posse, sed necessario requirere terminum aliquem positivum majorem, a quo intelligatur subtrahendus, qui tamen in calculo non apparet: quemadmodum contingit in utroque systemate, quando differentia fluentium sumitur, in quo casu utrinque semisumma evanescit, quæ tamen nullo modo negligenda est. Ab hoc sane gravissimo errore Analysis communis decepta eam quantitatem tamquam absolute & in se negativam assumit, quæ signo negativo affectam se se offert, quæ tamen non nisi subtrahendam esse a majori, quæ iterum restituenda est, significat. Quare re bene explorata, & ea, quam requirit systema, fluentibus forma constituta, fluentes seorsim sumptæ semper positivæ sunt, dummodo integræ sumantur; & si aliquis terminus negativus solitarius invéniatur hic nihil aliud est, nisi pars aliqua subtrahenda a majori, ut fluens integra restituatur. Quo intellecto statim rollitur illa falsa fallax quantitatis negativæ seorsim & in se spectatæ definitio, qua asseritur *quantitatem negativam esse zero minorem*, cum nulla quantitas absolute & in se spectata dici possit negativa: & insuper in formulis secundæ dimensionis hac una animadversione a toto calculo perpetuo exturbatur imaginarium: cum signum — non quantitati natura sua negativæ intrinsece & indivise conjunctum supponendum sit, sed ab ipsa omnino sejunctum; ac non nisi subtractionem positivi minoris a positivo majori significet, atque ideo semper extra radicale ponendum: ut in TOMO II. fusius explicabitur.

§. 27. Ex hactenus dictis constat pro varia ratione, qua exponens negativus — 1 applicatur formulis superioribus summæ vel differentiæ fluentium utriusque systematis, & in coefficientem transmutatur; modo a fluente ad fluentem ejusdem systematis, a systemate modo ad systema transitum fieri, dummodo quæ tradidimus diligenter serventur. Ne tamen putes leges, quibus in formulis superioribus exponentem — 1 moderari docuimus, posse promiscue iisdem formulis in aliam formam conversis semper legitime aptari. Sæpe enim fit, ut artificia, quæ conveniunt datæ formulæ sub una forma elatæ, minime aut ægre conveniant eidem formulæ in aliam translatæ formam: ut proinde mutata formularum specie caute incedendum ne in errorem labamur, antequam artificia in primis legitima secundis applicentur. Ut exemplo rem declarem nemo ignorat esse

(15

in SA $$\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1};$$

$$\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1}:$$

& in SY $$\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{7}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{7}\right)}{1},$$

$$\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{7}\right)}{1}.$$

In hiſce tamen ultimis formulis ſi denominator ſub integra forma (1) retineatur, ut vulgo ſæpe fit, aut pejus ſi omnino omittatur, praxim communem ſequendo, in ambiguas fallaces, ac ſæpe falſas conſecutiones nos inconſulte ducit. Ac primum

cum

cum sit $\left[\dfrac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right]^{-1} =$

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)\right)^{-1}}{1} =$$

$\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}$, vetus Analysis quid novi hujusmodi inversio significet omnino ignorat, nisi a mea discat 1, (qu donec denominator erat, ut constans & integer erat sumendus) dividendum esse in duas fluentes quando transit in numeratorem: contra vero numerator in locum denominatoris translatus. Licet vero facta $\dfrac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}$

$$=\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}}{1}=$$

$\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1}$; eadem facilitate utrinque indicetur fluentium in eodem systemate permutatio: tamen formulæ

$$\left[\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right]^{-1}=\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}$$, qua

aperte ſignificatur permutatio ſyſtematis, reſpondet

$$\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{15}}{1}$$, quam ad primam

nunquam traduces, niſi ex hac cognoſcas fieri debere $\frac{\frac{\sqrt{7}}{15}}{1}=\frac{\sqrt{7}}{15.\frac{\sqrt{7}}{15}}=$

$\frac{\frac{7}{15\sqrt{7}}}{.\frac{7}{15\sqrt{7}}}=\frac{7}{7}$. In hac ultima igitur facias oportet

$$\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15}{15}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{7}}{15}+\frac{1}{2}.\frac{15}{15}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}}{1}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}+\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1}\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}-\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{7}}{15}\right)\right)^{-1}}{1}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}.\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}+\frac{1}{2}.\left(\frac{15}{\sqrt{7}}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{15}{\sqrt{7}}\right)\right)}{1}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}\right)-\left(\frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}\right)}{1}$$

=

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}\cdot\frac{7}{7}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7} - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}\cdot\frac{7}{7}\right)}{1};$$

sed $\left(\frac{15}{15}\right)^{-1}\cdot\frac{7}{7} = \frac{7}{\frac{15\cdot 7}{15}} = \frac{7}{7}$, quo artificio a denominatore constante 15 & fluente $\frac{\sqrt{7}}{15}$, transitum fecimus ad denominatorem constantem 7 & ad fluentem $\frac{15\sqrt{7}}{7}$ ut docuimus §. 24. CAP. V, ubi quid significet fractio $\frac{7}{\frac{m\cdot 7}{m}}$ ostendimus. Sumpta vero differentiæ fluentium formula SA, & facta

$$\left[\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right]^{-1} = \frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}$$

invenies $= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1}$; quæ prorsus ambigua est, & sic elata non nisi summam fluentium in eodem systemate SA significat. Hæc quæ diximus, ne longius quam par est abeamus, formulis superioribus systematis SY applicare poteris, ut intelligas qua cautione opus sit in usu artificiorum analyticorum mutata formularum specie; & quantum præstet pro varia formularum præparatione unum potius, quam alterum artificium in subsidium vocare. Cæterum in praxi ne in tractandis hujusmodi formulis in errorem impingas fac $\frac{\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)\right)^{-1}}{1} = M+N$



=

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1} = N + M,$$ quando permutationem fluentium in eodem systemate requiris. Quod si permutationem systematis velis, fac $$\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)\right)^{-1}}{1} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{15}\right)^{-1} + \frac{1}{2}}{1} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{7}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{7}\right)}{1} = M - N;$$ eadem methodo utaris oportet in transitu a systemate S Y ad S A.

§. 28. Quod tamen si velis non mutata formula & facta

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} - \cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)\right)^{-1}}{1} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)},$$ ( a qua in principio §. antecedentis non nisi permutationem denominatoris constantis in numeratorem fluentem & viceversa eruimus ) permutationem etiam systematis obtinere, fac

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)} =$$

$$\frac{15}{\left(\frac{1}{2}\cdot 15 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 15 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)} = \frac{15}{15} =$$

15

$\frac{15}{15} \cdot \frac{7}{7} = \frac{7}{7}$. Hoc tamen in istis formulis facilius invenies ex formula

$$\text{differentiæ } \frac{\left(\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{15} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{15}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{15} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{15}\right)\right)^{-1}}{1}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{15}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{15} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{15}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{15}} =$$

$\frac{15}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$. Nam quæcumque fluens solitaria unitate minor facile ex dictis convertitur in differentiam fluentium homologarum systematis S A, & unitate major in summam fluentium homologarum S Y: quæ unitate minor exponente negativo $-1$ affecta convertitur in fluentem unitate majorem, & viceversa: ergo quæcumque fluens ab eo, in quo est, systemate transit ad alterum in quo non erat, si exponente negativo afficiatur. Inversio igitur fluentis necessario permutationem systematis inducit, ex qua systematis permutatione differentia in S A, summa in S Y, transit in summam S Y, in differentiam S A fluentium homologarum. Hoc vero obtineri posse exponente negativo opportune in coefficientem translato supra docuimus: ergo in nostris formulis utraque methodo re bene explorata uti possumus. Alterutra igitur methodus, si ad valorem tantum spectetur, adhiberi posset: sed inter utramque ea intercedit differentia, quod exponens negativus $-1$ indicat systema in quo initio est fluens, & a quo transgressis ejus limitibus digrediatur oportet: at coefficiens negativus, reductione facta, indicat systema ad quod fluxio transitum fecit, & in quo persistit: atque ideo ostendit transitum jam factum a systemate ad systema ab exponente negativo alterius systematis fluenti suffixo indicatum. Porro toties inversio fractionis necessario sumenda erit, iisdem manentibus numeratore, & denominatore fractionem propositam constituentibus, quoties libuerit aut oportuerit denominatorem, qui ex §. 24. *Cap:* V. semper constans sumendus est, in fluentem convertere.

§. 29. Nunc ut Theorematum superiorum necessitas re ipsa cognoscatur, sequens Problema solutum damus.

## PROBLEMA.

Data semisumma terminorum constantium, qua singula fluens constat, atque ideo in utraque fluente diversa est, invenire singulas fluentes ac systema.

Problema hoc maxime indeterminatum eſt: cum nihil aliud habeatur niſi dimidium illius denominatoris cujuſcumque dati ſingulis fluentibus commune ſed diverſum, & cujus duplum ſemper unitati æquatur: terminus vero fluens identicus additus uni, ab altero ſubtractus, a quo tantum fluentes naturam fluentium aſſumunt, penitus ignoratur: atque ideo arbitrio noſtro relinquitur eligendus. Itaque ſi terminus hic fluens per 2 diviſus ſit fractio unitate minor, additus primo dimidio conſtanti, & ſubtractus a ſecundo, vel viceverſa conſtituit duas fluentes poſitivas, quarum ſumma æquatur duplo termino conſtanti ſingularum fluentium, ſive unitati, atque ideo conſtans, & ſyſtema erit S A. Dato igitur ex: gr: $\frac{15}{15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}$, erit

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}{1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{15}\right)}=M+N.$$

Quod ſi terminus fluens ſit $\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}$, erit $\frac{15}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}=$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}\right)}{1}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}\right)}-$$

$(\frac{1}{2}$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{15}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}\right)}=M-N;$$

& translatio fit ad ſyſtema S Y, & licet $\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}$ eamdem ſummam conſtituant, tamen fluentes invicem ſubtrahendæ ſunt & differentiam conſtituunt. Itaque in primo caſu ſic diſponatur formula $M+N=$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot dif.\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot dif.\right)}{1}$ : in ſecundo $M-N=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-.-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}:sum.\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot sum.\right)}{1}.$$

Quare antequam ſtatuatur terminus fluens, nequit recte determinari utrum hæc duorum terminorum conſtantium conjunctio ſummam fluentium vel differentiam, ſyſtema S A, vel S Y deſignet. Quinimmo cum hic fluens terminus a zero uſque ad infinitum excurrere poſſit, Problema hoc, quod vulgo abſolute determinatum creditur, infinities magis indeterminatum eſt, quam ſi terminus fluens hinc inde ſubſtitueretur, ut innui *Cap:* I §. 33. Ab hoc enim Problemate ambo ſyſtemata comprehenduntur ea lege, ut ex fluxu continuo termini fluentis genito uno ſyſtemate alterum repugnans & abſurdum ſit: ut docui in P. I Lib: I. Cap. III §. *61*, & ſeqq. nec non Lib. II. Cap. V §. 2; & ſeqq., in qua docui imaginarium, in quod errore methodi ac limitum vulgo impingitur neceſſitatem alterius ſyſtematis vere exiſtentis ac realis ſignificare.

§. 30. Si loco $\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}$ in formulis ſuperioribus poneretur $-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}$ (hoc eſt propoſita fuiſſet fractio $-\frac{15}{15}$) formulæ ſuperiores fierent in S A $\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\,dif.\right)+\left(-\frac{1}{1}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\,dif.\right)$: in S Y

$\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{sum.}\right)-\left(+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{sum.}\right)$; quæ utraque si dividatur per positivum 1 fit necessario negativa. Sed ex nostra Theoria constat summam numeratorum fluentium in S A, differentiam in S Y æquari & quoad valorem, & quoad positionem denominatori integro ( sive quod idem est duas partes, in quas dividitur denominator, exhibere singulos numeratores fluentium ); ergo patet loco denominatoris 1 in hoc casu ponendum esse $-1$ : quo facto, quæ videbantur negativæ sunt vere positivæ: &

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\cdot\textit{dif.}\right)+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\cdot\textit{dif.}\right)}{-1}=-M-N=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}-\frac{1}{2}\ \textit{dif.}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{dif.}\right)}{1}=M+N: \&$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{sum.}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{sum.}\right)}{-1}=-M-(-N)=-$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{sum.}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}+\frac{1}{2}\ \textit{sum.}\right)}{1}=-N+M:$$

ut docent Theorem: VIII, & X: quibus non nisi fluentium permutatio ostenditur. Vide igitur quam incaute ignoratione nostræ Theoriæ in tractandis suis Calculis se gerat vulgata methodus, quæ quoties se se offert denominator $+1$, toties tamquam inutilem ac supervacaneum omnino negligit, cum tamen licet positivum quantum in Calculum influat supra ostenderimus: quando vero in negativum convertendus est, hujusce omissione negativam eam formulam falso credit, quæ vere positiva est: hinc passim incidit in positivum æquale negativo, vel contra.

§. 31. Alia Problemata, quæ ex proposito tantum termino fluente deduci possent in formulis etiam exponente negativo $-1$ affectis, omitto, cum illa jam soluta dederim *Cap*: V, & facile possint formulis exponente $-1$ præditis applicari; illud tantum addo hasce prorsus novas, quas circa exponentem negativum $-1$ eruimus veritates, ad illud maxime generale ac necessarium Corollarium nos veluti manu ducere, quod scilicet ab uno exponente $\pm 1$ positivo

vo, tamquam a prima ac generali methodo, pendet tam diversa systematum natura, quam fluentium homologarum in eodem systemate permutatio, nec non regulæ, quibus necessario uti oportet ad signa $\pm$ singulis terminis systematis præfigenda & mutanda. Primum enim horum omnium fundamentum in formula ex: gr: $\left(\dfrac{\left(\dfrac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\dfrac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\dfrac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\dfrac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right)^{\pm 1}$ situm esse, prout requiritur summa fluentium constans aut differentia, superioribus Propositionibus evidentissime demonstravimus. Porro ab hac formula numeris expressa, quæ hoc evidenti ac necessario ordine concinnata conditiones alterutrius systematis palam exhibet, aliarum formularum fluentium conformatio necessario pendet, quæ nimis generales cum sint vel nullam vel certe non ita explicitas conditiones a systemate requisitas complectuntur: hoc est vel nulla data, vel certe non omnia præseferunt. Nam si singulæ fluentes homologæ symbolis tantum M, N omnino arbitrio sumptis exprimantur, quisque videt ab hisce omnimode ignotis nihil omnino erui posse, nisi cum minus generalibus, & aliqua conditione obstrictis conferantur. Nos igitur hæc nimis abstracta symbola, ac nullis moderata legibus in P. I$^a$. hujusce Operis, & in primis Capit. hujusce formulæ $\dfrac{m \pm n}{m \pm n}$ comparavimus, ut ex earum constante summa, vel differentia prima alterutrius systematis conditio necessaria semper ob oculos versaretur. Verum cum singula $m$, & $n$ & individua sit & per omnes partes ignota, maxima cautione utendum fuit, ne limites systematis, & aliæ secundariæ systematis conditiones minus cognitæ in errorem nos inducerent, maxime quando aximetris numeris sunt applicandæ, quibus omnino impares sunt, nisi in nostras ultimas a TAB: exhibitas formas conformarentur. Necesse igitur erat hasce ultimas tandem effingere ac præparare formulas, quarum ope conditionibus omnibus ac singulis adimpletis, quæ in utroque systemate fluentibus necessariæ sunt, totum tandem negotium tutius ac plenius absolveretur.

§. 32. Quinimmo quoties aliqua conditio addenda est, quæ cum conditionibus alterutrius systematis jam assumpti repugnet conciliari, ac novum systema requirat: sublata prima formularum conformatione eas sibi necesse est novis artificiis (eodem manente valore) novas concinnare formulas, quæ novis conditionibus novi assumpti systematis ad amussim respondeant. Hoc unum est Analyseos geometricæ munus (magnum sane atque arduum munus), ut & ad diversa Loca geometrica invenienda, & ad diversas ejusdem Loci novis accedentibus punctis datis affectiones declarandas par esse possit. Quod totum cum penitus a vulgata me-

methodo neglectum atque ignoratum fuerit, videat sanus quisque quam nunc Analysim habemus, & si quæ ad Scientiæ totius reformationem nunc trado præcepta sint omnino (ut fit) negligenda. Quod cum ita sit ab hac tandem ultima formularum fluentium singularum nostræ TAB: conformatione omnibus numeris, (dum in alterutro systemate consistimus) absoluta, ut & naturam fluentium utriusque systematis fluentes ipsæ non amittant, & quæ sunt unius systematis cum fluentibus alterius non confundantur, deducendæ erant leges, quibus formulæ nimis abstractæ & generales moderandæ essent. Sed hæc ultima formularum conformatio tota ab exponente $\pm 1$ originem primam ducit; ergo regulæ ac leges tam signorum $\pm$ terminis præfigendorum, quam inversionis ac directionis fluentium, aliarumque affectionum ab uno exponente $\pm 1$ vim suam atque œconomiam mutantur.

§: 33. Quamobrem ex hactenus dictis non solum quæ & quantæ ab exponente negativo $-1$ in progressu Operis in totam Analysim redundare possint utilitates ex hisce, quæ nunc eruimus, facile est ominari; sed illud etiam luce clarius evinci, non posse scilicet Analysim, quam nunc habemus, a difficultatibus atque erroribus, quibus misere vexatur, liberari, & ad meliorem ac ampliorem formam traduci, nisi hujusce nostræ novæ Theoriæ ope ab una tantum ac individua formula $1^0$ enascentis nova omnibus numeris in integrum absoluta instituatur reformatio. Quid enim de vulgata Analysi, hac exorta luce, sperandum sit facile est judicare, dummodo intelligatur hanc hisce omnibus ac singulis, quæ hactenus invenimus, subsidiis destitutam prorsus in id unum intentam esse, ut ex symbolorum, quæ omnimode ignota sumpsit, varia ac fortuita nullis adstricta legibus admixtione, dispositione, atque transpositione eas sibi formulas comparet, quas cæcus calculorum ductus forte fortuna offert, quin quid sibi velint, cognoscat, & utrum possint, & quando, & quo modo possint affectionibus geometricis rite applicari. Qui enim fieri potest (ut pauca compendio attingam illi prorsus impervia) ut symbolis $x$, $y$, quibus utitur tamquam numeris integris assequatur differentiam, quæ intercedit maximam inter $x + y$, $x - y$ systematis S A & $x + y$, $x - y$ systematis S Y? Rursus nullo modo assequi poterit cur & quo modo tam $x + y$, quam $- x - y$, semper positivæ sint; at $x - y$, & $y - x$ alterutra positiva, alterutra negativa in S A; contra vero in S Y $x + y$, $- x - y$ prima positiva, secunda negativa; at $x - y$, $- x + y$ semper positivæ sint sumendæ: cum ipsa nullo, nisi mutatione signorum, aut methodo transpositionis ab una ad alteram signi $=$ partem, qua maxime abutitur, indicio positivum in negativum conversum & viceversa sanciatur. Theoria vero exponentis negativi $-1$ prorsus illi impervia sit necesse est, quippe quæ fluentes $x$, $y$ eo modo, quo constantes & integras, docet tractandas: ex qua doctrina erit $x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy}$ a doctrina nostræ Theoriæ (ut ostendimus) longe aliena: Tandem (ne longius abeam) suis ipsa viribus tantum nixa legitimum transitum ab

ex-

exponente negativo —I ad coefficientem, & viceversa, nunquam prospere obtinere poterit; nec quid sibi velit directum æquale inverso, positivum æquale negativo revera assequi & quomodo lineis geometricis rite possit aptari. In quas tamen formulas sæpe ac sæpius rapitur annuente omnium consensu vetus Analysis, quæ vulgo dicitur sublimior, cui nescio qua peculiari prærogativa (ni tenebris, quibus formulæ calculi sublimioris operosiores & magis involutæ offunduntur, tribuatur) conceditur quod Analysi, quæ dicitur finita, omnino interdicitur. Cujus rei, quam dico, exempla ex recentioribus magni nominis Analystis excerpere & in medium hîc proferre & longum esset, & non sine magna invidia. Cautius igitur & utilius erit iter iam incæptum urgere, ut ex hisce, quæ progrediendo necessario nexu & ordine profluunt veritates, quæ a veritate aliena unanimi consensu iam recepta foventur, sensim & tacite repudientur.

§. 34. Illud tandem maxime necessarium, antequam huic Capiti finem imponam, brevi advertas velim, quod scilicet ex necessaria harum formularum utriusque systematis, quæ in TAB: exhibentur, conformatione ad obtinendum tertium punctum datum medium docemur terminos constantes a fluentibus invicem segregari: sumpta enim in utroque systemate fluentium summa evanescit differentia, & contra differentia sumpta evanescit summa. Quinimmo in singulis fluentibus terminum constantem a fluente, cujuscumque naturæ sint, licet etiam exponente negativo —I afficiantur, invicem separari, & nonnisi additione vel subtractione cum fluente consociari: ac proinde fluentes homologæ ita sunt conformatæ, ut si etiam singulæ ad aliquam potestatem eleventur, termini tamen earum medii inter primum & secundum, qui seorsim sumpti, evoluta iam potestate, oriuntur, utpote contrario signo affecti, utrinque omnino omittendi sunt, instituta inter ipsas necessaria comparatione, ut in T. II palam fiet. Quare novus præter cæteros, quos innuimus, detegitur error communis Analyseos omnium receptus consensu, ob quem universim statuitur terminos omnes sub eodem communi exponente —I tamquam necessario vinculo continendos esse, nec posse in plures terminos a se invicem disjunctos eodem exponente —I affectos dispertiri. Hinc data ex: gr: summa fluentium S A $\left\{\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right\}^{-1}$

si methodum communem audias, dabit tantum

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-7}{2}\right)+\left(\frac{15+7}{2}\right)}{\left(\frac{15-7}{2}\right)+\left(\frac{15+7}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+7}{2}\right)-\left(\frac{15-7}{2}\right)}{\left(\frac{15+7}{2}\right)+\left(\frac{15-7}{2}\right)}\right\}\right\}^{-1}}{1},$$



quo-

quo conſtituto interdicitur modus, quo hujuſmodi functio in duas fluentes homologas diſpertiri poſſit, & vel ad fluentium permutationem obtinendam, vel ad ſuum ſyſtema S Y, ad quod vere pertinet transferri, & propriæ geometricæ conſtructioni rite aptari, quemadmodum ſupra fieri poſſe demonſtravimus. Malum hoc per ſe grave in hiſce linearibus æquationibus quam graviori damno influat ad ulteriorum æquationum Theoriam penitus labefactandam, quando de æquationibus ordinum ſuperiorum, & de methodo Newtoniana binomii evolvendi paſſim uſurpata agemus, evidentiſſime demonſtrabitur: hîc interim hoc innuiſſe ſufficiat.



# T A B U L A

In Systemate S A

**I.ª**

1.ª $M+N = \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{N+M}{2}\right)-\left(\frac{M-N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)a+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = (AC+CD)+(BC-CD) = AD+BD$

2.ª $M-N = \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{N+M}{2}\right)-\left(\frac{M-N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)a-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a-\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = (AC+CD)-(BC-CD) = (AC+CD)-(AC-Cd) = CD+Cd$

**II.ª**

3.ª $M^{-1}+N^{-1} = \left(\left(\frac{M^{-1}+N^{-1}}{2}\right)+\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{N^{-1}+M^{-1}}{2}\right)-\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}}\right)\right)a+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^{-1}+m^{-1}}{n^{-1}+m^{-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a}{1}$

*Fig. 27.*

4.ª $M^{-1}-N^{-1} = \left(\left(\frac{M^{-1}+N^{-1}}{2}\right)+\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{N^{-1}+M^{-1}}{2}\right)-\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}}\right)\right)a-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^{-1}+m^{-1}}{n^{-1}+m^{-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}+n^{-1}}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a-\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a}{1}$

**= III.ª**

5.ª $-M-N = \left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)+\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{-N-M}{2}\right)-\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-n}{-m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m-n}\right)\right)a+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-n-m}{-n-m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m-n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = N+M = (AC-Cd)+(BC+Cd) = Ad+Bd$

6.ª $-M+N = \left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)+\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{-N-M}{2}\right)-\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-n}{-m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m-n}\right)\right)a-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-n-m}{-n-m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m-n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a-\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(\frac{15+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{15-\sqrt{7}}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = N-M = (AC-Cd)-(BC+Cd) = (AC-Cd)-(AC+CD) = -Cd-CD$

In Systemate S Y

**IV.ª**

7.ª $M-N = \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{M+N}{2}\right)-\left(\frac{M-N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)a-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a-\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = (CD+AC)-(CD-CB) = AD-BD = AC+CB = AB$

8.ª $M+N = \left(\left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{M+N}{2}\right)-\left(\frac{M-N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)a+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = (CD+AC)+(CD-CB) = (CD+AC)+(Cd-AC) = AD+Ad$

**V.ª**

9.ª $M^{-1}-N^{-1} = \left(\left(\frac{M^{-1}+N^{-1}}{2}\right)+\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{M^{-1}+N^{-1}}{2}\right)-\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)\right)a-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a-\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a}{1}$

*Fig. 28.*

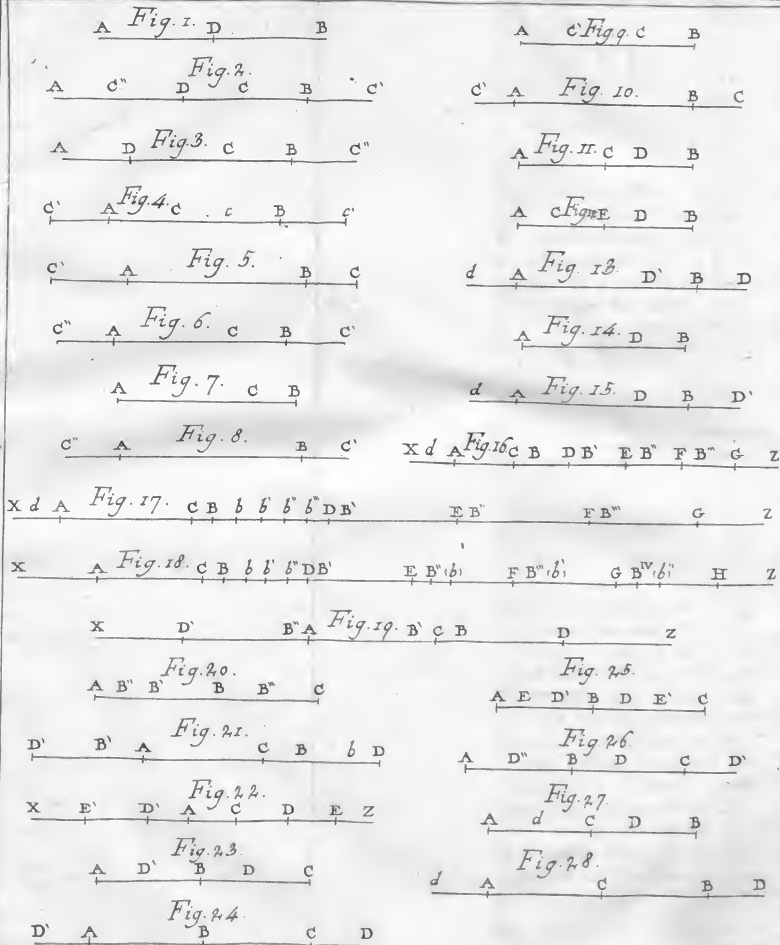
10.ª $M^{-1}+N^{-1} = \left(\left(\frac{M^{-1}+N^{-1}}{2}\right)+\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{M^{-1}+N^{-1}}{2}\right)-\left(\frac{M^{-1}-N^{-1}}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)\right)a+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m^{-1}-n^{-1}}{m^{-1}-n^{-1}}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)^{-1}}\right\}\right\}a}{1}$

**= VI.ª**

11.ª $-M+N = \left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)+\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)-\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-n}{-m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m+n}\right)\right)a-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-n}{-m+n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m+n}\right)\right)a}{1} = \frac{-\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a+\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = -N+M = -(Cd-AC)+(Cd+BC) = -Ad+Bd = BA$

12.ª $-M-N = \left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)+\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)-\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-n}{-m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m+n}\right)\right)a+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-n}{-m+n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-m+n}{-m+n}\right)\right)a}{1} = \frac{\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a+\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)+\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}{\left(\frac{15\sqrt{7}+7}{2}\right)-\left(\frac{15\sqrt{7}-7}{2}\right)}\right\}\right\}a}{1} = -N-M = -(Cd-AC)-(CD+AC) = -Ad-AD$

$$12.^{\circ}\ -M-N=\left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)+\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{-M-N}{2}\right)-\left(\frac{-M+N}{2}\right)\right)=\left(\tfrac{1}{2}\left(\right.\right.$$




Ant. Buttafogo inc.



# CAPUT VII.

*De legitima fluentium abstractarum ad protonumerum applicatione.*

§. 1. Donec fluentes sub illis, quas proprium requirit Systema, efferuntur formulis, ac suo protonumero applicantur, nullus de earum natura ac de modo quo tractandæ sunt, per ea quæ superioribus Capitibus demonstravimus, ambigendi locus relinquitur. Verum sæpe fit, ut formulæ ad ultimam, ut ajunt, simplicitatem reductæ non nisi valorem peculiarem, quo in casu proposito afficiuntur, exhibeant: qua reductione fit, ut nullum certum neque de earum natura neque de earum specie, ignorato protonumero, judicium ferri possit; quapropter quædam hîc præcepta maxime necessaria tradenda sunt, ut peculiaribus fluentium valoribus propositis universim noscamus quamnam naturam suscipere possint, quamnam respuant, & quomodo legitimus ab una natura ad alteram transitus obtineri possit. Quod totum hoc sane difficile & absolute necessarium cum Methodus nota de valore tantum peculiari formularum sollicita prorsus neglexerit & ignoraverit; quid mirum si omni prorsus destituta subsidio, quo numeri abstracti ad geometrica rite fieri possit applicatio, in hac applicatione obeunda tot ac tantis undique difficultatibus se implicaverit, ut nullam, ac quod deterius est, ex omni parte falsam potius Analysim geometricam sibi confecerit? qua duce, cui uni cæco quodam ductu fidit, in maximos errores hoc instrumento nec cognoscendos unquam neque tollendos misere prolapsa fuerit.

§. 2. Ut igitur nos illud unum ad hoc in quod tendimus, necessarium, jam inceptum iter qua melius ratione possumus sensim ac successive sternamus, lineam A B (Tab. III. *Fig.* 1.) integram duobus tantum punctis A & B datis definitam iterum nobis proponimus: hæc absolute & in se tantum considerata unitatem geometricam primæ dimensionis repræsentet oportet, quæ est sui ipsius mensura: quicquid enim est aut esse potest, cum se ipso tantum comparatum, est id quod est: quod donec terminus comparationis est, est necessario unitas, cui cæteræ partes comparari quidem possunt, ipsum vero nemini comparari potest. Si itaque mente concipiamus in hac dimensione punctum aliquod D nulla alia conditione moderatum, nisi quod semper inter hæc duo extrema data puncta A & B in suo fluxu consistat, nihil aliud ex hac una conditione erui potest, nisi quod hujusmodi fluentes partes A D, B D totam unitatem A B exhauriunt, ac singula est portio minor hac unitate, hoc est fractio unitate comparationis minor. Hinc statim originem ducit illud systema, quod S A appellavimus, & linea A B nullo alio numero abstracto, quam (1) exprimi potest,

test, cum sit primus & unus comparationis terminus datus, ad quem cæteræ duæ fluentes necessario referuntur. In hoc igitur systemate vocata (ut usuvenit) una fluente ($f$), & altera ($g$), hallucinaretur ille, qui aut singulas, aut alterutram unitate majorem, vel constantem statueret: in primo enim casu punctum fluens D extra puncta A, B procedens necessariam systematis conditionem perturbaret: & in secundo fluentes invicem nulla lege augeri aut minui possent manente fixo puncto D & fluentibus punctis extremis A, B, & ipsa A B fluentis naturam indueret a peculiaribus valoribus ($f$), ($g$) continuo determinata. Itaque si ponatur ex: gr: $AD = \frac{3}{7}$ ipsius A B, erit $BD = \frac{4}{7}$ ejusdem A B: ac recte $AD = \frac{3}{7} . AB$, $BD = \frac{4}{7} . BA$. Sed si velis ipsam A B numero abstracto exhibere; facile ex dictis intelliges nullo alio numero quam (1) efferri posse: erit igitur symbolis analyticis expressa fluens $AD = \frac{3}{7} . AB = \frac{3}{7} . (1)$, $BD = \frac{4}{7}\ BA = \frac{4}{7} . (1)$

§. 3. Verum si una ex fluentibus ex: gr: $AD = \frac{3}{7} . AB$ (*Fig.* 2.) ponatur constans, A B necessario fit fluens, cum sit $AB = \frac{7}{3} . AD$, & coefficiens $\frac{7}{3}$ sit fluens: ergo A B quæ unitatem ac protonumerum repræsentabat fit fluens, & A D quæ erat fluens in unitatem sive in protonumerum convertitur. Punctum igitur D fit constans, & B fluens, quod cum hinc vel inde extra puncta data A, D vagetur, statim mutat naturam systematis facto transitu a summa fluentium constanti ad differentiam, quæ semper æqualis est uni A D: quæ est conditio necessaria systematis S Y: eritque $AB = AD + DB = AD + \frac{4}{7} . BA = AD + \frac{4}{7} . \frac{7}{3} . AD = \left(1 + \frac{4}{3}\right) AD = \frac{7}{7-4} . AD = \frac{7}{7-4} . (1)$ fluens major abstracta, quæ nequit esse minor $AD = 1$, cum sit $= \left(1 + \frac{4}{7-4}\right) AD = \left(1 + \frac{0}{7-0}\right) AD$ in limite minimo. Altera vero B. D. quæ erat fluens etiam in primo systemate,

te, & æqualis $\frac{4}{7}$. B A, fit $= \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{3}$ A D $= \frac{4}{3}$ A D $= \frac{4}{7-4}$. A D, ejusdem valoris ac in primo casu, hac tamen differentia, quod in S A punctum B erat constans, D fluens, hîc punctum B fit fluens, D constans: qua una mutatione mutatur fluentis directio, & quæ in primo casu a puncto constanti B prorumpens fluebat versus A, in hoc novo systemate ex puncto constanti D necessario in contrariam directionem D B procedat oportet. Punctum igitur fluens intra vel extra puncta fixa, & directio unius fluentis homologæ respectu alterius homologæ pendet tantum a natura systematis in quod transferimur, mutatione puncti fluentis in constans, & constantis in fluens, quin ulla in signis ($\pm$) fluenti præfixis mutatio fiat, licet si directio fluentis in uno systemate comparetur cum directione fluentis ejusdem valoris in altero systemate sit prorsus opposita, ita ut facta comparatione ejusdem fluentis in uno systemate ad eamdem in altero systemate collocatam, hæc sit negativa respectu primæ positive sumptæ, vel positiva si prima sumatur negativa, prout hujusmodi comparatio in uno potius quam in altero systemate primum sumatur.

§. 4. In Systemate S A quoties protonumerus fit fluens & alterutra ex homologis constans sive protonumerus, toties a systemate S A ad systema S Y transitus necessario fit: protonumerus enim in fluentem conversus semper major est alterutra fluente in constantem mutata. At in systemate S Y si fiat major fluens, constans punctum medium fit fluens & transitus fit a systemate S Y ad systema S A: sed si fiat fluens minor constans, punctum originis fluentis majoris fit fluens & transitus fit a systemate S Y ad systema S Y ejusdem naturæ sed protonumeri diversi. Porro manente eodem valore varie afficiendæ sunt formulæ analyticæ, ut singulis istis affectionibus geometricis secundariis seorsim respondeant ne in errorem labamur: quod quo modo fiat sequens exemplum declarabit. Sumpta igitur linea A B (*Fig.* 1.) duobus punctis fixis A & B terminata si concipiatur inter hæc data puncta punctum D fluens, statim determinata est natura & species systematis S A protonumeri A B. Sit ex: gr: fluens A D $= \frac{3}{10}$. A B, erit sua homologa B D $= \frac{7}{10}$. B A. Sed quoniam A D $= \frac{3}{10}$. A B, erit A B $= \frac{10}{3}$. A D (*Fig.* 2.) quo facto statim translati sumus ad systema S Y protonumeri A D, fluente puncto B & A B fit fluens major, D B minor. Erit itaque A B $= \frac{10}{3}$. A D $= \frac{10}{10-7}$ A D: D B vero, quæ erat $= \frac{7}{10}$. A B, substitutione protonumeri A D fit D B $= \frac{7}{10}$. A B $= \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{3}$ A D $= \frac{7}{3}$ A D $= \frac{7}{10-7}$. A D ejus-

ejusdem valoris ac in primo casu, sed formæ toto cœlo diversæ. At si sumatur altera $BD = \frac{7}{10} AB$, & fiat $AB = \frac{10}{7} . BD$ transferimur quidem ad SY sed protonumeri diversi hoc est BD (*Fig.* 3.), & fluente A, fit $BA = BD + DA$ fluens major, DA minor: & forma fluentis majoris $BA = BD + DA = BD + \frac{3}{10} . AB = BD + \frac{3}{10} . \frac{10}{7} . BD = BD + \frac{3}{7} . BD = \frac{10}{7} BD = \frac{10}{10-3} . BD = \left(1 + \frac{3}{10-3}\right) BD$, & minor $AD = \frac{3}{10-3}$; BD ejusdem valoris ac in primo casu: est enim $AD = \frac{3}{7} . BD = \frac{3}{7} . \frac{7}{10} BA = \frac{3}{10} BA$. Qui tamen in hoc casu identitate valoris deceptus illas formas istis fluentibus aptaret, quas in SA invenit, ex dictis constat quam longe a veritate abduceretur. Hac una enim peracta operatione mutatur systematis & fluentium natura.

§. 5. Quod si in data AB punctum fluens D (*Fig.* 4.) hinc vel inde extra puncta data A, B initio positum concipiatur, statim primum quod se offert systema, est systema SY. Sit ex: gr: fluens major $AD = \frac{10}{3} AB = \frac{10}{10-7} . AB = \left(1 + \frac{7}{10-7}\right) AB$, ac proinde fluens minor BD erit $= \frac{7}{10-7} AB$. Sed si ex $AD = \frac{10}{3} AB$ eruatur $AB = \frac{3}{10} AD$: (*Fig.* 5.) AB fit fluens fluente puncto B, & AD quæ erat fluens fit constans sive protonumerus, immobili manente puncto D, & transitus fit a systemate SY protonumeri AB ad systema SA protonumeri AD: & fluens $AB = \frac{3}{10} AD = \frac{3}{3+7} AD$; & $BD = \frac{7}{3} AB = \frac{7}{3} . \frac{3}{10} AD = \frac{7}{10} . DA = \frac{7}{7+3} DA$; sumpta vero $BD = \frac{7}{3} . AB$ exhibet $BA = \frac{3}{7} . BD$, & BA fit fluens (*Fig.* 6.) DB protonumerus, firmato puncto D, fluente puncto A, quod si extra puncta D, B fluat, se se exhibet systema quidem SY sed protonumeri DB, fluentis majoris DA, mino-

noris B A: quarum singularum formulæ retentis primis valoribus erunt major $DA = DB + BA = DB + \frac{3}{7} \cdot DB = \frac{10}{10-3} DB = \left(1 + \frac{3}{10-3}\right) DB$, minor $BA = \frac{3}{10-3} DB$: quod verum est cum sit, $\frac{3}{7} DB = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} AB$: at si D A' sit minor D B, transitus fit rursus a systemate S Y ad S A. Quod si in data A B (*Fig.* 7.) concipiatur punctum D fluentis A D vel B D coincidere cum puncto dato B, vel A tunc una ex fluentibus fit *zero* altera = A B, quæ est maxima in S A, minima in S Y: atque ideo in hoc casu sumus tam in limite S A quam in limite S Y: igitur in primo casu maxima $AD =$ ex: gr: $AB - \frac{o}{10+o} \cdot AB$, & in casibus mediis $= AB - \frac{3}{7+3} AB = \frac{7}{7+3} \cdot AB$ & sua homologa $\frac{3}{3+7} BA$. In secundo minima $AD = AB + \frac{o}{10-o} \cdot AB$ & in casibus mediis $= \left(1 + \frac{3}{13-3}\right) AB$. Hæc fluens maxima limitis S A si comparetur cum fluente minima S Y erit $AD = \left(1 - \frac{o}{10+o}\right) AB = \left(1 + \frac{o}{10-o}\right) AB$, & in casibus mediis $AD = \left(1 - \frac{3}{7+3}\right) AB = \left(1 + \frac{3}{13-3}\right) AB$: quibus nihil aliud significatur, nisi quod in S A ad habendam unam ex fluentibus subtrahenda est homologa a protonumero, at in S Y ad habendam fluentem majorem addenda est protonumero fluens minor. Hinc deducitur signum (—) veram tantum subtractionem significare, signum (+) in secunda veram additionem indicare, ita ut in hac nostra Theoria omnis tollatur ambiguitas hujusce signi (—) quod promiscue in methodo vulgari ad significandam etiam quantitatem abstractam in origine negativam perperam adhibetur. Quibus illustrantur atque confirmantur quæ diximus in Capitibus superioribus.

§. 6. Atque præcipue illud quod diximus CAP. I., in formulis scilicet unam tantum quantitatem geometricam individuam reperiri, quæ tamquam communis mensura unitatem repræsentat, quam protonumerum appellavimus, quæ sua natura dividitur in duas fluentes quarum complexus minor vel major protonumero ipso alterutrum systema constituit: ac proinde ne ullus ambigendi locus relinquatur, necesse est protonumerum hunc in formulis analyticis symbolo ali-

quo

quo constanti indicare ut oculis ipsis pateat, quænam in formulis sit quantitas geometrica, & quænam sit fractio numerica sive coefficiens protonumero applicatus, a quo tantum fluxus origo repetenda est. Hic protonumerus, ni aliqua peculiaris conditio adsit, arbitrio sumi potest, a quo tantum determinatur species systematis: natura vero systematis a varia forma, quam suscipere possunt coefficientes fluentium homologarum, omnino pendet. Itaque si ex: gr: fiat

$$1.^a \ \frac{1}{1}.AB = \frac{1}{2}.(2AB) = \frac{1}{3}(3AB) = \frac{1}{4}(4AB) \ldots = \frac{1}{\infty}(\infty AB): \text{ vel}$$

$$2.^a \ \frac{1}{1}.AB = 2\left(\frac{AB}{2}\right) = 3\left(\frac{AB}{3}\right) = 4\left(\frac{AB}{4}\right) \ldots = \infty \left(\frac{AB}{\infty}\right)$$

primus terminus utriusque seriei repræsentabit protonumerum sive quantitatem geometricam communem cæterarum mensuram, quæ in duas fluentes homologas systematis tam S A quam S Y dividi potest: termini vero subsequentes, mutatione protonumeri unam tantum ex fluentibus homologis exhibent, cui ad systematis complementum invenienda est altera fluens homologa, atque utræque ea forma præditæ quam requirit systema cui aptari possunt, ut superius docuimus. Advertas tamen fluentes superiores licet eodem semper valore A B sint singulæ æquales, tamen naturam sui respectivi protonumeri, cui comparantur, assumant necesse est, cum non sint nisi portiones majores vel minores protonumero ipso.

§. 7. Quod vero maxime interest advertere illud est, quod quæcumque quantitas geometrica linearis data, quam diximus A B, ad infinita systemata tam S A quam S Y singillatim aptari potest, dummodo ille protonumerus eligatur, qui rite cum valore assumptæ quantitatis geometricæ conciliari possit. Cum enim in serie 1ª. A B vel sit ipsa protonumerus, vel sit fluens minor protonumero, semper pertinere poterit ad aliquod systema S A ex infinitis seriei, vel fluentem minorem repræsentare poterit alicujus systematis S Y a serie eadem 1.ª comprehensi. Verum in serie 2.ª poterit repræsentare tam majorem quam minorem fluentem unius systematis ex infinitis S Y hujusce seriei. Et sane ut exemplum ab utroque limite sumamus, si fiat ex: gr: $AB = M = \frac{1}{\infty}.(\infty AB)$ $= \frac{1}{1+(\infty-1)}.(\infty AB)$ erit A B una ex fluentibus homologis S A protonumeri ($\infty$ A B), cui respondet sua homologa $N = \frac{(\infty-1)}{(\infty-1)+1}(\infty AB)$, earumque summa $M + N = \frac{1}{1+(\infty-1)}(\infty AB) + \frac{(\infty-1)}{(\infty-1)+1}(\infty AB)$ $= (\infty AB)$ protonumero. Verum si fiat $AB = M = \frac{1}{\infty}.(\infty AB)$ $=$

$= \frac{1}{(\infty+1)-1}(\infty\, AB)$, erit AB fluens minor SY protonumeri $(\infty\, AB)$, & sua homologa $N = \frac{(\infty+1)}{(\infty+1)-1}\cdot(\infty\, AB)$; earumque differentia $N-M = \frac{\infty+1}{(\infty+1)-1}\cdot(\infty\, AB) - \frac{1}{(\infty+1)-1}\cdot(\infty\, AB) = \infty\, AB$ protonumero. Contra vero si ponatur $AB = M = \infty\cdot\frac{AB}{\infty} = \frac{\infty}{\infty-(\infty-1)}\cdot\frac{AB}{\infty}$, fit AB fluens major systematis SY protonumeri $\frac{AB}{\infty}$, & sua homologa minor $N = \frac{(\infty-1)}{\infty-(\infty-1)}\cdot\frac{AB}{\infty}$, & earum differentia $M-N = \left(\frac{\infty}{\infty-(\infty-1)} - \frac{(\infty-1)}{\infty-(\infty-1)}\right)\frac{AB}{\infty} = \frac{AB}{\infty}$ protonumero. Vel facta $AB = M = \infty\cdot\frac{AB}{\infty} = \frac{\infty}{(\infty+1)-\infty}\cdot\frac{AB}{\infty}$ convertitur in fluentem minorem ejusdem systematis, cui respondet homologa major $N = (\frac{(\infty+1)}{\infty+1)-\infty}\cdot\frac{AB}{\infty}$, & earum differentia $N-M = \left(\frac{(\infty+1)}{(\infty+1)-\infty} - \frac{\infty}{(\infty+1)-\infty}\right)\cdot\frac{AB}{\infty} = \frac{AB}{\infty}$ protonumero. Quare cujuscumque magnitudinis sit quantitas linearis geometrica AB assumpta, tamen nihil obstat, quominus ad ea ipsa systemata, ad quæ posita AB finita pertinere poterat, aptetur. Itaque etiamsi ponatur AB absolutum *zero*, vel *absolutum infinitum*, erit quidem in primo casu $o = M = \frac{1}{\infty}\cdot(\infty\,.\,o) = \frac{1}{1+(\infty-1)}\cdot(\infty\,.\,o)$, & $N = \frac{\infty-1}{(\infty-1)+1}(\infty\,.\,o)$, & $M+N = \left(\frac{1}{1+(\infty-1)} + \frac{(\infty-1)}{(\infty-1)+1}\right)(\infty\,.\,o)$, vel $N-M = \left(\frac{\infty+1}{(\infty+1)-1} - \frac{1}{(\infty+1)-1}\right)(\infty\,.\,o)$. In secundo vero $M-N = \left(\frac{\infty}{\infty-(\infty-1)} - \frac{(\infty-1)}{\infty-(\infty-1)}\right)(\infty\,.\,o)$, vel $N-M$

$$= \left( \frac{(\infty + 1)}{\infty + 1) - \infty} - \frac{\infty}{(\infty + 1) - \infty} \right) (\infty \,.\, o).$$ Hîc diligenter notanda est differentia quæ in hisce formulis intercedit in hoc nostro casu inter ($\infty$) & ($o$) applicatum protonumero. Nam ($o$) a nobis assumptum significat absolutam carentiam quantitatis linearis geometricæ: at symbolum ($\infty$) est numerus abstractus fluens, qui semper crescere aut minui potest. Fluentes igitur in utroque casu, ad quamcumque magnitudinem evehantur coefficientes, erunt semper æquales *absoluto zero*, hoc est prorsus nullæ: (ex nihilo enim nihil). Simili ratiocinio posita $AB = \frac{1}{o} = \infty$ sive absoluto infinito, fluentes homologæ semper erunt infinitæ absolutæ: $\infty$ enim numericum fluens nullo modo comparari potest cum $\infty$ absoluto in quantitate geometrica. Tamen in utroque casu conformatæ harum fluentium formulæ eo modo quo finitas tractavimus, eamdem semper inter se rationem servabunt, atque ad eadem systemata pertinebunt. Systematum enim diversa natura tota pendet a diversa coefficientium fluentium conformatione (qui sunt semper numeri abstracti fluentes) nulla habita ratione protonumeri, qui nihil aliud determinat nisi systematum species, sive naturam quantitatis, quæ in duas fluentes homologas dividenda proponitur, quam naturam fluentes singulæ induant necesse est. Hisce bene intellectis, nullo negotio maximæ illæ tolluntur difficultates, quæ circa absolutum *zero* & *infinitum* absolutum in veteri Analysi ab ejus origine ortæ perdurant adhuc perpetuo duraturæ, nisi nova hac luce disjiciantur. Stat igitur per se hæc, quam intelligo, sublimis scientia, quæ natura sua ab omni concretione remota nullis indiget alienis subsidiis, sed propriis viribus sensim aucta & in meliorem ac ampliorem formam in posterum hisce principiis restaurata, aliis, quibus recte applicabitur, validissimam opem ferre poterit.

§. 8. Ne tamen putes singulos serierum superiorum terminos eam tantum naturam fluentis solitariæ assumere posse, ad quam superius illos aptavimus: possunt enim singuli seriei 1.ª termini in differentiam fluentem fluentium homologarum systematis S A; singuli vero seriei 2.ª in summam fluentem fluentium homologarum systematis S Y facile converti: dummodo termini seriei 1.ª formulis 4ª & 5ª; termini seriei 2.ª formulis IV. & V. CAP. VI. §. 8. subjiciantur. In hoc enim casu series 1.ª dabit $\frac{1}{\infty}(\infty\, AB)$

$$= M - N = \left\{ \frac{(\infty + \frac{1}{2}) - (\infty - \frac{1}{2})}{(\infty + \frac{1}{2}) + (\infty - \frac{1}{2})} \right\} (\infty\, AB)$$ differentiæ

fluen-

fluentium S A : series $2^a$ ∞. $\frac{AB}{\infty} = M+N = \left\{\frac{(\infty+\frac{1}{2})+(\infty-\frac{1}{2})}{(\infty+\frac{1}{2})-(\infty-\frac{1}{2})}\right\} \cdot \frac{AB}{\infty}$

summæ fluentium S Y, & facta divisione in utraque per (2), $\frac{M-N}{2}$

$= \frac{1}{2} \left\{\frac{(\infty+\frac{1}{2})-(\infty-\frac{1}{2})}{(\infty+\frac{1}{2})+(\infty-\frac{1}{2})}\right\} (\infty AB)$ semidifferentiæ fluentium fluenti S A, $\frac{M+N}{2} = \frac{1}{2} \left\{\frac{(\infty+\frac{1}{2})+(\infty-\frac{1}{2})}{(\infty+\frac{1}{2})-(\infty-\frac{1}{2})}\right\} \cdot \frac{AB}{\infty}$ semisummæ

fluenti fluentium S Y, quæ singulæ abstracte sumptæ semper sunt positivæ: sed ad systematis S A complementum & ad M, N singillatim inveniendam eadem semidifferentia addenda semisummæ constanti, & subtrahenda ab altera semisumma æquali quidem sed diversa a prima: & in S Y eadem semisumma addenda uni semidifferentiæ constanti ac subtrahenda ab altera semidifferentia æquali quidem, sed a prima diversa; ut in Cap: VI. monuimus. Ex quo iterum patet (quod sæpissime & in §. 3. hujus diximus) in nostris fluentium formulis perfectis signum (—) non nisi subtractionem significare posse, atque omnia & singula in proprio systemate fieri positiva: neque negativum æquale positivo offendi potest, nisi ex incompleta signi = notione fluentes unius systematis invicem confundantur, aut fluentes unius systematis cum fluentibus alterius inconsulto comparentur. Vide igitur ex varia coefficientium præparatione quam longe natura diversæ sint singulæ istæ formulæ superiores, licet singulæ eumdem valorem A B semper obtineant, cui in legitima formularum analyticarum ad geometrica constructione minime attendendum est, cum statuto systemate & natura fluentis, facile sit illum tribuere singulis valorem quem volumus, dummodo limites unius systematis cum limitibus alterius ne perperam confundantur.

§. 9. Hinc rursus patet in istis formulis utriusque systematis ꝏ (∞) coefficientis nullam habere necessariam cum (∞) protonumeri societatem: primum enim est numerus abstractus fluens magnitudinis nunquam definiendæ in limite

maximo, qui tamen in limite minimo non niſi uſque ad (1) decreſcere poteſt: at ſecundum ($\infty$) geometricæ quantitati ſive protonumero applicatum quicumque valor illi tribuatur, ſemper conſtans in eodem ſyſtemate perſeverat, ac valorem protonumeri determinat applicatum quantitati geometricæ AB, ſervata ſemper ejus natura. Determinato porro protonumeri ſive unitatis geometricæ valore, determinatur etiam in ſyſtemate SA fluentem majorem fluendo non poſſe excedere valorem ipſius protonumeri: at in SY fluentem majorem non poſſe fieri minorem protonumero ipſo: ex hoc tamen communi limite libera inter utrumque ſyſtema ejuſdem protonumeri aperitur communicatio, qua fluentium valores a *zero* uſque ad maximum, & etiam ad infinitum, ſi ſyſtema requirat, inveniantur. Fluentes igitur utriuſque ſyſtematis a duobus naturis conflantur ita diverſis atque hæterogeneis, ut nullo modo inter ſe comparari poſſint: protonumero ſcilicet, qui unitatem geometricam repræſentat, & coefficiente numerico ab omni quod continuæ dimenſionis geometricæ eſt abſtracto in tantum, ut licet coefficiens numericus videri poſſit productum plurium factorum, aut etiam poteſtas aliqua cujuſcumque dimenſionis, ſemper tamen ut ſimplex numerus abſtractus ſumendus eſt (ut innuimus Cap: II. §. 27.). Quid vero cenſendum de iſtiuſmodi coefficientibus, quando applicantur protonumero altioris dimenſionis geometricæ, in T. II. declarabitur.

§. 10. Ex hac neceſſaria & ab ipſa rei natura conſtituta inter coefficientes numericos fluentes & protonumerum conſtantem differentia conſequitur etiam diverſas eſſe leges, quibus moderandi ſunt coefficientes numerici, & quibus protonumeri conſtantes: coefficientes enim continuo fluxu augentur vel minuuntur; protonumeri vero conſtantes non niſi additione vel ſubtractione, aut multiplicatione vel diviſione creſcere aut minui poſſunt. Ut exemplo rem declaremus data ſit fluens ſyſtematis SA $M = \frac{5}{5+7} . AB = AD$ (*Fig.* 8.), cui reſpondet ſua homologa major $N = \frac{7}{7+5} . BA = BD$. Ducatur M in $\frac{2}{3}$, ut ſit $\frac{2}{3} . M = \frac{2}{3} . \frac{5}{5+7}\ AB = \frac{2}{3}\ AD$: quo facto indicatur fluentem AD dividendam eſſe in partes tres, ac ſumendus $\frac{2}{3}$ AD, manente eodem puncto fluente D, in quod non amplius concurrunt fluentes homologæ. Ut igitur illud punctum concurſus, quod unum hic intereſt, inveniatur, fac $\frac{2}{3}\ M = \frac{2}{3}\ AD$ $= \frac{2}{3} . \frac{5}{5+7}\ AB = \frac{10}{15+21} . AB = \frac{10}{10+26} . AB = \frac{5}{5+13} . AB$, & diviſa AB in partes (18), ſume AE individuam $= \frac{5}{5+13} . AB$, & punctum

ctum E erit punctum concursus fluentium homologarum a punctis A, B prorumpentium, atque ideo $\frac{2}{3}. M = \frac{2}{3}. \frac{5}{5+7}. AB = \frac{5}{5+13} AB = AE = M$, cui respondet sua homologa $BE = N = \frac{13}{13+5}. BA$, evanescente puncto D. Quod si ducatur M in factorem $\frac{3}{1}$, erit $\frac{3}{1}. M = \frac{3}{1}. \frac{5}{5+7} AB = \frac{3}{1}. AD$, quo indicatur ter sumendam esse AD, quæ cum sit $\frac{5}{12}. AB$, ostendit $\frac{3}{1}$ AD æquari (15) partibus $\frac{1}{12}. AB$, atque punctum concursus fluentium homologarum extra data puncta A & B inveniri: atque ideo a systemate S A ad S Y necessario fieri transitum. Ut igitur actu inveniatur hujusmodi punctum concursus, fiat $\frac{3}{1}. M = \frac{3}{1}. \frac{5}{5+7}. AB = \frac{15}{12}. AB = \frac{15}{15-3} AB = M = AB + \frac{3}{15-3}. AB = AB + BE$ (*Fig.* 8.) sumpta $BE = \frac{3}{12} AB$, quæ est fluens minor: ergo $\frac{3M}{1} = M = \left(1 + \frac{3}{15-3}\right) AB = AE = AB + N$ ut requirit novum systema SY. Donec igitur eumdem protonumerum retinere velimus, fluentes & symbola M & N quibus indicantur, licet diverso afficiantur valore, nullo factore turbandæ sunt. Coefficiens enim numericus propositus, ut diximus § superiori, licet videatur productum plurium factorum, tamen semper ex ipsa ratione qua oritur fluxus ut simplex numerus sumendus est.

§. 11. Hoc ita verum est, ut si accipiatur fluentium homologarum summa $M+N = \frac{5}{5+7}. AB + \frac{7}{7+5} BA = AD + BD$ (*Fig.* 9.) & ducatur in $\frac{2}{3}$, erit $\frac{2}{3} M + \frac{2}{3} N = \frac{2}{3}. \frac{5}{5+7}. AB + \frac{2}{3}. \frac{7}{7+5} BA = \frac{5}{5+13}. AB + \frac{7}{7+11}. BA$; sed $\frac{5}{5+13} AB < \frac{5}{5+7} AB = AD$, & $\frac{7}{7+11}. BA < \frac{7}{7+5} BA = BD$: ergo sumpta minori $\frac{5}{5+13}. AB = AF$; & $BG = \frac{7}{7+11} BA$, erit $\frac{2}{3} M + \frac{2}{3} N = \frac{5}{5+13}. AB$

+

$+ \frac{7}{7+11}$. B A $=$ A F $+$ B G, quæ invicem distrahuntur, neque in punctum commune concurrere amplius possunt nec ulli systemati aptari. Ut igitur huic malo remedium ponatur, retentis punctis datis A & B, sive eodem protonumero A B, fiat necesse est $\frac{2}{3}$ M $+$ $\frac{2}{3}$ N $= \frac{12}{18}$ A B $= \frac{2}{2+1}$ A B $= \frac{2}{2+1}$ B A $=$ M, hoc est harum summa reducatur ad unam atque individuam fluentem A D, vel B D' (*Fig.* 10.) cui subintelligenda est sua homologa B D, vel A D', $= \frac{1}{1+2}$ B A, vel $\frac{1}{1+2}$ A B. Licet igitur idem valor utrinque tam in formula summæ $\frac{2}{3}$ M $+$ $\frac{2}{3}$. N, quam in una M servetur; tamen $\frac{2}{3}$M $+$ $\frac{2}{3}$ N fluentium conjunctionem abrumpens vere repugnat, cui legitima substituenda est individua fluens M $= \frac{2}{2+1}$ A B $=$ A D una ex fluentibus homologis, quæ simul cum N $= \frac{1}{2+1}$ B A $=$ B D systema S A M$+$N $= \frac{2}{2+1}$. AB $+ \frac{1}{1+2}$ B A $=$ A D $\mp$ B D constituit. Quod si superior formula ducta fuisset ex: gr: in $\frac{3}{1}$ quæ dat $\frac{3}{1}$. M $+$ $\frac{3}{1}$. N $= \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{5+7}$. A B $+$ $\frac{3}{1} \cdot \frac{7}{7+5}$ B A $= \frac{15}{12}$. A B $+$ $\frac{21}{12}$. B A $= \frac{15}{15-3}$ A B $+$ $\frac{21}{21-9}$ B A $=$ A F $+$ B G (*Fig.* 11.) quisque videt hasce inter se ita dissociari, ut nullam legitimam societatem ad constituendum systema S Y habere possint: prima enim est fluens major A F $= \frac{15}{15-3}$ AB, & sua homologa minor B F $= \frac{3}{15-3}$. A B; secunda est fluens major B G $= \frac{21}{21-9}$ B A, & sua homologa minor A G $= \frac{9}{21-9}$ B A: quæ

proin-

proinde inter se nullo legitimo continuitatis vinculo consociantur. Reducatur itaque necesse est $\frac{3}{1}M + \frac{3}{1}N = \frac{15}{12}AB + \frac{21}{12}BA$ ad $\frac{36}{12}.AB = \frac{4}{1}AB = \frac{4}{1}BA = \frac{4}{4-3}AB$, vel $\frac{4}{4-3}BA = M = AF = \left(1 + \frac{3}{4-3}\right)AB = AB + BF$; vel $= M = BG = \left(1 + \frac{3}{4-3}\right)BA = BA + AG$, quo facto formula in fluentem majorem systematis SY legitime convertitur.

§. 12. Dixi eodem manente protonumero, & retentis duabus fluentibus a formulæ divisione indicatis factore quocumque affectis, nihil veri erui posse a formula superiori. Alia tamen via est ut legitime reducatur formula proposita, quæ a mutatione protonumeri exhibetur. Posita enim $\frac{2}{3}M + \frac{2}{3}.N = \frac{2}{3}.\frac{5}{5+7}.AB + \frac{2}{3}.\frac{7}{7+5}BA$, si fiat $= \frac{5}{5+7}.\left(\frac{2}{3}AB\right) + \frac{7}{7+5}\left(\frac{2}{3}BA\right)$, & sumatur protonumerus AD (*Fig.* 12.) $= \frac{2}{3}AB$; erit $\frac{2}{3}M + \frac{2}{3}.N = \frac{5}{5+7}.AD + \frac{7}{7+5}DA = AE + DE = M + N$: tunc enim formula illegitima $\frac{2}{3}M + \frac{2}{3}N$ reducitur ad veram $M + N$ summam fluentium homologarum systematis SA protonumeri AD. Atque hinc deducitur certa regula qua, datis fluentibus systematis unius protonumeri, liceat ad fluentes cujuscumque alterius protonumeri transitum facere. Si enim habeatur $N = \frac{5}{5+7}.AB$ liberum erit ad protonumerum majorem vel minorem AB transire, quemadmodum docet §. *6. hujus*. Quod si simul uniantur fluentes diversi protonumeri, reducendæ primum sunt ad eumdem protonumerum: qua præparatione facta ad eam, quam requirunt, legitimam formam sunt tandem reducendæ. Ita si habeatur $M + N = \frac{5}{5+7}\left(\frac{2}{3}AB\right) + \frac{7}{7+5}\left(\frac{3}{5}AB\right)$ reducantur primum ambæ ad protonumerum $\left(\frac{2}{3}AB\right)$ vel ad $\left(\frac{3}{5}AB\right)$: in pri-

primo casu invenies $M+N = \frac{50}{120}\left(\frac{2}{3}AB\right)+\frac{63}{120}\left(\frac{2}{3}AB\right)$ ; ac tandem ad individuam fluentem $M = \frac{113}{113+7}\cdot\left(\frac{2}{3}AB\right)$ (fluens major S A) protonumeri $\frac{2}{3}AB$, vel ad differentiam fluentium $M-N$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{120+63}{2}\right)-\left(\frac{120-63}{2}\right)}{\left(\frac{120+63}{2}\right)+\left(\frac{120-63}{2}\right)}\right\}\cdot\left(\frac{2}{3}AB\right)$$

: in secundo casu $M+N$

$$= \frac{50}{9\cdot12}\left(\frac{3}{5}AB\right)+\frac{7\cdot9}{9\cdot12}\left(\frac{3}{5}AB\right) = M = \frac{113}{113-5}\left(\frac{3}{5}AB\right)$$

quæ est fluens major systematis S Y. Vel si fiat $\frac{113}{108}\cdot\left(\frac{3}{5}AB\right)$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{113+108}{2}\right)+\left(\frac{113-108}{2}\right)}{\left(\frac{113+108}{2}\right)-\left(\frac{113-108}{2}\right)}\right\}\cdot\frac{3}{5}AB = M+N$$

summam fluentem fluentium homologarum systematis S Y protonumeri $\frac{3}{5}AB$ ut supra.

§. 13. Præter itaque hanc, quam §. superioris formulæ $\frac{2}{3}AB$ S A tribuimus formam, ob quam ipsa naturam unius fluentis majoris S A induit, aliam nobis exhibet doctrina Capitis superioris. Nimirum si fiat $\frac{2}{3}\cdot AB$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3+2}{2}\right)-\left(\frac{3-2}{2}\right)}{\left(\frac{3+2}{2}\right)+\left(\frac{3-2}{2}\right)}\right\}AB$$

, quæ est differentia fluens fluentium homologarum systematis S A ejusdem protonumeri A B, atque ideo M—N, quæ

ut

ut legitimæ constructioni aptetur, divide A B bifariam in C (*Fig.* 13.) & sumpta C D & C d $= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{3+2}{2}\right) - \left(\frac{3-2}{2}\right)}{\left(\frac{3+2}{2}\right) + \left(\frac{3-2}{2}\right)} \right\}$ A B, erit

M — N = (A C + C D) — (B C — C D) = A D — B D = A D — A d = d D; N — M = (B C + C d) — (A C — C d) = B d — A d = B d — B D = D d: similiter sumpta formula S Y quam convertimus in fluentem majorem S Y, nempe $M = \frac{4}{4-3}$ A B, si fiat $M = \frac{4}{1}$ A B $= \left\{ \frac{\left(\frac{4+1}{2}\right) + \left(\frac{4-1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right) - \left(\frac{4-1}{2}\right)} \right\}$ A B convertitur in summam fluentem homologarum fluentium systematis ejusdem protonumeri S Y: quæ ut recte construatur, divide protonumerum A B bifariam in C (*Fig.* 14.), & sumpta tam C D quam C d $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1}$ A B, sive tam B D quam A d $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1}$. A B invenies M + N = (A C + C D) + (C D — C B) = A D + B D = A D + A d = D A + d A = D d, vel M + N = (B C + C d) + (C d — A C) = B d + A d = B d + B D = d B + B D = d D ut illic demonstravimus.

§. 14. Hisce explicatis palam se prodit ratio, cur methodus tractandi coefficientes sit longe diversa ab illa, qua protonumeri calculo subjiciendi sunt, ex quorum elementorum mutua coalitione exsurgit singula fluens geometrica. Coefficientes enim (juvat enim in re nova ac difficili idem sæpius urgere) abstracti, utpote fractiones ab uno tantum puncto fixo suæ originis prorumpentes, continuo fluxu indefinite fluunt donec ad *zero* vel ad unitatem reducantur: donec scilicet numerator, qui unus est fluens (utpote una ex portionibus, in quas dividitur denominator constans) fiat vel *zero*, vel denominatori æqualis. Itaque donec numerator est minor vel major denominatore, aut unum tantum coefficientem individuum solitarium, aut (ut diximus) differentiam coefficientium fluentium S A repræsentat in primo casu, aut summam S Y in secundo, si artificio a nobis adhibito in duos coefficientes coefficiens primus dispertiatur: qui singuli coefficientes integri atque individui censendi sunt, atque ad hanc uni-

unitatem reducendi si aliquo factore quocumque afficiantur: ab hisce enim in partes divisis atque invicem distractis abrumpitur linearum continuatio; tollitur omnino systematis utriusque necessaria conditio, atque ideo systema ipsum. At protonumerus qui est quantitas geometrica primum sumpta constans cum fluere nequeat, nequit etiam augeri vel minui nisi repetita additione, aut subtractione, hoc est applicatione alicujus factoris, ut facile ex dictis est cognoscere. Hinc confirmata manet doctrina P. I. Cap: IV. §. *9.* & seqq: de duplici ratione, qua tractari debent quantitates notæ & variabiles. Illic tamen methodum communem sequuti, qua litteris alphabeticis quantitates geometricæ exprimuntur, res hæc tanta non poterat in meliori lumine collocari.

§. 15. Nostræ uni Theoriæ universaliori, de qua nunc agimus, reservatum erat evidentissime demonstrare, fluentes geometricas, quæ symbolis individuis M & N (vel ut moris est $x$, $y$) indicantur, constare singulas duobus hisce elementis (protonumero scilicet constanti, & coefficiente numerico fluente) diversæ prorsus naturæ, & a diversa lege temperatis: atque ideo necessarium erat formulas invenire, quarum ope, quæ a symbolis M & N simul exhibentur, disjungere atque invicem separare, ut singulis ea, quam earum diversa natura requirit, diversa tractandi ratio singillatim aptari posset. Hoc factum vides in *Cap. superioribus*, in quibus legitima formularum fluentium ratione constituta facile fuit coefficientium numericorum fluentium Theoriam (in quo negotio tota vis & facultas Analyseos sita est) abstracte inchoare, ac modum deinde ostendere, quo hujusmodi coefficientes numerici protonumero legitime applicari possint, ut in hoc Capite demonstratur. Quibus bene intellectis facile est etiam cognoscere, hujusmodi symbola individua M & N legibus tantum, quibus coefficientes numerici moderantur, obnoxia esse. Protonumerus enim constans unitatis geometricæ vicem gerens qui in ipsis non apparet, arbitrio semper nostro relinquitur, quem probe nota generali analytica (1) designandum §. 3. diximus, cui in constructione respondet linea geometrica, quam volumus: quod vero reliquum est in istis symbolis, totum fluens est coefficientium abstractorum naturam induens horum legibus moderandum. Tolleretur itaque in istis symbolis M & N ea una, quam repræsentat, fluentium natura, si eo modo, quem protonumeri requirunt, hæc calculo subigerentur: fluentes enim in constantes converterentur, qua facta conversione miscentur omnia in Analysi atque perturbantur, neque ullum amplius habet tutum hæc Scientia fundamentum, in quo firmiter consistat.

§. *16.* Quæ cum ita sint illud consequitur, nihil referre utrum protonumerus aliquis datus primum statuatur, an omnino abstracte sumatur: satis est enim ut naturam illius quantitatis geometricæ, cujus affectiones quærimus, in eodem systemate perpetuo servet, & constans sit: quinimmo si initio protonumerus aliquis arbitrio determinaretur, cum ex varia ratione, qua formulæ coefficientium conformari possunt, protonumerus ipse sæpe mutationem subeat necesse sit; periculum esset (in quod methodus nota sæpe incidit) ut facta hac mutatione protonumerum tamen primum, qui postea repugnat, incaute formulis mutatis tribueretur. Hac igitur necessaria protonumeri indeterminatione in formulis sta-

ſtatuta, cum cæteræ fluentes omnino natura ſui fluxus duplici ratione indeterminatæ ſint, conſequitur etiam in formulis analyticis nullam omnino ad valorem aliquem peculiarem univerſim habendam eſſe rationem, ſed laborem omnem atque induſtriam in varia formularum fluentium legitima conformatione collocandum eſſe. Hinc luce clarius patet litteras $a$, $b$ &c. alphabeti primas, quibus analyſis communis neceſſariam conſtantium determinatarum notionem, & $x$, $y$ &c. ultimas, quibus anticipate & precario fluentium notionem affigit, nullam intrinſecam in ſe hujuſce diverſæ notionis rationem continere; cum quod ſemel litteris $a$ vel $b$ conſtans erat, mutata formula in fluentem, & viceverſa, transmutari poſſit. Quare ſi $a$ vel $b$ protonumerum ſignificet, indeterminata quidem ad infinitos valores erit, ſed naturam tantum conſtantis induet; ſi vero productum erit ex coefficiente fluenti in protonumerum conſtantem, naturam fluentis aſſumet. Porro cum in formulis paſſim vulgo uſurpatis plures litteræ $a$, $b$ &, quæ dicuntur determinatæ; ſimul congerantur, quomodo conſtans ſive protonumerus, quem unum in eodem ſyſtemate dominari demonſtravimus, a fluente ſecerni poterit, quæ licet littera ſimili $b$ vel $c$ &c. indicetur, tamen nullo modo differt a fluenti littera $x$ vel $y$ notata, dummodo tamen hæc novo calculi artificio in conſtantem non convertatur; & quomodo hæc tam incerta legitimæ conſtructioni poterunt applicari? Quare methodus communis melius ſibi conſuluiſſet, ſi abjurata valorem datum religione ſervandi in ſuis formulis (de quo unice ad ſcrupulum uſque ſollicita eſt) ad varia artificia, novis legibus atque præceptis firmanda, quibus formulas analyticas legitime tranſmutare liceat, & novæ conſtructioni ſubjicere, animum ſeria ac aſſidua meditatione convertiſſet. Ex hac doctrina illud ſponte fluit, ignotum ſcilicet toto cælo diſtare a *fluenti* & *conſtanti*: quod enim eſt *conſtans*, protonumerus eſt, & quod *fluens* eſt, coefficiens abſtractus eſt: at ignotum tam poteſt eſſe protonumerus, tam coefficiens fluens, quam utrumque: nihil tamen refert in neceſſaria formularum coagmentatione ad aliquod geometricum ſyſtema legitime reducenda, utrum hæc omnia, aut ſingula ignota maneant.

§. 17. Illud tantum abſolutæ neceſſitatis, & proprium atque unum hujuſce Scientiæ munus eſt, quantitatem geometricam a coefficiente numerico, cui applicatur, diligentiſſime ſeparare, ut quod proprium ac ſuum eſt, ab extraneo, cui applicatur, omni dubietate remota dignoſcere valeat, ac intelligere ſubjectum proprium ac ſuum circa quod diligentiſſime primum verſetur oportet, eſſe unitatem abſtractam numericam (quæ natura ſua individua & conſtans, eſt communis aliorum numerorum comparationis terminus, qui cum ſucceſſivo ac continuo fluxu ipſius unitatis reſpectu augeantur ac minuantur, vere fluentes ſunt) in ſuas fluentes infinitis prope modis dividere, & fluentes ipſas compoſitione iterum ad hanc unitatem revocare, ac leges & præcepta tradere, quibus immenſum hoc opus neceſſario Theorematum generalium apparatu recte firmetur, & ſucceſſive amplificetur: quo nomine ipſam analyſim abſtractam ſive Arithemeticam univerſalem jure audit. Ipſa vero hæc jam ſtatuta *Arithemetica univerſalis* ſuarum veritatum abſtractarum applicatione ad aliquod partiale atque concretum ſubjectum adjuncto aliquo a re, cui applicatur, deſumpto aliquo modo

determinatur: ut in nostro casu applicatio hujusce *Scientiæ universalis* ad principia geometrica Scientiam hanc angustioribus limitibus circumscriptam Analysim geometricam constituit: cujus Geometriæ naturam atque affectiones probe calleat necesse est, ut rectam hanc applicationem instituat. Universalior tamen primum firmanda necesse est, antequam applicatio ad alteram fieri possit. Nihil obstat igitur, quominus hujusce Scientiæ universalis legitime institutæ applicatio ad aliquod *subjectum* natura sua repugnans & absurdum convertatur, aut etiam ad aliquod reale *subjectum* præpostere dirigatur: sed in hoc casu malum est aut in *subjecto* natura sua absurdo, aut in falsa ac fallaci ad legitimum subjectum hujusce Scientiæ applicatione. Hoc dictum volo ut intelligatur imaginarium illud, quod totam analysim communem infecit, esse malum ab hac vera ac universali analysi prorsus alienum, ac totum tribuendum esse falsæ ac fallaci applicationi hujusce Scientiæ ad geometrica, ignoratione horum omnium quæ tradidimus, quæque in posterum traditURI sumus.

§. 18. Ne vero in hac applicatione (ut hactenus contingit) misere decipiamur, multum conferre puto nunc investigare, quid sit illud primum atque commune principium, quo rite liceat hanc Arithemeticam universalem affectionibus geometricis applicare. Principium hoc, si ad ea quæ diximus intentum animum advertas, in ipsa unitate abstracta situm esse non difficile erit cognoscere, dummodo hæc *unitas* absolutissima ad *unitatem* geometricam significandam reducatur, ut quæ erat subjectum Arithemeticæ universalis simplex atque unum, transmutetur in unitatem geometricam individuam, primum atque simplex Geometriæ subjectum, quod protonumerum appellavimus: qua una tantum hujusce *unitatis* transmutatione *Analysis universalis* ad *Analysim geometricam* quantitate continua definitam reducitur. Et cum Geometria trinas extensionis continuæ dimensiones singillatim ac simul consideret, quarum unaquæque ab *unitate* diversæ naturæ, atque heterogeneæ componitur; ut hujusmodi applicatio rite procedat, *unitas abstracta* convertenda est in eam unitatem, quæ sit principium illius dimensionis geometricæ, cujus affectiones inquirimus, ne unitates diversi generis, quæ nullo communi vinculo consociantur, inter se perperam comparentur. Hujusmodi vero *unitatis* transmutationem, qua non nisi subjectum mutatur, at ejus modificationes intactæ manent, nullo modo nisi a formulis nostræ Theoriæ obtineri posse quis tandem non videt? atque inde non intelligit earum absolutam necessitatem, atque horum generalium Theorematum, de quibus nunc agimus, ad hanc nostram Theoriam recte primum firmandam? Porro donec hujusmodi formulæ a nostra universali Theoria profectæ abstracte sumuntur, formulæ analyticæ vere dicendæ sunt, cum aliud non sint nisi veritates abstractæ ab unitate hac absolutissima derivatæ; hujusmodi vero formularum abstractarum ad geometrica applicatio *Constructio geometrica* jure appellatur. Quare formulas analyticas construere, nihil aliud est nisi *formulas analyticas abstractas* ab Arithemetica universali exhibitas mutatione *unitatis abstractæ in unitatem geometricam* illius dimensionis, quam nobis proposuimus, in *Geometricas* convertere, & illas affectiones, quibus formulæ abstractæ *unitatem abstractam* afficiebant, huic *unitati geometricæ* ad amussim applicare. Hinc prima ordine atque natura est Analysis abstracta,

cu-

cujus præcepta atque leges primum investigare atque callere diligenter oportet, antequam ad analysim geometricam constituendam accedamus.

§. 19. Primam vero formulam analyticam generalem abstractam, a qua cæteræ derivantur, esse 1 = A jam manifeste ex doctrina hujusce & *Capit: superiorum* patet. Unitatis enim naturam induere quemvis numerum, qui est communis cæterorum mensura, jam diximus: quem si ad linearem geometricam referre velimus, unitas hæc abstracta (1) convertatur in unitatem linearem constantem arbitrio sumptam sive in quamvis lineam A B (*Fig.* 7.) duobus punctis datis A & B definitam, quam protonumerum diximus: & quæ erat abstracte sumpta 1 = A fit 1 = A B vel B A: hoc est (1) abstracta conversa fuit in geometricam linearem: quo facto veritates omnes atque Theoremata, quæ ex varia formulæ abstractæ modificatione circa unitatem abstractam superius invenimus, huic *unitati geometricæ* dato temperamento in ipsa unitatis geometricæ natura insito mire conveniunt: *Constructio* igitur *geometrica* nihil aliud est nisi cujuscumque *formulæ analyticæ* rite præparatæ *protonumeri abstracti* sive *unitatis abstractæ* in *protonumerum* sive *unitatem geometricam* conversione ad *geometrica* reductio: ex quibus iterum ad analytica fit conversio una tantum protonumeri geometrici in analyticum mutatione. Ex quo colligitur (quod hîc innuo probe tamen tenendum, & memoriæ consignandum) fieri non posse, ut quod constructio geometrica assequitur, id formulis analyticis interdicatur: quæ si impares ad hoc consequendum in aliquibus casibus forte inveniuntur, non analysi bene institutæ, sed illi quam nunc habemus, angustæ nimis atque impedimentis undique irretitæ, culpa omnis referenda est: ut in casu qui dicitur irreductibilis, contingere dicitur, quod tamen infinitis aliis ignorata legitima sui ipsius ad geometrica applicatione contingere hactenus demonstratum fuit ac in posterum demonstrabitur. Quare hoc uno æquationis 1 = A facili atque simplicissimo principio ab analyticis ad geometrica, & viceversa, nullo negotio transitus anquiritur, facta scilicet (1) sive A = A B: cum coefficientes numerici, qui unitatem, cui applicantur, afficiunt, & quoad naturam & quoad proprietates tam in analyticis formulis, quam in geometricis intacti maneant. Symbola vero absolute indeterminata M, N (vel quocumque alio signo $x$, $y$ indicentur) referenda & comparanda sunt cum formulis nostris coefficiente numerico in suam unitatem respectivam ducto conflatis, a quibus & quoad naturam, & quoad modum omnino pendent; non ab arbitrio nostræ mentis, quæ frustra & perperam istis symbolis naturam & modum quemcumque arbitrio induere jusserit; nisi Theoriæ nostræ auxilio formulæ coefficientium indeterminatorum, quibus revera M, N comparanda sunt, ad eam, quam requirunt, notionem significandam recto instituto calculo subigantur. Quare non ex varia symbolorum M, N &c. cæca & arbitraria præparatione, tamquam vero comparationis termino desumenda est natura formularum, quibus comparantur; sed a formulis legibus nostræ Theoriæ rite ad rem, quam quærimus, consequendam conformatis repetenda est natura, dimensio, numerus, valor istiusmodi symbolorum.

§. 20. Ut hæc abstractiora maximi tamen momenti, quippe quibus tota nititur

TAB. A.

## Formulæ Analyticæ.

$= A =$

| | 1.ª | 2.ª | 3.ª | 4.ª | 5.ª | 6.ª | 7.ª | 8.ª |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I.ª | $\frac{8}{8+3}\cdot 1+\frac{3}{3+8}\cdot 1 =$ | $M+N =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+8}{2}\right)-\left(\frac{11-8}{2}\right)}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}\right\}1+\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(M-N)+(M-N) =$ | $\frac{15}{15-4}\cdot 1-\frac{4}{15-4}\cdot 1 =$ | $M-N =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{15+11}{2}\right)+\left(\frac{15-11}{2}\right)}{\left(\frac{15+11}{2}\right)-\left(\frac{15-11}{2}\right)}\right\}1-\left\{\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right)-\left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(M+N)\,SY-(M-N)\,SA$ |
| II.ª | $\frac{3}{3+8}\cdot 1+\frac{8}{8+3}\cdot 1 =$ | $M+N =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right\}1+\left\{\frac{\left(\frac{11+8}{2}\right)-\left(\frac{11-8}{2}\right)}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(M-N)+(M-N) =$ | $-\frac{4}{15-4}\cdot 1+\frac{15}{15-4}\cdot 1 =$ | $-M+N =$ | $-\left\{\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right)-\left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}\right\}1+\left\{\frac{\left(\frac{15+11}{2}\right)+\left(\frac{15-11}{2}\right)}{\left(\frac{15+11}{2}\right)-\left(\frac{15-11}{2}\right)}\right\}1 =$ | $-(M-N)\,SA+(M+N)\,SY$ |
| III.ª | $\frac{11}{11+0}\cdot 1+\frac{0}{0+11}\cdot 1 =$ | $M+oN =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\}1+\left\{\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)-\left(\frac{11-0}{2}\right)}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(M-oN)+(M-N =$ | $\frac{11}{11-0}\cdot 1-\frac{0}{11-0}\cdot 1 =$ | $M-oN =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\}1-\left\{\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)-\left(\frac{11-0}{2}\right)}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(M+oN)\,SY-(M-oN)\,SA$ |
| IV.ª | $\frac{0}{0+11}\cdot 1+\frac{11}{11+0}\cdot 1$ | $oM+N =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)-\left(\frac{11-0}{2}\right)}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}\right\}\cdot 1+\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(M-M)+(M-oN =$ | $-\frac{0}{11-0}\cdot 1+\frac{11}{11-0}\cdot 1 =$ | $-oM+N =$ | $-\left\{\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)-\left(\frac{11-0}{2}\right)}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}\right\}1+\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\}1 =$ | $(-oM+N)\,SA+(N+oM)\,SY$ |
| V.ª | $\frac{11}{11+0}\cdot 1 =$ | $M =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\}\cdot 1 =$ | $M-oN =$ | $\frac{11}{11-0}\cdot 1 =$ | $M =$ | $\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\}\cdot 1 =$ | $M+oN\ \ SY$ |
| VI.ª | $\frac{8}{8+25}\cdot 3+\frac{1}{1+10}\cdot 3 = M+N =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1+2}\cdot 3\\ \frac{1}{1+2}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 3\\ \left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M-N =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{5}{5+6}\cdot 3-\frac{4}{4+29}\cdot 3\\ \frac{5}{5+6}\cdot 1'-\frac{4}{4+29}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M-N =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1+2}\ 3\\ \frac{1}{1+2}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 3\\ \left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M-N\ \ SA$ |
| VII.ª | $\frac{1}{1+2}\cdot 3+\frac{0}{0+33}\cdot 3 = M+oN =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1+2}\cdot 3\\ \frac{1}{1+2}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 3\\ \left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M-N =$ | $\frac{1}{3-0}\cdot 3-\frac{0}{33-0}\cdot 3 = M-N =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{4-1}\cdot 3\\ \frac{1}{4-1}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 3\\ \left\{\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M-N\ \ SA$ |
| VIII.ª | $\frac{34}{34-33}\cdot\frac{1}{3}+\frac{9}{9+2}\cdot\frac{1}{3} = M+N =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{3-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{4-3}\cdot\frac{1}{3}\\ \frac{3}{3-2}\cdot 1'=\frac{3}{4-3}\ 1'\end{matrix}\right\} = M =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{3+2}{2}\right)+\left(\frac{3-2}{2}\right)}{\left(\frac{3+2}{2}\right)-\left(\frac{3-2}{2}\right)}\right\}\cdot\frac{1}{3}\\ \left\{\frac{\left(\frac{3+2}{2}\right)+\left(\frac{3-2}{2}\right)}{\left(\frac{3+2}{2}\right)-\left(\frac{3-2}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M+N =$ | $\frac{3}{3-2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{12}{12-1}\cdot\frac{1}{3} = M-N =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{45}{45-34}\ \frac{1}{3}\\ \frac{45}{45-34}\ 1'\end{matrix}\right\} = M =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{45+11}{2}\right)+\left(\frac{45-11}{2}\right)}{\left(\frac{45+11}{2}\right)-\left(\frac{45-11}{2}\right)}\right\}\cdot\frac{1}{3}\\ \left\{\frac{\left(\frac{45+11}{2}\right)+\left(\frac{45-11}{2}\right)}{\left(\frac{45+11}{2}\right)-\left(\frac{45-11}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M+N\ \ SY$ |
| IX.ª | $\frac{3}{3+0}\cdot\frac{1}{3}+\frac{0}{11+0}\cdot\frac{1}{3} = M+oN =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\\ \frac{1}{1}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M+N =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{1+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1}{2}\right)}{\left(\frac{1+1}{2}\right)+\left(\frac{1-1}{2}\right)}\right\}\cdot\frac{1}{3}\\ \left\{\frac{\left(\frac{1+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1}{2}\right)}{\left(\frac{1+1}{2}\right)+\left(\frac{1-1}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M-oN =$ | $\frac{3}{3-0}\cdot\frac{1}{3}-\frac{0}{11-0}\cdot\frac{1}{3} = M-oN =$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\\ \frac{1}{1}\cdot 1'\end{matrix}\right\} = M-N =$ | $\left\{\begin{matrix}\left\{\frac{\left(\frac{1+1}{2}\right)+\left(\frac{1-1}{2}\right)}{\left(\frac{1+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1}{2}\right)}\right\}\cdot\frac{1}{3}\\ \left\{\frac{\left(\frac{1+1}{2}\right)+\left(\frac{1-1}{2}\right)}{\left(\frac{1+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1}{2}\right)}\right\}\cdot 1'\end{matrix}\right\} =$ | $M+oN\ \ SY$ |



TAB. B.

## Formulæ Geometricæ

$1=\left\{\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right\}=$

| | 1.ª | 2.ª | 3.ª | 4.ª | 5.ª | 6.ª | 7.ª | 8.ª |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (Tab. II. *Fig.* 1.) | | (*Fig.* 2.) | | (*Fig.* 3.) | | (*Fig.* 4.) | |
| I.ª | $\frac{8}{8+3}AB+\frac{3}{3+8}BA=$ | $AD+BD$ = | $\frac{\left(\frac{11+8}{2}\right)AB-\left(\frac{11-8}{2}\right)BA}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)AB-\left(\frac{11-3}{2}\right)BA}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}$ = | $(AB-BD)+(AD'-BD')=dD+d'D'=2CD+2CD'$ = | $\frac{15}{15-4}AB-\frac{4}{15-4}AB=$ | $AD-BD=$ | $\left[\frac{\left(\frac{15+11}{2}\right)+\left(\frac{15-11}{2}\right)}{\left(\frac{15+11}{2}\right)-\left(\frac{15-11}{2}\right)}\right]AB-\left[\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right)-\left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}\right]AB=$ | $(AD+AD')+fF$ |
| | $\frac{8}{8+3}BA+\frac{3}{3+8}AB=$ | $BD'+AD'$ = | $\frac{\left(\frac{11+8}{2}\right)BA-\left(\frac{11-8}{2}\right)AB}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)BA-\left(\frac{11-3}{2}\right)AB}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}=$ | $(BA-Ad)+(Bd'-Ad')=Dd+D'd'=2Cd+2Cd'$ = | $\frac{15}{15-4}BA-\frac{4}{15-4}BA=$ | $BD'-AD'=$ | $\left[\frac{\left(\frac{15+11}{2}\right)+\left(\frac{15-11}{2}\right)}{\left(\frac{15+11}{2}\right)-\left(\frac{15-11}{2}\right)}\right]BA-\left[\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right)-\left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}\right]BA=$ | $(BD'+BD)+Ff$ |
| | (*Fig.* 5.) | | (*Fig.* 6.) | | (*Fig.* 7.) | | (*Fig.* 8.) | |
| III.ª | $\frac{11}{11+0}AB+\frac{0}{0+11}BA=$ | $AB+B$ = | $\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)AB-\left(\frac{11-11}{2}\right)BA}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)AB-\left(\frac{11-0}{2}\right)BA}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}=$ | $(AB-B)+(AC+C)-(BC-C)=(AB-B)+2C$ = | $\frac{11}{11-0}AB-\frac{0}{11-0}AB=$ | $AB-B=$ | $\left[\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right]AB-\left[\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)-\left(\frac{11-0}{2}\right)}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}\right]AB=$ | $(AB+B)-(AC+C)-(BC-C)=AB+B-2C$ |
| | $\frac{11}{11+0}BA+\frac{0}{0+11}AB=$ | $BA+A$ = | $\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)BA-\left(\frac{11-11}{2}\right)AB}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)BA-\left(\frac{11-0}{2}\right)AB}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}=$ | $(BA-A)+(BC+C)-(AC-C)=(BA-A)+2C$ = | $\frac{11}{11-0}BA-\frac{0}{11-0}BA=$ | $BA-A=$ | $\left[\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right]BA-\left[\frac{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}{\left(\frac{11+0}{2}\right)+\left(\frac{11-0}{2}\right)}\right]BA=$ | $(BA+A)-(BC+C)-AC-C)=BA+A-2C$ |
| | (*Fig.* 9.) | | (*Fig.* 6.) | | (*Fig.* 9.) | | (*Fig.* 8.) | |
| V.ª | $\frac{11}{11+0}AB$ = | $AB$ = | $\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)AB-\left(\frac{11-11}{2}\right)BA}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}$ = | $(AC+CB)-(BC-BC)=AB-B=2CB$ = | $\frac{11}{11-0}AB$ = | $AB$ = | $\left[\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right]AB$ = | $(AC+CB)+B=AB+B$ |
| | $\frac{11}{11+0}BA$ = | $BA$ = | $\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)BA-\left(\frac{11-11}{2}\right)AB}{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}$ = | $(BC+CA)-(AC-AC)=BA-A=2CA$ = | $\frac{11}{11-0}BA$ = | $BA$ = | $\left[\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right]BA$ = | $(BC+CA)+A=BA+A$ |
| | (*Fig.* 10.) | | (*Fig.* 11.) | (*Fig.* 12.) | (*Fig.* 13.) | | (*Fig.* 14.) | (*Fig.* 15.) |
| VI.ª | $\frac{8}{8+25}3AB+\frac{1}{1+10}3AB=$ | $AD+AD'$ vel $AD+Bd=$ | $\frac{1}{1+2}3AB=\frac{1}{1+2}AB'=\left[\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right]AB''$ = | $(AC+CD)-(BC-CD)=2CD$ = | $\frac{5}{5+6}3AB-\frac{4}{4+29}3AB=$ | $AD-B'D'=$ | $\frac{1}{1+2}3AB=\frac{1}{1+2}AB''=AD$ = | $\frac{1}{4-1}AB''=B''D$ |
| | (*Fig.* 16.) | | (*Fig.* 17.) | | (*Fig.* 18.) | | (*Fig.* 19.) | |
| VIII.ª | $\frac{24}{24-13}\frac{AB}{3}+\frac{9}{9+2}\frac{AB}{3}=$ | $AD+AD'$ = | $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{3-2}\frac{AB}{3}=\frac{3}{3-2}AB''=AD\\\frac{3}{4-3}AB''=B''D'\end{matrix}\right\}$ = | $\left[\frac{\left(\frac{3+2}{2}\right)+\left(\frac{3-2}{2}\right)}{\left(\frac{3+2}{2}\right)-\left(\frac{3-2}{2}\right)}\right]AB''=B''d+B''D''$ = | $\frac{3}{3-2}\frac{AB}{3}-\frac{12}{12-1}\frac{AB}{3}=$ | $AD-B''D'=$ | $\frac{45}{45-34}\frac{AB}{3}=\frac{45}{45-34}AB''=AD$ = | $\left[\frac{\left(\frac{45+11}{2}\right)+\left(\frac{45-11}{2}\right)}{\left(\frac{45+11}{2}\right)-\left(\frac{45-11}{2}\right)}\right]AB''=AD+Ad$ |
| | (*Fig.* 20.) | | (*Fig.* 20.) | (*Fig.* 21.) | (*Fig.* 22.) | | (*Fig.* 23.) | (*Fig.* 24.) |
| IX.ª | $\frac{3}{3+0}\frac{AB}{3}+\frac{0}{0+11}\frac{AB}{3}$<br>$\frac{3}{3+0}AB''+\frac{0}{0+11}B''A$ = | $AB''+B''$ = | $\frac{1}{1}\frac{AB}{3}=\frac{1}{1}AB''=AB''$ = | $\left[\frac{\left(\frac{1+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1}{2}\right)}{\left(\frac{1+1}{2}\right)+\left(\frac{1-1}{2}\right)}\right]AB''=(AC+CB'')-(B''C-B''C)=AB''-B''=2CA=$ | $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{3-0}\frac{AB}{3}-\frac{0}{11-0}\frac{AB}{3}\\\frac{3}{3-0}AB''-\frac{0}{11-0}AB''\end{matrix}\right\}=$ | $AB''-B''$ = | $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1}\frac{AB}{3}=\frac{1}{1}AB''\\\frac{1}{2-1}AB''=B''D\end{matrix}\right.$ = | $\left[\frac{\left(\frac{1+1}{1}\right)+\left(\frac{1-1}{2}\right)}{\left(\frac{1+1}{2}\right)-\left(\frac{1-1}{2}\right)}\right]AB''=AB''+A$ |



ad ſignificandam eam oppoſitam directionem, quæ ſolis formulis geometricis convenire poteſt: hinc eadem numero formula analytica inſervit utriſque formulis geometricis in oppoſita directione conſtitutis. Ita in noſtris TAB: una formula analytica ſyſtematis S A ( Tab. II. *Fig.* 1. )

$$\frac{8}{8+3}\cdot 1 + \frac{3}{3+8}\cdot 1 \text{ fit} = \left\{\begin{array}{lll} \frac{8}{8+3}\cdot AB + \frac{3}{3+8}\cdot BA & \text{duabus geometricis} & = AD + BD \\ \frac{8}{8+3}\cdot BA + \frac{3}{3+8}\cdot AB & & = BD' + AD' \end{array}\right\}$$

& in S Y ( *Fig.* 3. )

$$\frac{15}{15-4}\cdot 1 - \frac{4}{15-4}\cdot 1 \text{ fit} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{15}{15-4}\cdot AB - \frac{4}{15-4}\cdot AB & = AD - BD \\ \frac{15}{15-4}\cdot BA - \frac{4}{15-4}\cdot BA & = BD' - AD' \end{array}\right\}$$

quia unaquæque formula analytica ab una generali $1 = A$ derivata reſpondet duabus geometricis eodem coefficiente affectis, quarum una ab $1 = AB$, altera ab $1 = BA$ utraque generali ortum ducit, atque ideo formulæ geometricæ in TAB: B. duplicantur. Hac una animadverſione duplex & ambigua ſigni $\pm$ notio tam in formulis pure analyticis, quam in geometricis omnino tollitur: nec huic ſigno — alia ſignificatio tam in analyticis, quam in geometricis remanet, quam quæ indicat ſubtractionem identici ab identico, quæ a terminis coefficientium numericorum tam analyticis, quam geometricis formulis communibus ſigno — affectis manifeſte exhibetur.

§. 22. In noſtris TABULIS ſeries orizontales ſucceſſive complectuntur formulas illas omnes, quæ a generali 1 in varias mutata formas derivantur. Prima generalis formulæ geometricæ $1 = AB$ vel $= BA$ transformatio exhibet in TAB: B ſummam conſtantem fluentium homologarum, a qua conſtituitur ſyſtema S A, quemadmodum a differentia fluentium conſtanti formulæ 5.ª oritur ſyſtema S Y. In utriſque iſtis formulis conſtans eſt, ſed indeterminatus fluentium ſimul ſumptarum valor, quippe licet infinitis modis fluentium homologarum valor mutetur, ſemper earum ſumma protonumero in unaquaque formula æqualis eſt. Qui protonumerus ſi in ſingulis idem accipiatur inter ſingulas haſce TABULARUM formulas perfecta æqualitas intercedit; ſecus ſi in ſingulis protonumeri valor, qui arbitrio noſtro relinquitur, mutatur: ſignum enim hoc $=$ ex noſtra Theoria nihil aliud ſignificare comperimus niſi unitatem principii, a quo transformationes omnes cæterarum formularum ab una eademque formula varie diſpoſita atque præparata manarunt, ut ſæpiſſime in P. I. adverti. In quod vero nervos omnes ingenii intendamus oportet, illud eſt, ut caute inveſtigemus atque aſſequamur (ne in errorem inſcii labamur) quænam ſit & quid ſignificet formularum ſingularum illa diverſitas, quam quælibet in ſingulis diverſa in-

induit præparatio: quod tamen ab Analysi communi horum artificiorum prorsus ignara omnino negligitur.

§. 23. Notata superius systematis diversitate in 1.ª & 5.ª nostræ TAB: transformatione, nunc animum ad 3.ªm & 7.ªm convertamus, ut cognoscamus 3.ªm dividi in duas partes nullo communi ac necessario vinculo inter se conjunctas, quarum singula est differentia fluens duarum fluentium homologarum, in quam unamquamque fluentem systematis S A dividi posse jam demonstravimus: ex qua divisione duo diversa systemata S A invicem distracta oriuntur, a quibus continuitatem constructionis frustra requiras sub una tantum ac vere una æquatione contentam, ut *Fig*: 2. ostendit. Idem omnino contingit 7.ª hac tantum differentia, ut prima divisionis pars sit summa fluens fluentium homologarum S Y, secunda a prima subtracta sit differentia fluens fluentium homologarum S A, a quibus æquatio, quæ primum erat, distrahitur in duas invicem necessario divulsas diversam singulas constructionem complectentes, ut videre est in *Fig*. 4. Et sane 3.ª dividitur in duas $\dfrac{(\frac{11+8}{2})\,AB - (\frac{11-8}{2})}{(\frac{11+8}{2}) + (\frac{11-8}{2})}\,BA$

$$+ \frac{(\frac{11+3}{2})\,AB - (\frac{11-3}{2})}{(\frac{11+3}{2}) + (\frac{11-3}{2})}\,BA = \left(\frac{19}{22}\,.\,AB - \frac{3}{22}\,.\,BA\right)$$

$$+ \left(\frac{7}{11}\,.\,AB - \frac{4}{11}\,.\,BA\right) = \left(\frac{19}{19+3}\,AB - \frac{3}{3+19}\,BA\right)$$

$+ \left(\frac{7}{7+4}\,.\,AB - \frac{4}{4+7}\,BA\right)$ quarum prima est differentia fluens fluentium homologarum systematis S A $\frac{19}{19+3}$ A B + $\frac{3}{3+19}$ B A; secunda differentia fluens fluentium homologarum systematis ejusdem S A $\frac{7}{7+4}$ A B + $\frac{4}{4+7}$ . B A, quæ omnino a primis dissociantur. Crescit divisio ac distractio unitatis si quælibet fluens ex istis ultimis in differentiam fluentium homologarum convertatur, quæ divisio hoc modo successive agendo usque ad infinitum produci poterit. At 7.ªm divisam vides in

$$\left[\frac{\left(\frac{15+11}{2}\right)+\left(\frac{15-11}{2}\right)}{\left(\frac{15+11}{2}\right)-\left(\frac{15-11}{2}\right)}\right] AB - \left[\frac{\left(\frac{11+4}{2}\right)-\left(\frac{11-4}{2}\right)}{\left(\frac{11+4}{2}\right)+\left(\frac{11-4}{2}\right)}\right] AB$$

$$=\left(\frac{13}{13-2}.AB+\frac{2}{13-2}.AB\right)-\left(\frac{15}{15+7}.AB-\frac{7}{7+15}\ BA\right)$$ & sic ad infinitum. Quare si ex 1.ª & 5.ª unum tantum systema exhibentibus eruamus etiam 3.ᵃᵐ ac 5.ᵃᵐ ad unum tantum systema referri, & ab una æquatione geometrica complecti posse, turpiter decipimur, & in absurdum incidimus insanabile nostra tamen culpa, non rei, de qua agimus, necessitate, utpote qui, quæ transformatione formulæ divisimus, eodem tempore conjuncta atque una putamus.

§. 24. Addas etiam illud oportet, quod ex hac 3.ª ac 7.ª præparatione, quod erat constans in 1.ª & 5.ª utpote summam vel differentiam fluentium constantem exhibens, sit necessario fluens. Nam cum hæc 3.ª dividatur in duas fluentium differentias S A, quarum singula vi systematis fluens est, sit etiam fluens ejus complexus sive formula ipsa 3.ª necesse est: 7.ª vero, quæ dividitur in summam fluentem fluentium S Y, & in differentiam fluentem S A, necessario & ipsa fluens erit. Quarum singularum complexus proinde licet in TAB: æqualis sit protonumero, cui æquantur constantes 1.ª & 5.ª; tamen hic non est nisi fluens in hoc peculiari casu ad valorem protonumeri A B vel B A determinatus. Nam quoniam in 3.ª tam numeri (8), quam (3) sunt fluentes, arbitrio mutari possunt: si igitur eorum loco ponamus ex: gr: (5), (4), hæc 3.ª quæ erat $= AB$, sit $= \frac{5}{11}\ AB + \frac{4}{11}\ BA = \frac{9}{11}\ BA$ fluenti; & si in 7.ª loco (15) & (4), qui sunt numeri fluentes, ponamus ex: gr: (6), (12) fit 7.ª $= \frac{12}{11}\ .\ AB - \frac{6}{11}\ AB = \frac{6}{11}\ AB$ fluenti. Itaque si accipiantur $\frac{5}{11}\ AB + \frac{4}{11}\ AB$ invicem distractæ, formula 3.ª est complexus duarum fluentium diversi systematis, quorum ambo possunt esse S Y vel S A, vel ad alterutrum pertinere; idem dicas de formula $\frac{12}{11}\ AB - \frac{6}{11}\ AB$. Facile tamen singulæ ad unum reducuntur si fiat 3.ª $= \frac{9}{11}\ AB$; 7.ª $= \frac{6}{11}\ AB$: quarum singulæ convertuntur in unam fluentem alterutrius systematis pro diversa præparatione, qua affici possunt: quo facto iterum ad unitatem systematis quidem constituen-

dam, nullo modo ad naturam constantium eamdem revocantur. Quæ omnia ac singula sunt diligentissime animadvertenda.

§. 25. Insuper in serie III. invenies (*Fig.* 5.) $\frac{11}{11+o}$. AB $+\frac{o}{o+11}$ BA SA

$= \frac{11}{11-o}$ AB $- \frac{o}{11-o}$ AB SY (*Fig.* 7.): utraque tamen membra, licet

singula valore æqualia, natura prorsus diversa, invicem pugnant. Nam in primo fluens una est maxima, & ejus homologa ($o$) minima indicatur a puncto D quod intra puncta A, B semper continetur, & crescente AD usque ad AB coincidit cum puncto B: contra vero in membro secundo fluens major AB minima ostendit punctum alterius minoris semper extra puncta data A, B fluere directione prorsus contraria fluentis primi membri, quæ successive decrescendo tandem in B concurrit, ac cum minima primi membri in puncto B commiscetur. Ex hoc communis originis utriusque systematis puncto B sola additio vel subtractio unius ($o$) determinat diversam fluxus directionem utriusque systematis, qui fluxus simul nequeunt conspirare, utpote $\frac{11+o}{11+o}$. AB maxima, $\frac{11-o}{11-o}$. AB minima. Itaque hujusmodi formulæ atque systemata nullo modo invicem comparari possunt, & simul eodem tempore conciliari. Quod si in utroque membro omittatur *zero* in numeratore, retineatur in denominatore, primum membrum quod summam fluentium; secundum quod differentiam fluentium repræsentabat, & utrumque constans erat, convertitur primum in fluentem maximam; secundum in fluentem minimam, & utrumque fluens; sed primum decrescere fluendo quidem potest, non crescere; secundum crescere potest, non decrescere. Expuncto vero ($o$) tam in numeratore, quam in denominatore, utrumque membrum ad utrumque systema indeterminatum manet, determinandum una $\pm o$ additione. In singulis istis casibus non nisi unicum systema a singulo membro continetur, atque utrinque formula vere una nequit in plures dispertiri, nisi nova ipsius instituatur præparatio. Sit hæc nova præparatio nostræ TAB. (*Fig.* 6.)

$$\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right) AB - \left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right) + \left(\frac{11-11}{2}\right)} BA + \frac{\left(\frac{11+o}{2}\right) AB - \left(\frac{11-o}{2}\right)}{\left(\frac{11+o}{2}\right) + \left(\frac{11-o}{2}\right)} BA\ SA$$

$=$

$$=\left\{\frac{\left(\frac{11+11}{2}\right)+\left(\frac{11-11}{2}\right)}{\left(\frac{11+11}{2}\right)-\left(\frac{11-11}{2}\right)}\right\} AB\,SY - \left\{\frac{\left(\frac{11+o}{2}\right)-\left(\frac{11-o}{2}\right)}{\left(\frac{11+o}{2}\right)+\left(\frac{11-o}{2}\right)}\right\} AB\ SA$$

*Fig.* 8. cum ſumma fluentium in S Y nunquam poſſit fieri zero: atque ideo ultima eſt differentia fluens S A. In hoc caſu utrumque membrum in duas ſolitarias formulas diſpertitur, quarum ſingula diverſum ſyſtema invicem diſtractum complectitur. Primum enim membrum componitur a differentia fluenti fluentium homologarum A B, B, una maxima, altera minima; & a differentia fluentium æqualium A C, B C æqualis 2 C: & ſecundum membrum componitur ex ſumma fluente fluentium A B, B, & ex differentia fluentium æqualium A C, B C S A a ſumma ſubtracta: atque ideo hîc non ſolum inter primum membrum & ſecundum legitima conjunctio haberi nequit, ſed utrumque membrum, unitate formulæ ſublata, dividitur in duo ſyſtemata invicem ſeparata. Tandem omiſſo utrinque *zero*, utrumque membrum reducitur ad unitatem ſyſtematis & formulæ affinitatem inter ſe reſpuens. Hæc omittenda non erant, ut re ipſa cognoſcatur quantum illud ipſum (*o*), quod ſemper in calculis vulgo receptis prorſus negligitur, influat ad rectam ſubducendorum calculorum rationem inſtituendam, & geometricis affectionibus legitime applicandam. Hiſce primis fundamentis nititur doctrina Cap: IV. & V. P. I.ª *de legitima ſyſtematum conjunctione atque diviſione*, quæ illic ex communibus principiis nimis anguſtis indirecte eruta non niſi ab hac noſtra Theoria vere generali facile & evidenter poterat demonſtrari: tanta ineſt in Methodis generalibus vis ac potentia! Cæterum hæc pauca a formulis noſtrarum TAB: deſumpta exempla indicaſſe ſufficiat, quæ ſingulis applicari facile poterunt. Cum enim ſingula noſtrarum TAB: formula diverſas præparationes nullis limitibus definiendas ſubire poſſit, immenſum prope eſſet ſingulas perſequi & appoſitis TABULIS deſcribere.

§. 26. Ex quibus tamen omnibus ac ſingulis, quæ hîc delibavimus, exemplis conſequitur doctrina prorſus nova, tantæ tamen neceſſitatis, ut ejus ignoratione prima ac vera hujuſce Scientiæ fundamenta (vera ſcilicet ac generalis æquationum Theoria) fruſtra hactenus quæſita fuerint. Verum ſi recte advertas, in noſtra utraque TAB: duabus natura diverſis fluentibus quæcumque formula repræſentatur. Primum genus fluentium eſt illarum, quæ *coefficiente numerico in protonumerum ducto* nunc primum a mea Theoria exhibentur, quas *determinatas* in poſterum appellabo, quia *natura*, *poſitione*, *numero*, *ordine*, *dimenſione omnino determinatæ*, *valore tantum intra tamen ſyſtematis limites indeterminatæ ſunt*, atque ideo recte *fluentes* appellavimus. Secundum vero eſt illarum, quas nos litteris M, N (vulgo *x*, *y* &c.) deſignamus, *omnino & quoad omnia indeterminatæ*, *quarum natura*, *dimenſio*, *valor*, *ordo*, *poſitio*, *numerus a primis determinatis omnino pendent* (Capite ſequenti, & in progreſſu hujus Operis, palam re ipſa fiet quantum intereſt hanc in locum communis definitionem ſubſtituere). Porro in noſtris TAB: fluentes tam *determinatæ*, quam *indeterminatæ*

communi = ſigno jure copulantur, utpote ab eodem principio manantes. Quomodo vero ſingulæ hujuſmodi formulæ determinatæ ſuis legitimis indeterminatis comparatæ in ſingulas æquationes ſolitarias recte diſpertiri poſſint, a Methodo vulgata fruſtra requiras. Si enim hanc conſulas, tunc legitimam eſſe æquationem te docebit, quando primum membrum eumdem valorem obtinet ac ſecundum cui comparatur, ex quorum proinde mutua ſubtractione æquatio zero fit æqualis: hoc uno criterio ad veritatem æquationum, in quas cæco ducta calculo incidit, probandam niti cogitur, cum nihil aliud melius ac rectius ad hoc adſtruendum ex proprio penu depromere ipſa poſſit. Si hoc tamen ſatis eſſet cum ex: gr: ſingulas formulas ſuperiores TAB: A æquales (1) demonſtraverimus, legitima eſſet æquatio inter duas quaſcumque arbitrio ſumptas determinatas & indeterminatas inſtituta: & tam ex: gr: $\frac{8}{8+3} \cdot 1 + \frac{3}{3+8} \cdot 1 = M+N$ quam $\left[\frac{\left(\frac{11+8}{2}\right)-\left(\frac{11-8}{2}\right)}{\left(\frac{11+8}{2}\right)+\left(\frac{11-8}{2}\right)}\right] \cdot 1 + \left[\frac{\left(\frac{11+3}{2}\right)-\left(\frac{11-3}{2}\right)}{\left(\frac{11+3}{2}\right)+\left(\frac{11-3}{2}\right)}\right] \cdot 1 =$ $M+N$ legitima eſſet æquatio, quia tam primum membrum primæ, quam primum ſecundæ æquatur (1), quemadmodum & doctrina communis docet, & praxis confirmat. Mea tamen Theoria firmioribus ſuffulta principiis fidenter pronunciat primam veram eſſe, ſecundam, ut ut eſt, omnino repugnare: vidimus enim ſuperius fluentes determinatas primi membri primæ in ſummam duarum fluentium diviſæ duas fluentes indeterminatas $M+N$ conſtituere: fluentes vero determinatæ primi membri ſecundæ æquationis in duas differentias fluentium duorum ſyſtematum S A diſpertiri, a quibus neceſſario conſtituitur ſecundum membrum formæ $(M-N)+(M-N)$: idem dicas de aliis velim. Hæc tamen ſecunda duplici modo ad normam reduci poteſt: vel primum membrum reducendum eſt ad formam ſecundi, vel ſecundum ad formam primi. Primo tamen modo præpoſtera initur via: non enim quod omnino indeterminatum eſt, regere fas eſt quod aliquo modo determinatur, ſed ab hoc alterum moderari recta agendi ratio poſtulat.

§. 27. Quare male ſe gereret ille qui ob æqualitatem valoris duas ejuſdem numeri diverſas præparationes, ſive duas diverſas fluentium determinatarum formulas ſimul compararet, atque ſigno = conjungeret, ſi diverſam utrinque præparationem intactam manere jubeat. Ita ex: gr: repugnans eſſet æquatio $\frac{8}{8+3}AB + \frac{3}{3+8}BA$ (*Fig.* 1.) $SA = \frac{15}{15-4}.AB - \frac{4}{15-4}.AB$ (*Fig.* 3.) SY, licet, ſi valor tantum ſpectetur, legitima videatur: nequit enim ſyſtema S A eodem tempore eſſe ſyſtema S Y, & quæ eſt ſumma conſtans, eſſe ſimul differentia conſtans. Non tollitur igitur repugnantia, niſi utraque ad identita-

titatem reducatur, hoc eſt niſi primum membrum reducatur ad ſecundum, vel hoc ad primum: hoc vero facto, comparationis terminus ad æquationem conſtituendam neceſſarius ſtatim evaneſcit; neque reliquus comparationis terminus ſupereſt, niſi indeterminatis M, N comparetur, hoc eſt niſi ex: gr: eadem $\frac{8}{8+3}$ AB dicatur M, & eadem $\frac{3}{3+8}$ BA dicatur N, ut haberi poſſit vera æquatio inter identicum $\frac{8}{8+3}$ AB + $\frac{3}{3+8}$ BA & identicum M+N. Simili modo nequit cum veritate conciliari æquatio $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)\right)AB = \frac{1}{2}\left(\frac{19+8}{19-8}\right) AB - \frac{1}{2}\left(\frac{19-8}{19-8}\right) AB$ niſi intelligatur primum membrum fluentem majorem SA indicare; ſecundum fluentem minorem SY valore utrumque æquale: ac proinde ſeorſim modo unum, alterum modo ſumendum eſſe prout limites diverſi fluenti eidem aſſignantur. Sed in primo caſu, repudiato ſecundo, erit primum $\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right) AB + \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB = \left(\frac{M+N}{2}\right)+\left(\frac{M-N}{2}\right) = M$: contra in ſecundo $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{19+8}{19-8}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{19-8}{19-8}\right)\right)AB = \left(\frac{M+N}{2}\right)-\left(\frac{M-N}{2}\right) = N$. Hîc juvat paucis animadvertere Analyſim vulgatam hanc eandem æquationem ſuis elatam ſymbolis, hoc eſt $x + \frac{a}{2} = x - \frac{a}{2}$, (quam certe, cum valor utrinque idem reperiatur, ſi ſecum ſit conſentiens, nullo modo repudiare poteſt) novo tamen identitatis utriuſque $x$ deceptam errore falſitatis damnare. Ratio autem vera cur hæc duo membra nequeant inter ſe conciliari, non in valoris utriuſque membri inæqualitate reſidet, ſed in naturæ diverſitate. Si enim ſit $\frac{a}{2} + x$ SA $= x' - \frac{a}{2}$ SY, erit quidem $\frac{a}{2} + x$ SA (TAB. III. *Fig.* 15.) = AC + CD = AD $= x' - \frac{a}{2}$ = BD′ − BE = ED′, poſita $x' = x + a$, quæ non concur-

currunt in idem commune punctum fluens D. Quod si $x > \frac{a}{2}$ tunc primum membrum est fluens major systematis S Y, & $x + \frac{a}{2}$ S Y $= x' - \frac{a}{2}$ S Y: in quo posita $x' = x + a$, vel $x = x' - a$ valores utrinque æquantur: sed si constructio instituatur, erit $x + \frac{a}{2}$ ( *Fig.* 16. ) $=$ A C + C D $=$(BE+EF+FD')−BE$=$ED'$=$AD invicem distractæ. Quare tandem consequitur illius comparationis inter duo membra, quæ dicitur æquatio, hactenus ambiguam ac falsam fuisse traditam definitionem: cum vera æquatio nihil aliud sit nisi *comparatio ejusdem numero quantitatis sub forma fluentium determinatarum constitutæ cum se ipsa indeterminatis* M, N *expressa: ita ut vera æquatio non sit comparatio æqualis cum æquali*, *sed identici cum identico*. Hoc rigide demonstrabitur Capite sequenti §. 2. Quare ( juvat hoc urgere ) ad veram æquationem obtinendam non satis est quocumque modo formulam fluentium determinatarum indeterminatis arbitrio sumptis M, N ( ut fit ) comparare: sed ita conformandæ sunt absolute indeterminatæ M, N, ut in easdem fluentes determinatas convertantur: quod nisi consequatur, semper hujusmodi comparatio, atque proinde æquatio, repugnans erit & absurda. Hinc tandem vera concipitur notio indeterminatarum M, N ( vel $x$, $y$ ), atque earum natura, munus, atque necessitas, ut ad veram ac legitimam æquationem identicum inter & identicum fas sit pervenire.

§. 28. Ut exemplo rem declaremus, sumatur formula geometrica $\frac{11}{11}$ AB, quæ etiam dicatur M: erit igitur $\frac{11}{11}$ A B eadem ac M: ergo $\frac{11}{11}$ . A B $=$ M erit vera æquatio: si sit A B $=$ M, erit M ipsa A B integrá & una protonumerum referens. Fiat nunc $\frac{11}{11}$ A B $=$ M $= \frac{8}{8+3}$ . AB $+ \frac{3}{3+8}$ B A, ex qua si deducatur $\frac{8}{8+3}$ A B $+ \frac{3}{3+8}$ B A $=$ M, deducitur quod implicat contradictionem: nequit enim una tantum indeterminata M fieri identica cum duabus fluentibus determinatis invicem distinctis. Ut igitur vere perficiatur æquatio, indeterminata M in duas dividatur oportet indeterminatas M, N, atque fiat $\frac{8}{8+3}$ AB $+ \frac{3}{3+8}$ B A $=$ M+N, ut M possit esse eadem ac $\frac{8}{8+3}$ A B, & N eadem ac $\frac{3}{3+8}$ B A. Rursus quoniam est $\frac{8}{8+3}$ AB $+ \frac{3}{3+8}$ B A $=$

$= M+N = \frac{15}{15-4} AB - \frac{4}{15-4} AB$, si fieret $\frac{15}{15-4}. AB - \frac{4}{15-4} AB = M+N$ offenderetur absurdum: nequit enim N signo positivo affecta, licet sit identica cum $\frac{4}{15-4} AB$, simul cum positiva M identica cum $\frac{15}{15-4} AB$, esse identica cum differentia determinatarum fluentium primi membri: ut æquatio igitur rectificetur, afficienda est N signo $-$, ut inter $\frac{15}{15-4} AB - \frac{4}{15-4} AB = M-N$ vera identitas habeatur. Insuper sumatur vera æquatio systematis SA, $\frac{8}{8+3} AB - \frac{3}{3+8} BA = \left(\frac{8}{8+3} - \frac{3}{8+3}\right) AB = M-N$, in qua M est identica cum $\frac{8}{8+3} AB$, & N cum $\frac{3}{3+8} BA$. Sed quoniam $\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right) AB + \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB\right)$ $- \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3+8}{3+8}\right) BA - \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB\right)$ ex demonstratis ut identitatem indeterminatarum obtineamus, ponenda est $= \left(\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right)\right)$ $- \left(\left(\frac{N+M}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)\right)$; & in hoc casu $\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right)AB + \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB$ fluens major non amplius est $= M$, sed $= \left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right)$; idem dicas de minori N. Similiter $\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB =$

$$\frac{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3+8}{3+8}\right) AB - \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right) BA + \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) BA\right)}{1} =$$

$$-\left(\left(\frac{N+M}{2}\right) - \left(\frac{N-M}{2}\right)\right) + \left(\left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{N-M}{2}\right)\right) =$$

$-\frac{3}{3+8} AB + \frac{8}{8+3} BA = -M+N$ est vera æquatio: prima enim M convertitur in minorem fluentem, N conversa in majorem. Quæ tamen si referatur ad primam, invenies $M-N = -M+N$, quæ certe absurda est. Tandem est tam

tam $\left(\frac{8-3}{8+3}\right)$ A B $=$ M — N, quam $\left(\frac{15-4}{15-4}\right)$ A B $=$ M — N, tamen indeterminatæ M, N primæ longe differunt natura a secundis, ita ut absurda esset æquatio primæ M—N$=$M— N secundæ: licet inter utrumque membrum identitas intercedere videatur, quæ tamen nisi ambæ ad unum aut ad alterum systema reducantur, haberi nequit: hoc est nisi separentur invicem, & fiat $\left(\frac{8-3}{8+3}\right)$A B $=$ M—N, vel $\left(\frac{15-4}{15-4}\right)$ A B$=$M—N. Quod cum infinitis modis fluentes determinatæ variare possint, infinitis modis, qui primis ad amussim respondeant, conformandæ sunt formulæ ex indeterminatis M, N conflatæ, ut identitas semper inter utrasque servetur, sine qua vera æquatio inter utrasque nec esse, nec dici potest. Vide igitur quam caute incedendum in hoc difficili sane negotio, quo tamen uno tota nititur legitima solutionis æquationum Theoria.

§. 29. Ex hac enim nova quasi luce repente exorta tenebræ illæ omnes, quibus misere offundebatur vulgata æquationum doctrina, penitus disjiciuntur ac falsitas illorum principiorum, quibus hæc doctrina superstruitur, in apertum prolata nullo negotio profligatur. Ut hoc intelligas, revoces oportet methodum notam æquationes omnes in duo genera dispertiri. Primum genus est illarum, quas determinatas vocat, quia non nisi uno tantum indeterminato symbolo $x$ vel $y$ termini indeterminati afficiuntur: secundum illud est, in quibus duæ saltem indeterminatæ reperiuntur, quas variabiles appellat. Hanc æquationum divisionem, quam longe ab ipsa æquationum natura, atque ideo a veritate (cum supra quæ dicuntur determinatæ non nisi limitis ostenderim) abhorreat quisque videt. Sed etiam hac divisione concessa ad examen prius revocemus duo illa principia, quibus ipsa nixa ad primum genus æquationum solvendum accedit. Primum terminos omnes, in quibus absolutæ indeterminatæ (quas incognitas appellat) plures aut una inveniuntur, ab una æquationis parte, mutatis signis, collocare jubet, cæteris fluentibus determinatis (quas cognitas dicit) ad alteram æquationis partem translatis, ut valorem incognitarum, de quo unice sollicita est, consequatur. Secundum, quo uno etiam utitur ad probandam æquationum veritatem, in eo situm est, ut ambobus membris ab alterutra æquationis parte collocatis, æquatio æqualis zero ponatur: quæ æquatio, substitutione valoris jam inventi in locum incognitarum facta, si vere evanescit, nullum amplius de legitima æquatione ambigendi locum manere posse fidenter docet. Verum quod ad primum attinet, licet abstracte sumptum, verum esse nemo inficias ibit, tamen eo modo, quo Analysis vetus hoc utitur, falsum esse, mancum, inutile sic demonstro. Falsum: quando nimirum incognitæ in primo membro collocatæ non eam penitus formam referant, quam habent fluentes determinatæ secundi membri, ad quas proinde opportunis artificiis (hoc opus, hic labor!) primæ sunt prius reducendæ, ut æquatio legitima esse & dici possit: quod ni fiat, identitas

tas utriuſque membri non ſervatur, nec propterea legitima æquatio. Hoc tantum abeſt ut vetus Methodus conſequi nitatur, ut præpoſtero prorſus ordine, mordicus retentis indeterminatarum numero, ordine, dimenſione, poſitione (quæ prima forte obtulit æquationis conformatio) reductionem in ſecundum membrum, ut ſimplicius fiat, totam convertit. Hinc indeterminatæ eo modo tractantur ac ſi omnino determinatæ eſſent & etiam conſtantes, legem quam nullam habent determinatis daturæ, & tamen fluentes determinatæ in unum conglobatæ ad unitatem reducuntur. Quo fit ut ſimul violento prorſus, & contradictorio modo ea ſimul conjungantur, quæ inter ſe conciliari abſolute repugnant. Ex quo alio ſane falſo principio ſcatet æquatio illa abſurda, in quam identidem ipſa offendit, poſitivi cum negativo, ſi hanc excipias? a quo etiam immaniſſimum illud abſurdum, hactenus re ipſa ignotum, ſub nomine tantum imaginarii cognitum; a quo tota nemine ſuffragante contaminatur, profluxiſſe quis nunc aperte non videt, & univerſim eliminare non poteſt?

§. 30. Adde alterum in quem cadit errorem falſa opinione decepta, qua ſcilicet arbitratur eam perpetuam naturam &c. quam ſuis incognitis $x$, $y$ ante tranſpoſitionem tribuebat, hac etiam peracta, ſemper retinere, nec omnino in alias tranſmutari: teſtis praxis ipſa, qua utitur, quæ incognitas ſymbolis identicis $x$ vel $y$ ſemel repræſentatas, in unum colligit, ſecus quæ diverſis, perinde ac ſi hæc tranſpoſitio nullam niſi in ſignis induceret mutationem. Verum diligentius in hanc terminorum tranſpoſitionem vulgo uſurpatam eſt inquirendum. Duobus modis Analyſis vetus hac methodo utitur: vel enim ſuas permutat incognitas, ut quæ erant ab una parte ad alteram transferantur: vel omnes ab una parte translatas comparat alteri membro conſtanti. Primo modo ajo ſuarum incognitarum permutari invicem oportere naturam, ut aliquid veri ex hac permutatione deducat. Ut id exemplo declaretur ſumptæ fluentes homologæ ſyſtematis SA §. 28. $M = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)\right) AB}{1}$; $N = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{3+8}{3+8}\right) BA - \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB}{1}$ ſymbolis communibus efferantur, & erunt $M = \frac{1}{2} AB + x$; $N = \frac{1}{2} BA - x$: facta in iſtis incognitarum permutatione invenies $-x = \frac{1}{2} AB - M$; $x = \frac{1}{2} BA - N$, quæ reſpondent noſtris $-\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right) AB = \frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right) AB - M$;

$\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB = \frac{1}{2}\left(\frac{3+8}{3+8}\right)BA - N$: & retento in istis eodem ac primum valore in M, N, $x$, invenies ex prima $-\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB = -\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB$: ex secunda $\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)BA = \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)BA$: sive uterque $\frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB = \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB$ sive $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{11}\right)AB = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{11}\right)AB$ sive $\frac{5}{22}AB = \frac{5}{22}AB$, æquatio prorsus identica; quæ ex demonstratis est fluens minor systematis SA, & $\frac{5}{22}AB = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+17}{5+17}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{17-5}{17+5}\right)\right)AB}{1}$ $= M = \frac{1}{2}AB - x$, cujus homologa ut inveniatur, fiat $-x = \frac{1}{2}AB - M = -\frac{1}{2}BA - M$ (ut vere sit $x$ negativa in hoc systemate) ex qua $x = \frac{1}{2}BA + M = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{17+5}{17+5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{17-5}{17+5}\right)\right)}{1}AB = N$, sive fluens major: igitur facta hac permutatione, natura fluentium invicem permutatur. Verum id facile obtineri potest ex primis sumptis formulis, si in locum $\frac{8+3}{8+3}$ substituatur $\frac{17+5}{17+5}$ in quo casu $M = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{17+5}{17+5}\right)AB + \frac{1}{2}\left(\frac{17-5}{17+5}\right)AB}{1}$; $N = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5+17}{5+17}\right)BA - \frac{1}{2}\left(\frac{17-5}{17+5}\right)AB}{1}$; ergo communis permutatio fluentium prorsus inutilis est, & erroris caussa, si ponatur in $-x = \frac{1}{2}AB - M$,

in

in hoc ſyſtemate M major $\frac{1}{2}$ A B ut erat ante permutationem, quæ vere in $\frac{1}{2}\left(\frac{17-5}{17+5}\right)$ A B poſt permutationem mutata fuerat.

§. 31. Supereſt altera ratio permutationis omnium incognitarum ab una parte, qua utitur perpetuo vetus Analyſis ad inveniendum valorem tantum incognitarum, de quo unice ſollicita eſt. Poſitis igitur $M = \frac{1}{2} AB + x$; $N = \frac{1}{2} AB - x$, ex prima eruit $M - x = \frac{1}{2} AB$; ex ſecunda $N + x = \frac{1}{2} AB$, ſive ex prima differentiam $M - x$, ex ſecunda ſummam fluentium $= \frac{1}{2}$ A B. Hic profecto veteri Analyſi aqua hæret, atque quo ſe vertat neſcit, niſi a mea Theoria ſuppetias ferat. Quæro enim ab illa quo tandem modo ex differentia, vel ex ſumma incognitarum eidem $\frac{AB}{2}$ æquali fluentes ſingulas ſingillatim determinabit, diverſamque earum naturam, & proprio loco geometrico ſingulas applicabit? Quod ſi comparatione inter ipſas inſtituta, ex qua cum ſit $M - x = \frac{AB}{2}$, & $N + x = \frac{BA}{2} = -\frac{AB}{2}$ (ut docet) oritur $M - x = - N - x$, & (facta $x$ utrinque identica, ut vult) $M = - N$: vel etiam ſi placet, poſita $M - x = N + x$, $2x = M - N$, quid tandem aliquo modo cum ratione conſentiens colligere poterit? Profecto nunquam ab hiſce ambagibus, ſuis propriis utens viribus, ſe ſe expedire poterit, niſi opportunam a mea Theoria opem imploret. Hæc enim illam docebit, facta hac fluentium tranſpoſitione, fluentes primas, quæ erant homologæ ad eumdem protonumerum A B applicatæ, diſtrahi invicem in duo diverſa ſyſtemata communis quidem protonumeri $\frac{AB}{2}$, ſed diverſæ naturæ ſingula nullo inter ſe vinculo colligata. Nam retentis etiam iiſdem fluentium valoribus, ex prima erit $M - x = \frac{8}{8+3} AB - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} AB = \frac{11}{11} \cdot \frac{AB}{2} = \left(\frac{15-4}{15-4}\right) \cdot \frac{AB}{2}$ S Y $= M - N$; & ex ſecunda $N + x$

Tt 2 =

$$= \frac{3}{11} AB + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} AB = \left( \frac{6}{11} + \frac{5}{11} \right) \frac{AB}{2} = \frac{11}{11} \frac{AB}{2} = \left( \frac{8+3}{8+3} \right) \frac{AB}{2}$$

$= M+N$: duo diversa systemata invicem distracta. Hæc tamen solitaria facile iterum in unum systema reducuntur, si fiat $(M - N) + (M + N)$

$$= \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB = \frac{11}{11} AB = \frac{8}{8+3} AB + \frac{3}{3+8} BA = M+N \; SA$$

$= \frac{15}{15-4} AB - \frac{4}{15-4} AB = M - N\,SY$; quibus artificiis formulæ, quæ sunt unæ, in plures dividi, & contra plures in unam coalescere possunt; quibus omnino in calculo communi ignoratis, tam divisio unius æquationis in plures, quam plurium in unam conjunctio perperam instituta quot errorum & quidem gravissimorum caussa fuerit suo loco demonstrabitur. Hæc igitur terminorum transpositio usu recepta, male intellecta, ac pejus ad usum traducta, inutilis atque exitiosa prorsus est.

§. 32. Quid vero utilitatis ex altera, qua utitur, methodo transpositionis omnium terminorum ab una æquationis parte, reducendi æquationes omnes ad zero, profecto non video: quid mali vero exoriatur luce clarius perspicio. Nam nemo quidem inficias ibit, facta hac præparatione, quamcumque æquationem necessario evanescere oportere: identicum enim ab identico subtractum fieri zero quis ignorat? Sed quid inde? quo modo hac methodo naturam, numerum, &c. fluentium determinatarum, quæ prorsus scitu necessaria ad formulas geometricis applicandas, invenire poteris prorsus ignoro. Dices, hac methodo cognosci, utrum valor alterius cujuscumque æquationis congruat an non cum valore propositæ zero comparatæ, ut earum consensio aut dissentio eruatur. Verum satis superius demonstratum fuit, infinitis prope modis quæ sunt valore æquales, natura variare posse, cui unice est attendendum: nec ab hoc aliquid erui posse ad eam formulis constructionem dandam, quam revera varia sua conformatione requirunt. Contra vero nullus dubito hanc usurpatam methodum multum conferre ad errores erroribus agglomerandos ob eam falsam, qua vetus Analysis præoccupatur, opinionem, æquationes, quæ valore nullescunt, posse nullo discrimine inter se æquari, quæcumque sit illarum natura. Hac tamen ratione a dimensione ad dimensionem, a natura ad naturam, a genere ad genus transitus perperam fit, & quæ non nisi uni naturæ formularum conveniunt operationes, nullo concilio singulis applicantur. Sexcenta possem, ne longius abessem, hujusce gravissimi erroris exempla ex veteri Analysi deprompta hîc in medium proferre, pro re nata tamen in posterum producenda.

§. 33. Hujusce vero erroris caussam in eo arbitror sitam esse, quod scilicet fluentium natura prorsus ignorata, duplicem etiam ipsius zero naturam vetus Analysis ignorat. Aliud enim est *zero* quod oritur a subtractione identici ab identico (cujus tantum notio vulgo habetur), & aliud est *zero*, a quo originem ducit, & in quod tandem continua sui fluxus diminutione evanescit quævis fluens

soli-

folitaria & una. Verum de hoc ultimo prorfus ignara vetus Methodus, ut æquationem ad zero traducat, ad primum confugere cogitur. Incredibile dictu eft in quot errores atque ambages ipfa fe conjecerit hac duplicis zero ignoratione, qui opportune a nobis exponentur. Quod tamen ad rem noftram pertinet fatius duco hoc fequenti exemplo declarare. Sumptis iifdem formulis §. 31. tam erit zero æqualis $M - \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{8+3}{8+3}\right)AB + \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB\right)}{1} = o$

$= M - \left(\frac{AB}{2} + x\right)$, (ut ipfa vult), quam

$N = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3+8}{3+8}\right)BA - \frac{1}{2}\left(\frac{8-3}{8+3}\right)AB}{1} = \frac{AB}{2} - x$, dummodo loco (3)

ponatur (*o*) ut fit $N = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{11+o}{11+o}\right)BA - \frac{1}{2}\left(\frac{11-o}{11+o}\right)BA}{1} = \frac{o}{11+o} \cdot BA$

$= B$, $M = \frac{1}{2}AB - o$. Prima utpote fubtractio identici ab identico femper erit zero. Quis hoc nefcit? verum quid inde utilitatis? At fecunda nos docet N effe fluentem minorem fyftematis S A intra limites *zero* minimum, & $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{11}$ BA maximum fluxu fuo excurrentem, cui in primo cafu refpondet fua homologa maxima $M = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{11+o}{11+o}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{11-o}{11+o}\right)\right)}{1} AB = AB$;

& in fecundo minima $M = \frac{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}}{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{11}{2}-\frac{11}{2}}{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}}\right]\right]}{1} AB$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{11} AB = \frac{1}{2} AB$, quæ proinde nullo modo nullefcere poteft.

Hinc limites utriufque fluentis rite determinantur, & ex uno peculiari valore alterutrius fluentis nullo negotio valor alterius obtinetur. Hoc nunc fatis fit ad id

id quod volumus declarandum. Quare si hæc duo principia, quibus Analysis communis in solutione æquationum tantum nititur, tam inepta, tam erroribus obnoxia demonstraverim, jure me in ipso Præfationis exordio §. 4. dixisse *nullam potius, quam imperfectam nos habere Analysim proprie dictam*, fateatur quisque oportet, nisi mihi indicet, quid reliquum veteri Analysi restet, quo auxilio in æquationum solutione atque constructione rite peragenda niti tuto possit. Quæ cum ita sint æquis rerum æstimatoribus judicandum relinquo, quæ spes in posterum in hac, quæ prostat, Analysi ponenda sit, quæ hæc omnia ac singula a nostra Theoria inventa summæ quidem difficultatis atque indaginis, quibus sine vera Analysis geometrica stare nequit, ne suspicata quidem fuerit: sed principiis falsis, fallacibus ad libidinem confictis nullo ac præpostero ordine applicatis perturbaverit omnia atque miscuerit.

§. 34. Ut vero omnis absit a justa hac contra vulgatam methodum criminatione invidia, animadvertas velim, præclarissimos illos Viros ingenio & doctrina præstantes, qui in hac excolenda tot labores, atque vigilias insumpserunt, omnes ad unum oppositam prorsus illi (quæ hominum est conditio), quam nunc ineundam docemus, initio statim institisse viam: ut minime mirandum sit, tantam ingenii vim a vero suo fine detortam frustra ac perperam insudasse, totamque hanc provinciam ignotam adhuc manere. Et sane statim ac primi illi ingenio præstantes viri ad Geometricam hanc Analysim promovendam atque amplificandam animum converterunt, nihil aliud sibi quærendum putarunt, nisi ut ex aliquibus conditionibus datis cognitarum simul cum incognitis conjunctione eam sibi efformarent æquationem symbolis arbitrio sumptis, in quibus totam Analyseos naturam pendere arbitrati sunt, qua possent ignotum, quod quæritur, investigare: quod inventum satis esse duxerunt lineis geometricis quocumque modo applicare, ut naturam geometricam induere dicatur; & sub ditione Analyseos geometricæ transire. Ignotum vero hoc cum putarent primis Arithemeticæ notionibus decepti non posse nisi in ignoratione valoris consistere; nihil aliud æquationibus quæri posse statuerunt, nisi ex datis aliquarum quantitatum valoribus valores incognitarum investigare. Hinc nulla notio fluentium, nulla de earum limitibus facta mentio; nulla de diversitate systematum a diversa ejusdem formulæ configuratione pendentium cognitio; nulla de legitima ejusdem formulæ divisione, aut de plurium in unam conjunctione certa regula; nulla tandem de gravissimis, quas nunc tradimus, rebus ad Scientiam hanc rite ædificandam prorsus necessariis suspicatio.

§. 35. Hanc quam supra commemoravimus fuisse viam, quam in hoc negotio instituendam sibi proposuerint omnes a Cartesio Analystæ, & ad hanc sternendam leges, regulas, præcepta, artificia omnia, quæ in suis institutionibus tradiderunt, fuisse intenta, ut intelligatur; satis est, quæ præclarissimus Riccatus T. I. L. I. suarum Institutionum, omnium firmata consensu, docet, in medium proferre. Hic postquam Cap: IV. §. 5. æquationem sic definiverit: nempe *ratio æqualitatis, quæ inter duas quantitates intercedit, æquatio dicitur, & signo = indicatur, quod signum æqualitatis appellamus.....* „ Quantitas, quæ ante signum „ est, dicitur primum æquationis membrum, ea quæ est post signum, dicitur mem-

„ brum

„ brum alterum, & homogeneum comparationis „ quo nomine semper in communi methodo valor datus designatur; & §. 7. asseverat „ æquationes præcipue „ institutas, ut incognitæ quantitatis *valor* inveniatur. Si enim operationum au- „ xilio in utramque æquationis partem (salva semper æqualitate) versare pos- „ simus, ut in una sola supersit incognita quantitas, in altera tantum cognitæ „ quantitates habeantur; tunc incognitæ *valor* est inventus, quod vocatur æqua- „ tionem resolvere; *valor inventus* dicitur æquationis radix „.... Omitto multa quæ contra hanc doctrinam mea Theoria superius tradit, ut ostendam, quod hîc insisto, a communi recepta opinione putari ad solum *valorem* incognitæ investigandum æquationes inventas esse, atque hoc uno principio ejus Theoriam superstructam esse. Capite vero VI. §. 1. „ Problema nihil aliud est, quam pro- „ positio, in qua ex quantitatibus aliquibus notis nonnullæ ignotæ quantitates „ investigandæ proponuntur.... Cum vero quantitates ignotæ detectæ sunt, & „ determinatæ, tunc problema dicitur resolutum „. Cap: vero VIII. §. 1. ad æquationum inventionem fatetur sæpe magna opus esse arte: „ verum cum omnia „ a variis Problematum circumstantiis pendeant, *nullas a nobis assignare posse* „ *constantes regulas certum est* „ quibus plane fatetur nullis principiis generalibus Problematum solutionem niti posse: ac tandem §. 2. „ oportere *ait* ut proble- „ ma geometrice solutum dicatur, *valorem* illum in lineis aut aliis geometricis „ quantitatibus exhibere „.

§. 36. Demonstrata falsitate atque imbecillitate illorum principiorum, quibus solutio æquationum vulgo determinatarum usu recepta nititur, restat paucis investigare quibus artificiis ad æquationes secundi generis tractandas muniatur. Si nostram consulas Theoriam, hujusmodi æquationes duabus fluentibus constantes ad illud genus pertinent, quarum linearium solutio non nisi hoc magno veritatum apparatu, quas in superioribus Capitibus ordine ac sensim eruimus, legitime consequi potest (quod etiam in similibus altioris ordinis in progressu Operis demonstrabitur): quæ veritates cum omnino ignorentur a communi Methodo, per se patet ad hasce legitime tractandas imparem ipsam omnino esse. Itaque in hisce solvendis linearibus (de quibus nunc tantum agere licet) si illi se se offerant solitariæ, cum neque ut integras atque unas tractare, neque in plures legitime dispertiri sciat, ad Geometriæ auxilium confugere cogitur; de qua tamen quantum cum utriusque Scientiæ damno abutetur, legitima harum formularum constructio superius tradita & Caput IX. satis manifeste ostendunt. Quod si duæ diversæ solitariæ æquationes proponantur, cum non nisi de determinatione valoris singularum variabilium quæri posse falso credat, una, qua utitur methodo, illa est, ut scilicet in utraque solitaria ab una æquationis parte eadem indeterminata $x$, vel $y$ a coefficientibus liberata collocetur, quo possit secundum membrum unius cum secundo membro alterius comparare, & ad tertiam æquationem una tantum variabili constantem pervenire: ex qua demum, valore istius variabilis invento in primis substituto, alterius variabilis valorem in utraque derivat. Hæc methodus, *methodus eliminationis* vulgo appellatur.

§. 37. Hîc contra multa reponi possent ad falsitatem hujusce methodi arguen-

guendam, quæ Cap: IX. reservamus; nunc satis est animadvertere, primo methodum hanc a falsa ea opinione ortam, qua scilicet creditur variabiles $x$, $y$ esse tantum valore incognitas, sed natura determinatas, atque ut determinatas (sive ut protonumeros) tractandas, nulla de earum fluxu notione ante percepta: secundo æquationem, quæ ex eliminatione unius variabilis postea descendit, esse legitimam, quam tamen repugnantem valore & natura, si utraque variabilis quæ remanet utrinque identica (ut fit) sumatur, esse §. 26. docet; natura tantum, si diversa, ut in §. 27, sumatur. Propositis enim ex: gr: æquationibus $y = \frac{a}{2} + x$; $y = \frac{a}{2} - x$, si utrinque $y$ identica sumatur, & fiat (ut jubet methodus communis) $\frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} - x$, comparatur fluens major cum minori ejusdem systematis S A, quæ nunquam natura, valore in uno tantum casu, in quo $x$ est zero, simul conveniunt: ex hac invenies $2y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$, & $x = o$, ex cujus substitutione primæ fiunt $y = \frac{a}{2} + o$; $y = \frac{a}{2} - o$, casu unico in quo valore invicem æquantur: tamen ex primis invenies $x + x = (-\frac{a}{2} + y) + (\frac{a}{2} - y)$, quæ ex nostra Theoria est universim differentia fluens fluentium homologarum systematis S A. Verum si in eadem $\frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} - x$, fiat $x = \frac{a}{2}$, invenitur $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = o$ sive $\frac{a}{2} + x = o$, quæ est absurda, si inter hæc duo membra æqualitatem intercedere intelligas, ac nisi invicem segregentur, ut docet §. 26: & tamen in methodo communi passim hæc æquatio usurpatur tamquam legitima ac ejus necessaria consecutio $x = -\frac{a}{2}$ donec ex proprio penu depromitur, aliis objicitur tamquam falsa. Rursus propositis æquationibus $y = x + \frac{a}{2}$; $y = x - \frac{a}{2}$ (quæ ex nostra Theoria sunt fluentes homologæ systematis S Y) invenies more communi $x + \frac{a}{2} = x - \frac{a}{2}$ (& demptis identicis $x$, $x$) $\frac{a}{2}$

=

$= - \frac{a}{2}$ consecutio necessaria in methodo vulgata. Verum si fiat $x - x$ $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ ex nostra Theoria colligimus tunc $x - x$ esse differentiam constantem fluentium systematis S Y, quam revera requirit, atque idem esse ac $y - y$ in primis. At si fiat $x = \frac{a}{0}$, sive infinita, & substituatur in primis, utræque $y$ fiunt fluentes maximæ limitis systematis S Y infinitæ, constanti semper ac eadem differentia ($a$) inter se distantes, quæ proinde nequeunt eumdem valorem in quocumque casu obtinere. Sed hæc sufficiant ad hanc etiam methodum eliminationis repudiandam. Alii viderint quid reliquum Analysi vulgatæ supersit ad æquationes rite firmandas, & legitime solvendas: ego certe quidem quid esse possit prorsus ignoro.

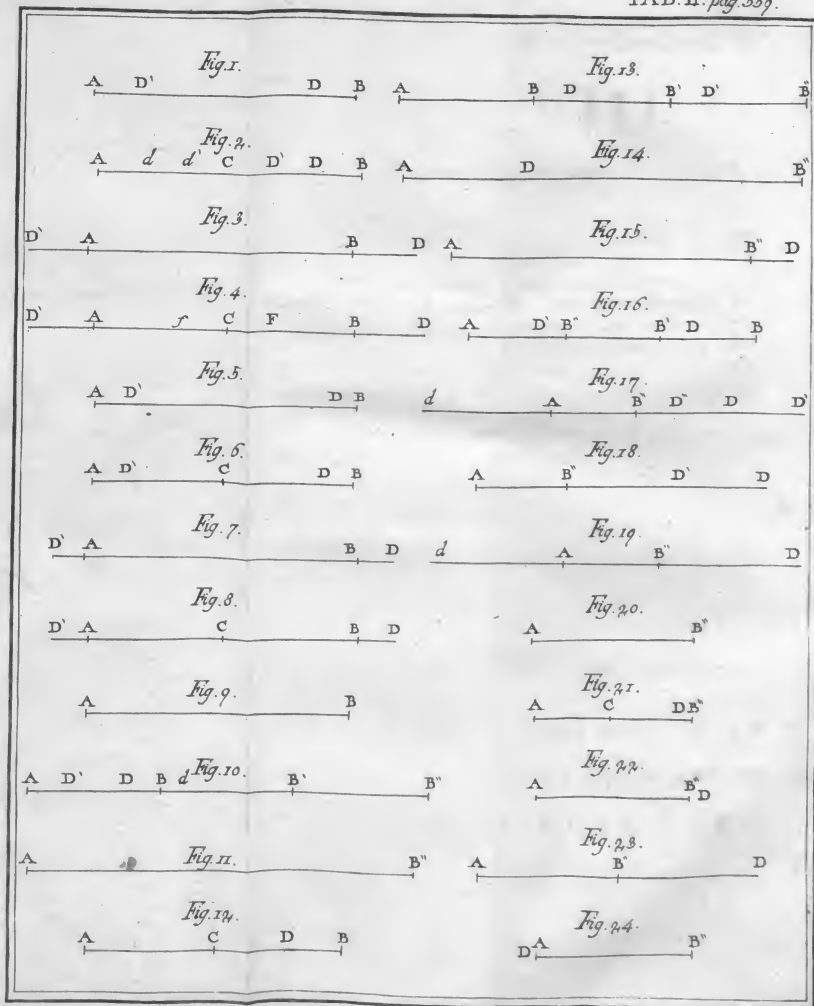
§. 38. Finem huic Capiti imponens prima ac universalia principia compendio perstringimus, quibus totum hoc novæ Analyseos Geometricæ sane immensum ædificium, veteri diruto, instaurare intelligimus: quæ duobus hisce generalibus Problematibus universim comprehenduntur. I.um quod directum est, quærit datum quemcumque numerum abstractum artificiis analyticis sub legitima formula concludere, & ad regularem Locum geometricum ab ipsa indicatum traducere. Numerus abstractus omnino indeterminatus symbolis M, N (vel $x$, $y$) elatus sibi ipsi sub formula fluentium determinatarum comprehenso (§. 27.) comparatus, est id quod dicitur æquatio, quæ nihil aliud est nisi *comparatio identici indeterminati cum identico ad aliquod systema determinato*. Fluentes determinatæ donec protonumero abstracto (1) afficiuntur, formularum analyticarum naturam induunt, & vere formulæ analyticæ appellantur, utpote propriæ hujusce Analyseos abstractæ: sed facta hujusce protonumeri abstracti (1) in protonumerum geometricum conversione (§. 19.) legibus geometricis subjiciuntur, & vere geometricæ fiunt: ab hoc transitu ab abstracto ad concretum pendet totum id, quod vulgo dicitur *formulas analyticas construere*. Verum cum quæcumque formula analytica infinitimode (§. 20.) in alias tam regulares, quam irregulares formas transmutari possit, enitendum maxime est ut certis legibus formula analytica subjiciatur ad Locum geometricum continuum ac regulare consequendum. II.um primo inversum contra quærit datam formulam geometricam in analyticam transmutare: hoc est a minus generali legibus quantitatis continuæ limitato ad absolutum generale quantitati tantum discretæ subjectum. Verum in hac Scientia quæ Analysis dicitur, primum formula analytica origine ac natura locum tenere debet; secundum in geometricum transformatio: hinc Problema I.um directum: II.um inversum jure dicendum est.

§. 39. In hac mutua Analyseos cum Geometria & viceversa communione atque consensione facile est ex dictis cognoscere nullam ad valorem peculiarem ac determinatum quantitatis rationem haberi posse. Ni enim statuatur primo Systema, nullo modo haberi possunt limites intra quos fluentium valores peculia-

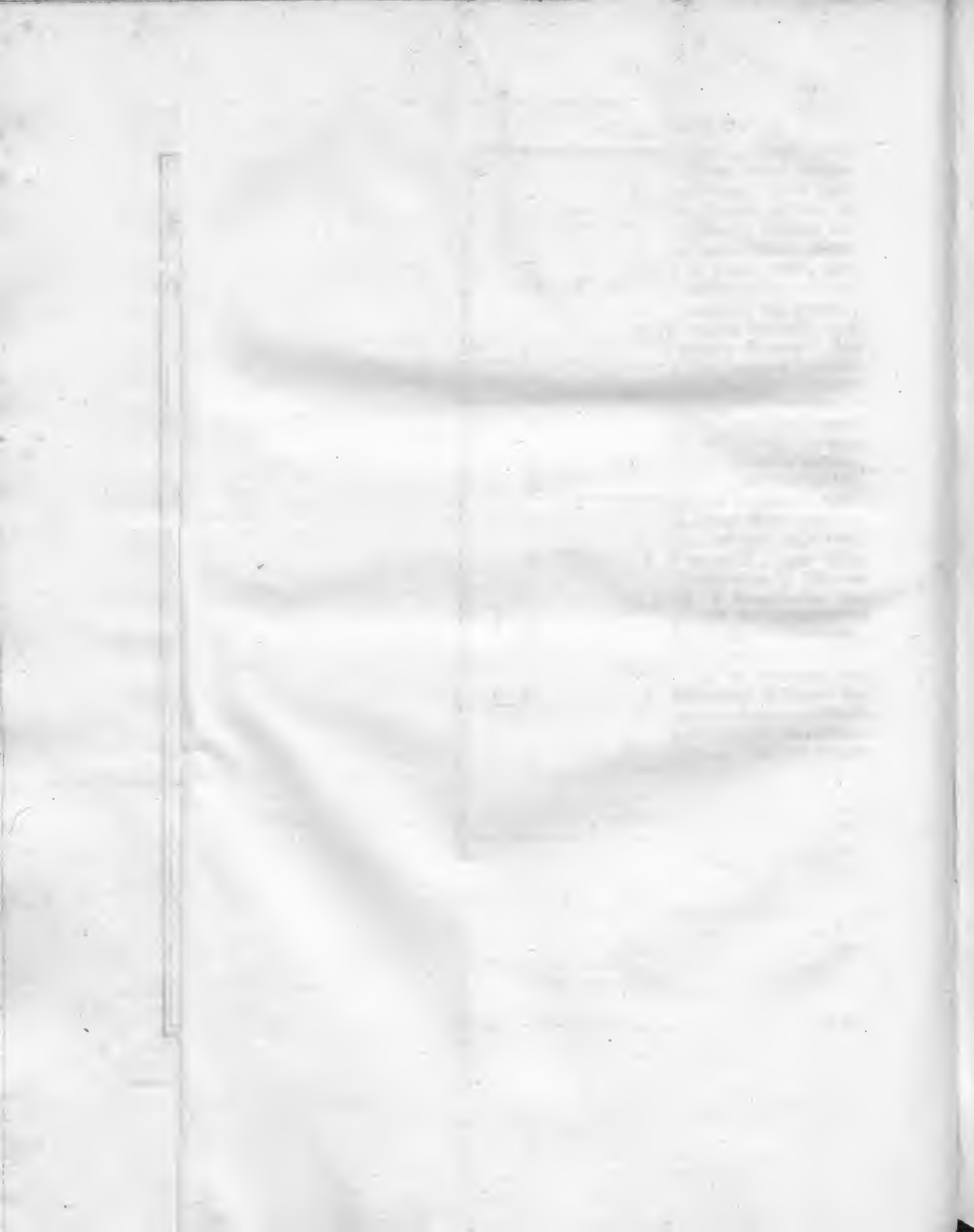
res continentur, qui singuli tantum arbitrio nostro relinquuntur, cæteris extra constitutis repugnantibus. Non licet igitur valorem peculiarem alicui formulæ statuere, quin prius Systema ac Locus geometricus determinetur. Valor enim peculiaris qui formulæ sub una forma præparatæ convenit, semper positione ac sæpius valore ac natura repugnat cum Loco geometrico a diversa ejusdem formulæ præparatione exhibito. Hinc nullum *homogeneum comparationis* absolutum, sive nullum terminum datum æquationibus tribui a priori potest, cum non nisi statuto systemate definiri possit utrum ille sit constans (sive protonumerus), an fluens; & in hoc casu utrum sit limitis maximi, vel minimi, aut valoris medii intra limites conclusi. Hinc nulla æquatio legitima, quæ ante constitutionem systematis æquale inter & æquale arbitrio statuitur: quæ etiam inutilis prorsus & a fine, quem sibi proponit vera Analysis, prorsus aliena, qui unus profecto est, & in eo totus, ut recta formularum analyticarum conformatione ad geometricam, cui respondet, legitime transferatur.

§. 40. Hisce probe intellectis plane etiam intelligitur Analysim, quam nunc habemus, in ipsa sua origine atque institutione ab eo uno, ad quod tendere debuerat, fine detortam, ac principiis falsis fallacibus in devia ductam, imparem omnino esse ad Problema hoc directum solvendum, quod nomine *solutionis æquationum* appellat, quod in solis valoribus peculiaribus singularum variabilium inveniendis, quocumque modo efferatur æquatio, consistere falso credit. Ad Problema vero inversum quod attinet, fateor equidem nec inficior, ipsam Theorematibus atque proprietatibus Loci geometrici sibi propositi, quas probe callet, nixam, multas quidem artificiosas & elegantes constructiones in solutione suorum Problematum partialium tam a Veteribus quam a Recentioribus mutuatas exhibere: ajo tamen formulas analyticas, quas ipsa ex proposito sibi Loco geometrico derivat in simplicioribus etiam casibus longe a vera forma, qua afficiendæ sunt, abludere: ut non vera Analysis sed geometria symbolis analyticis depravata jure dicenda sit. Hæc ea est causa, cur in solutione Problematum geometricorum peculiarium geometricis affectionibus sustentata tam strenue se gerere videatur, atque in hisce solvendis omnem operam collocet: in solutione vero directa æquationum, cujus munus ipsi primum demandatum est omnibus prorsus subsidiis analyticis, quæ commemoravimus, destituta omnino defecerit: ut innui in fine Præfationis.

CAP.


Fig. 1.
A D' D B
Fig. 2.
A d d' C D' D B
Fig. 3.
D' A B D
Fig. 4.
D' A f C F B D
Fig. 5.
A D' D B
Fig. 6.
A D' C D B
Fig. 7.
D' A B D
Fig. 8.
D' A C B D
Fig. 9.
A B
Fig. 10.
A D' D B d B' B''
Fig. 11.
A B''
Fig. 12.
A C D B
Fig. 13.
A B D B' D' B''
Fig. 14.
A D B''
Fig. 15.
A B'' D
Fig. 16.
A D' B'' B' D B
Fig. 17.
d A B'' D'' D D'
Fig. 18.
A B'' D' D
Fig. 19.
d A B'' D
Fig. 20.
A B''
Fig. 21.
A C D B''
Fig. 22.
A B'' D
Fig. 23.
A B'' D
Fig. 24.
D A B''

A B. inc.





# CAPUT VIII.

*De ratione fluenti qua Fluentes se se respiciunt.*

§. 1. Cum Capite superiori ostenderim præcipuam nostræ Analyseos — geometricæ curam in formularum fluentium præparatione collocandam esse, posthabito prorsus earum peculiari valore, ut statuatur systema geometricum, ad quod referantur (quo tantum statuto haberi possunt limites intra quos fluentium homologarum valores peculiares continentur); luce clarius patet nec rationem, qua hujusmodi fluentium valores se se respiciunt, legitime haberi posse, quin prius fluentes ad idem systema redigantur, opportuna harum formularum configuratione, ut docuimus, peracta. Ni enim hoc fiat, fluentes ipsæ cum numeris abstractis earum rationem indicantibus confunduntur; harumque rationum limites assequi nequeunt; & simul fluentes comparantur, quæ nullo modo inter se conciliari possunt ad unitatem systematis geometrici obtinendam. Ut quod dico exempli appositione clarius percipiatur, ponamus duarum linearum AB, CD (Tab. III. *Fig.* 17.) rationem nobis innotescere, quæ sit ut 7 : 5 : erit quidem AB : CD :: 7 : 5, sed qui erunt hujusmodi rationis limites, quæ fluentes, quodnam systema? quæ singula ad constructionem geometricam rite concinnandam scitu prorsus necessaria sunt. Ut igitur id præstemus, statuendus primum est protonumerus, qui potest esse linea AB, vel CD, vel quævis alia, dummodo proportio, quam inter se habent, innotescat. Sumatur protonumerus AB, & vocatis fluentibus homologis indeterminatis M, N, erit M : N :: AB : CD, sed AB : CD :: 7 : 5, & $CD = \frac{5}{7}$ AB : ergo M : N :: AB : $\frac{5}{7}$ . AB, in qua analogia AB est protonumerus constans, $\frac{5}{7}$ AB fluens protonumero minor, quæ proinde ad systema SA præparari potest, facta $\frac{5}{7}$ AB $= \frac{5}{5+2}$ AB, in quo casu erit M : N :: AB : $\frac{5}{7}$ AB :: $\left(\frac{5+2}{5+2}\right)$ AB : $\frac{5}{5+2}$ AB.

§. 2. Hic primum demonstranda est rigide veritas definitionis æquationum, quam §. 27. Capitis antecedentis dedimus. Ut id ostendatur, in analogia su-

periori erit M : N : : A B : $\frac{5}{7}$ A B : : $\left(\frac{2+5}{2+5}\right)$ A B : $\frac{5}{5+2}$ A B : hac peracta præparatione secundæ rationis, primus terminus est æqualis summæ fluentium homologarum S A, atque ideo constans; secundus est una ex fluentibus. Igitur etiam fluentes indeterminatæ M, N harum naturam sequantur oportet, & M repræsentet summam fluentium, N unam ex fluentibus ejusdem systematis. Erit igitur universim $M = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) AB$, & $N = \frac{m}{m+n} AB$, atque ideo 1.ª $M : N :: \left(\frac{m+n}{m+n}\right) AB : \frac{m}{m+n} AB :: \left(\frac{2+5}{2+5}\right) AB : \frac{5}{5+2} AB$ : quare $m+n : m :: 2+5 : 5$, & $m+n = \frac{m}{5} \cdot (2+5)$ : ergo $m+n : m :: \frac{m}{5} (2+5) : m :: 2+5 : 5$ : ergo $M = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) AB = \frac{m}{5 \cdot \frac{m}{5}} \cdot \left(\frac{2+5}{2+5}\right) AB = \left(\frac{2+5}{2+5}\right) AB$ ; $N = \frac{m}{m+n} AB = \frac{m}{\frac{m}{5}(2+5)} = \frac{5}{5+2} AB$ : ergo M est ipsa & identica cum $\left(\frac{2+5}{2+5}\right) AB$; N identica cum $\frac{5}{5+2}$ A B. Quod si sumatur formula I.ª fluentium Cap: V. §. 30., scilicet $\left\{\frac{\left(1 - \frac{m}{g}\right) + \frac{m}{g}}{\left(1 - \frac{m}{g}\right) + \frac{m}{g}}\right\} \cdot 1 = M+N$, in qua ut vidimus $M = \frac{\left(1 - \frac{m}{g}\right)}{1} 1$; $N = \frac{\frac{m}{g}}{1} 1$, & fiat $M' : N :: \frac{\left(1 - \frac{m}{g}\right)}{1} AB : \frac{\frac{m}{g}}{1} \cdot AB :: 2 : 5$, sive $1 - \frac{m}{g} : \frac{m}{g} :: 2 : 5$, erit componendo $1 : \frac{m}{g} :: 2+5 : 5$, & $\frac{m}{g} = 1 \cdot \frac{5}{2+5} = \left(\frac{2+5}{2+5}\right) \cdot \frac{5}{2+5} = \frac{5}{5+2}$, &

1 =

$$1 = \frac{m}{g} \cdot \left(\frac{2+5}{5}\right) = \frac{5}{5+2} \cdot \left(\frac{2+5}{5}\right) = \left(\frac{2+5}{2+5}\right) : \text{ergo } M' = \frac{\left(1 - \frac{5}{5+2}\right)}{1} AB;$$

$$N = \frac{\frac{5}{5+2}}{1} AB; \ \& \ M'+N = \left[\frac{\left(1-\frac{5}{5+2}\right)+\frac{5}{5+2}}{\left(1-\frac{5}{5+2}\right)+\frac{5}{5+2}}\right] AB = M$$

nostræ superioris analogiæ 1.$^a$ sive M identica cum primo termino constanti secundæ rationis; & N identica cum secundo ejusdem rationis. Eadem methodo in quacumque analogia, cujus prima ratio fluentibus indeterminatis M, N constat, secunda vero ratio est relatio numerica, qua se se respiciunt hujusmodi fluentes indeterminatæ, termini singuli primæ rationis M, N semper erunt identici & ejusdem prorsus naturæ quoad formam, positionem &c. cum terminis secundæ rationis, facta prius in singulis hujusce rationis secundæ reductione, ut ad illas fluentes homologas illius systematis, quod volumus, restituantur, quæ coefficiente communi divisæ ad solam inter se relationem significandam fuerant reductæ. Quare nova hæc nostra æquationis definitio Cap. sup. §. 27. tradita mirifice confirmatur.

§. 3. Hoc, quod maxime interest, demonstrato, revocetur iterum ultima analogia §. 1. $M : N :: \left(\frac{2+5}{2+5}\right) AB : \frac{5}{5+2} AB$ 1.$^a$; in qua AB est constans & $\frac{5}{5+2}$ AB fluens in hoc systemate SA, & in constanti AB sumpta a quocumque originis puncto A vel B constanti (hîc sit A) $AE = \frac{5}{5+2} AB$ (*Fig.* 18.) erit AE sive N una ex fluentibus, cui respondet altera, quæ hîc non reperitur $BE = \frac{2}{2+5}$, & M est AB constans sive summa fluentium homologarum systematis SA protonumeri AB. Et $M - N : N :: \left(\frac{2+5}{2+5}\right) AB - \frac{5}{5+2} AB : \frac{5}{5+2} AB :: \frac{2}{2+5} AB : \frac{5}{5+2} BA :: BE : AE$: & in hoc casu $M - N$ est una ex fluentibus homologis BE, cui respondet altera major AE systematis SA. Verum quoniam in eadem analogia est $M : N :: 1 : \frac{5}{7} :: 1 . AB : \frac{5}{12-5} AB :: \left(\frac{12-5}{12-5}\right) AB : \frac{5}{12-5} AB$ 2.$^a$, M con-

ver-

vertitur in $\left(\frac{12-5}{12-5}\right)$ A B protonumerum, & N in fluentem minorem systematis S Y, atque ideo in eadem *Fig.* sumpta B E' vel A e' $= \frac{5}{12-5}$ A B, erit A E' vel B e' fluens major $= \frac{12}{12-5}$ A B S Y, & minor B E' vel A e' $= \frac{5}{12-5}$ A B $= \frac{5}{7}$ A B $=$ C D *Fig.*[a] 17. Hic vero erit $M+N : N ::$ $\left(\frac{12-5}{12-5}\right) AB + \frac{5}{12-5} AB : \frac{5}{12-5} AB :: \frac{12}{12-5} AB = AE' : \frac{5}{12-5} AB$ $= BE'$, & $M+N$ in hoc casu fluens major S Y, & $(M+N)$, N fluentes homologæ ejusdem systematis. Rursus quoniam $M : N :: 1 : \frac{5}{7}$ est ut $7 : 5$; erit $M : N :: 7 : 5 :: \frac{7}{7+5} AB : \frac{5}{5+7} AB$ 3.[a],

vel $M : N :: 7 : 5 :: \frac{7}{7-5} AB : \frac{5}{7-5} AB$ 4.[a],

in quarum utroque casu ambæ M, N sunt fluentes; sed in primo fluentes homologæ S A, in secundo systematis S Y, quæ in eadem se se respiciunt ratione $7 : 5$ ac priores, licet natura diversæ. Ratio autem cur in primis terminus primus M est constans protonumerus, in hisce ultimis uterque fluens, ea est, quod in primo casu rationis $1 : \frac{5}{7}$; 7 est denominator qui semper, ut ostendimus, constans sumendus est: at in ratione $7 : 5$ singuli termini rationis, cum sit denominator 12, fiunt numeratores, atque ideo naturam fluentium induere oportere jam demonstravimus.

§. 4. Insuper

$$5.^{a} \quad M : N :: 1 : \frac{5}{7} :: \left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\} AB : \left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\} AB$$

$$6.^{a} \text{vel } M : N :: 7 : 5 :: \left\{\frac{\left(\frac{12+7}{2}\right)-\left(\frac{12-7}{2}\right)}{\left(\frac{12+7}{2}\right)+\left(\frac{12-7}{2}\right)}\right\} AB : \left\{\frac{\left(\frac{12+5}{2}\right)-\left(\frac{12-5}{2}\right)}{\left(\frac{12+5}{2}\right)+\left(\frac{12-5}{2}\right)}\right\} AB$$

7.[a]

$$7.^{a}\text{ vel } M : N :: 7 : 5 :: \left\{\frac{\left(\frac{7+2}{2}\right)+\left(\frac{7-2}{2}\right)}{\left(\frac{7+2}{2}\right)-\left(\frac{7-2}{2}\right)}\right\} AB : \left\{\frac{\left(\frac{5+2}{2}\right)+\left(\frac{5-2}{2}\right)}{\left(\frac{5+2}{2}\right)-\left(\frac{5-2}{2}\right)}\right\} AB.$$

5.ª est ratio, qua se se respiciunt protonumerus AB, & differentia fluentium sive M+N : M—N in SA :: AB : dD (*Fig.* 13.); 6.ª est ratio, qua se se respiciunt differentiæ singulæ fluentium homologarum SA M—N : M—N :: dD : eE (*Fig.* 19.) invicem distractæ; 7.ª dat proportionem, quæ intercedit inter summam fluentem fluentium SY & summam fluentem ejusdem systematis SY si eodem protonumero afficiantur, hoc est M+N : M+N :: dD : eE (*Fig.* 20.). Hinc in 5.ª M+N = AB; M—N = dD, in quarum singulis eædem fluentes homologæ reperiuntur; est enim (*Fig.* 13.) M+N =

$$\frac{\left\{\left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\}\right\} AB + \left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{7-5}{2}\right)+\left(\frac{7+5}{2}\right)}{\left(\frac{7-5}{2}\right)+\left(\frac{7+5}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\}\right\}}{1}$$

$$= (AC+CD)+(BC-CD) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\right)AB+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\right)BA}{1}$$

$$= \left(\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\right)AB = \frac{7}{7}AB, \ \& \ M-N =$$

$$\frac{\left\{\left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\}\right\} AB - \left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{7-5}{2}\right)+\left(\frac{7+5}{2}\right)}{\left(\frac{7-5}{2}\right)+\left(\frac{7+5}{2}\right)}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\}\right\}}{1}$$

$$= CD+Cd = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\right)AB-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\right)AB}{1} = \frac{5}{7}AB:$$

at-

atque ideo $M+N : M-N :: \frac{7}{7} : \frac{5}{7} :: 7 : 5$. Hac methodo invenies in $6.^a$ fluentes primi termini rationis diversas esse a fluentibus differentiam secundi termini exhibentibus; quemadmodum in $7.^a$ fluentes summæ primi termini differre a fluentibus summæ secundi termini. Quare si ultimæ tres dividantur per (2) erunt siugulæ istæ fluentes in singulis istis analogiis

$1.^a$ $M+N : M :: \left(\frac{5+2}{5+2}\right) AB : \frac{5}{5+2} AB :: AB : Be :: BA : AE :: \frac{7}{7} : \frac{5}{7}$ SA *Fig.* 18

$2.^a$ $M-N : N :: \left(\frac{12-5}{12-5}\right) AB : \frac{5}{12-5} AB :: AB : BE' :: BA : Ae' :: \frac{7}{7} : \frac{5}{7}$ SY *Fig.* 18

$3.^a$ $M : N :: \frac{7}{7+5} AB : \frac{5}{5+7} BA :: AD : BD :: Bd : Ad :: \frac{7}{12} : \frac{5}{12}$ SA *Fig.* 13

$4.^a$ $M : N :: \frac{7}{7-5} AB : \frac{5}{7-5} AB :: AD : BD :: Bd : Ad :: \frac{7}{2} : \frac{5}{2}$ SY *Fig.* 20

$5.^a$ $\frac{M+N}{2} : \frac{M-N}{2} :: \frac{1}{2} \left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\} AB : \frac{1}{2} \left\{\frac{\left(\frac{7+5}{2}\right)-\left(\frac{7-5}{2}\right)}{\left(\frac{7+5}{2}\right)+\left(\frac{7-5}{2}\right)}\right\} AB :: AC : CD :: BC : Cd :: \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{7} : \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}$ SA *Fig.* 19.

$2.^a$ repugnat converti posse in summam fluentium SY, quia $\frac{5}{7}$ est unitate minor:

$6.^a$ $\frac{M-N}{2} : \frac{M-N}{2} :: \frac{1}{2} \left\{\frac{\left(\frac{12+7}{2}\right)-\left(\frac{12-7}{2}\right)}{\left(\frac{12+7}{2}\right)+\left(\frac{12-7}{2}\right)}\right\} AB : \frac{1}{2} \left\{\frac{\left(\frac{12+5}{2}\right)-\left(\frac{12-5}{2}\right)}{\left(\frac{12+5}{2}\right)+\left(\frac{12-5}{2}\right)}\right\} AB :: CD : CE :: Cd : Ce :: \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} : \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}$ SA *Fig.* 19

$7.^a$ $\frac{M+N}{2} : \frac{M+N}{2} :: \frac{1}{2} \left\{\frac{\left(\frac{7+2}{2}\right)+\left(\frac{7-2}{2}\right)}{\left(\frac{7+2}{2}\right)-\left(\frac{7-2}{2}\right)}\right\} AB : \frac{1}{2} \left\{\frac{\left(\frac{5+2}{2}\right)+\left(\frac{5-2}{2}\right)}{\left(\frac{5+2}{2}\right)-\left(\frac{5-2}{2}\right)}\right\} AB :: CD : CE :: Cd : Ce :: \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} : \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}$ SY *Fig.* 20

$:: f$

§. 5. Non difficile erit similibus artificiis infinitimode fluentium naturam, numerum, positionem mutare, ratione semper, qua se se respiciunt, eadem manente. Insuper advertas velim in $1.^a$ & $2.^a$ primum rationis terminum semper constantem esse, sed secundum in $1.^a$ intra ($o$) & (1) fluere posse tantum: at in $2.^a$ secundum terminum a zero usque ad infinitum progredi. In $3.^a$ vero ambo rationis termini sunt fluentes, sed fluunt inverso modo, ita ut fluente primo a ($o$) usque ad (1) fluat decrescendo, secundus ab (1) usque ad ($o$), & viceversa: in $4.^a$ primus terminus fluit crescendo a minimo limite (1) usque

que ad infinitum, crescente simul secundo a limite minimo (*o*) usque ad infinitum. In 5.ª primus terminus rationis dimidium protonumeri repræsentat, & est constans, secundus est semidifferentia fluens fluentium homologarum S A, quæ ideo a zero usque ad maximum $\frac{1}{2}$ progreditur. At in *6.*ª quivis terminus est semidifferentia fluentium S A, qui fluere potest a *o* usque ad $\frac{1}{2}$, sed singuli hi termini nullo necessario vinculo colligati sunt, ita ut unius fluxus nihil influat in alterius termini fluxum: idem dicas de terminis rationis analogiæ 7.ª, quorum singuli semisummam fluentem S Y exhibent. Repugnat tandem 2.am converti posse in summam fluentium homologarum quia $\frac{5}{7}$ est unitate minor. Ex quibus omnibus atque singulis evidentissime demonstratur non satis esse ad hoc negotium rite persequendum rationem, qua duæ quantitates quæcumque geometricæ se se respiciunt, notam habere: sed prius determinandum esse systema, & naturam fluentium ipsarum, in quam variis modis transformari possunt; ut inter fluentes homologas ejusdem systematis cum utilitate & sine erroris periculo instituatur comparatio.

§. *6.* Antequam progrediamur, deducendæ sunt ex hisce principiis consecutiones aliquot maximi momenti. Ac primum ex legitima æquationum definitione superius tradita patet, fluentes indeterminatas M, N eodem signo $\pm$ afficiendas, quod fluentibus determinatis præfigitur: illæ enim non sunt nisi indeterminatæ in eam naturam, quam systema assumptum requirit, convertendæ; atque ideo in omnibus affectionibus non excepta positione identicæ cum determinatis primo sumptis sint oportet; quia non nisi illarum ope infinitam prope suam indeterminationem intra datos limites coercere possunt. Itaque quemadmodum M, N mutatione configurationis determinatarum formam ac naturam & ipsæ suam mutant, eadem ratione signum $\pm$ toties mutent oportet, quoties signum $\pm$ determinatis mutatur. Hinc in analogiis vulgo usurpatis, quæ quatuor constant terminis, ac duabus rationibus constare videntur, non nisi una tantum ratio continetur; quod diligentissime est animadvertendum. In prima enim indeterminatæ M, N collocantur, quæ eam rationem inter se habent, quam secunda ratio numerica ostendit. Porro cum artificiis supra traditis quæcumque fluentes geometricæ, cujuscumque systematis ad numeros tantum deprimi possint, & contra quicumque numeri, statuto systemate, ad fluentes significandas evehi possint; patet numeros singulos cujuscumque rationis converti posse in fluentes, & contra fluentium rationem in rationem numericam transmutari. Quod si in analogiis indicatis utraque ratio deprimatur ad numeros, utraque non est nisi eadem ratio numerica abstracta, evanescentibus omnino quantitatibus geometricis. Ita in superiori analogia M : N : : 7 : 5, M, N sunt quantitates geometricæ primam rationem componentes, quæ cum sint omnino indetermina-

natæ, a secunda numerica ratione declarantur se se respicere tamen in ratione $7:5$. Ultima vero hæc ratio numerica si in fluentium determinatarum, ex: gr: SA, rationem convertatur, erit $M:N::\frac{7}{7+5}AB:\frac{5}{5+7}BA$, quo facto M fit $\frac{7}{7+5}AB$; N $\frac{5}{5+7}BA$; ergo facta in prima ratione horum fluentium valorum substitutione, erit analogia $\frac{7}{7+5}AB:\frac{5}{5+7}BA::\frac{7}{7+5}AB:\frac{5}{5+7}BA$, & in utraque ratione eædem quantitates geometricæ: at reducta ad numeros prima fit $7:5::\frac{7}{7+5}AB::\frac{5}{5+7}BA$, in qua secunda ratione nunc quantitates geometricæ systematis SA continentur. At utraque ad minimos terminos, ut vulgo fit, reducta dabit $7:5::7:5$ eadem utrinque ratio numerica abstracta omnino inutilis, cum evanuerint quantitates geometricæ cum ratione numerica comparandæ. Ut igitur hisce analogiis aliqua cum utilitate utamur sumendæ primum illæ, in quibus una ratio componitur ex fluentibus geometricis, altera ex numeris, ut fluentium homologarum determinatarum proportio habeatur.

§. 7. Quod si in hac analogia $7:5::7:5$ prima ratio convertatur in rationem fluentium homologarum SA, secunda in rationem fluentium homologarum SY, erit ipsa $\frac{7}{7+5}AB:\frac{5}{5+7}BA::\frac{7}{7-5}AB:\frac{5}{7-5}AB$, quæ dividitur in duas

SA $M:N::\frac{7}{7+5}AB:\frac{5}{5+7}BA::7:5$,

SY $M:N::\frac{7}{7-5}AB:\frac{5}{7-5}AB::7:5$;

in quarum singulis fluentes in eadem ratione se se respiciunt. Et componendo in prima; dividendo in secunda, erit

SA $M+N:N::\frac{7}{7+5}AB+\frac{5}{5+7}BA:\frac{5}{5+7}BA$,

SY $M-N:N::\frac{7}{7-5}AB-\frac{5}{7-5}AB:\frac{5}{7-5}AB$ : ergo

SA $M+N = M-N$ SY: hoc est $\begin{cases} M+N:N::12:5 \text{ SA} \\ M-N:N::2:5 \text{ SA} \end{cases}$;

at-

atque ideo N, quæ erat positiva in prima, fit negativa in secunda, & quæ in illa erat summa in hac fit differentia. Inverso vero hoc ordine, hoc est si utamur divisione in prima, compositione in secunda statim, in tertium quoddam systema deferimur, de quo quando agetur de æquationibus secundæ dimensionis verba faciam. Inferius autem Cap: X. alia notatu digna hinc eruentur: nunc sufficiat advertere, signum $\pm$ semel præfixum indeterminatis M, N, necessario mutandum esse quando in suis identicis determinatis signum hoc mutatur.

§. 8. Quamobrem in illis analogiis, quas §. superiori ne decipiamur sumendas esse docuimus, nullæ aliæ combinationes signorum legitimæ inveniri possunt, nisi sequentes

$M : N :: m : n$; $-M : -N :: -m : -n$; $-M : N :: -m : n$; $M : -N :: m : -n$;

quæ singulæ, si reducantur ad simplices numericas, erunt

$1 : 1 :: 1 : 1$; $-1 : -1 :: -1 : -1$; $-1 : 1 :: -1 : 1$; $1 : -1 :: 1 : -1$;

secunda est eadem ac prima: item tertia & quarta facile in primam transmutantur; ut vere dicendum sit in primam terminis omnibus positivis constantem revera cæteras omnes recidere. In istis non invenies illam omnium firmatam consensu & frequentissime usurpatam $\dfrac{1 : -1 :: -1 : 1;}{-1 : 1 :: 1 : -1;}$, quæ proinde omnino a calculo in posterum erit, utpote illegitima, omittenda: quæ certe si probetur, cæteras, quæ a Calculo communi exploduntur, admittendas esse §. 37. Lib: I. Cap: I. & §. 21. Lib: II. Cap: I. advertimus; dummodo quæ illic docuimus serventur. Ratio vero cur tam libenter hæc una $1 : -1 :: -1 : 1$ excepta a calculo communi fuerit, ab eo, ut arbitror, deducta fuit, quod scilicet Analystæ anticipata opinione ducti jam aliunde demonstratum fuisse putarunt, negativum in negativum ductum fieri semper positivum, ex qua suppositione analogia hæc necessario derivat, minime intelligentes, non quia $(-1).(-1)$ est $1 . 1$, analogiam veram esse, sed contra quia $(-1).(-1)$ in hac analogia nequit cum veritate conciliari, nisi in ipsa loco $(-1).(-1)$ ponatur $1 . 1$, ut termini singuli positivi fiant. En tandem (ut mihi quidem videtur) aperte detecta fallacia hujusce tam celebris analogiæ, ad quam defendendam a Leibnitio (ut videre est in Commercio Philosophico, & Mathematico), & a celebrioribus tam Veteribus, quam Recentioribus Mathematicis adeo multa scripta sunt acuta quidem, sed misero quodam fato a veritate absona, ut pertinacem patientis cujuscumque Lectoris laborem delassare valeant.

§. 9. Tradita §. 6, 7. methodo, qua a fluentibus ad numeros, & viceversa, legitimus transitus obtinetur, sumatur nunc illa simplex analogia $M : N :: 7 : 5 :: m : n$; hujus prima vel secunda ratio fluentes continet, altera earum relationem tantum numeris expressam, utpote quæ dat $n . M = m . N$ unam ex æquationibus linearibus geometricis, quas diligenter in hoc Libro nobis excutiendas proponimus. Ex hac igitur invenies vel $M = \frac{m}{n} N$; vel N

$= \frac{n}{m}$ M ; sumpta prima si N in fluentem determinatam convertatur, dabit

$$M = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{n+m} AB = \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}{1} A\ B$$

$$= \frac{m}{n} \left[ \frac{\left(\frac{m+n}{2}\right) - \left(\frac{m-n}{2}\right)}{\left(\frac{m+n}{2}\right) + \left(\frac{m+n}{2}\right)} \right] AB = \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\right)}{1} A\ B$$

$$= \frac{m}{n} \left[ \frac{\left(\frac{n+m}{2}\right) + \left(\frac{n-m}{2}\right)}{\left(\frac{n+m}{2}\right) + \left(\frac{n+m}{2}\right)} \right] AB\ SA = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m-n} A\ B$$

$$= \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1} A\ B$$

$$= \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) + \left(\frac{n-m}{n-m}\right)\right)}{1} AB\ SY$$

singula legitima: quia in superiori analogia ratio eadem $m:n$ tam dividi potest per communem divisorem $m+n$, quam per communem $m-n$, ex cujus alterutro divisore oritur fluens, ut ostendimus, alterutrius systematis. Secundum igitur membrum superioris æquationis est ipsa identica M in fluentem determinatam conversa, quæ proinde modo diversam formam, eadem retenta natura ac systemate, modo mutata forma diversum etiam systema assumit, prout secundum membrum, cui comparatur, legitime transformatur. In generali igitur æquatione $M = \frac{m}{n} . N$, donec M, N indeterminatæ sumuntur, nequit haberi M nisi relate ad N; atque ideo si sit ex: gr: $M = \frac{7}{1} N$ nihil aliud ex hac æquatione erui potest, nisi quod M sit septupla fluentis N, & N $\frac{1}{7}$ fluentis M: quæ vero sit ipsa M, vel N, quæ ejus varia natura ac forma penitus ignoratur. Sed si in proposita generali æquatione determinetur fluens N, vel M, determinatur utraque fluens: determina-

minata enim N, secundum membrum convertitur in fluentem determinatam M; & viceversa determinata M, habetur $N = \frac{n}{m} M$, cujus secundum membrum fluentem N exhibet. Quare illud maximi momenti consequitur, in æquatione scilicet generali $M = \frac{m}{n} N$ non posse ad aliquem valorem peculiarem determinari N, vel M (constituto prius systemate) quin utraque *m* & *n* determinetur: atque ideo quemadmodum M, N sunt fluentes, quia infinitis valoribus sunt obnoxiæ; ita numeri *m*, *n*, quæ dant rationem, qua se se respiciunt, fluentes & ipsi sint necesse est: hac differentia, quod *m*, *n* mutata tantum natura, non valore fluentium, iidem manent, cum sint numeri abstracti, nec nisi valoribus fluentium sint obnoxii. Ergo mutato valore ipsius M, vel N mutantur numeri *m*, *n* qui sunt earum numeratores, & viceversa mutatis valoribus *m*, *n* mutantur fluentes M, N:

§. 10. Ut exemplo aliquo rem declaremus sit ex: gr: $M = \frac{4}{3} N$, ex qua oritur analogia M : N : : 4 : 3; quid tamen inde ex hac analogia, in qua fluentes omnino indeterminatæ sunt, erui possit scire velim, nisi prius qua natura afficiantur M, N cognoscatur. Hæc vero natura ab analogia superiori arbitrio nostro omnino relinquitur: referantur itaque primum ad S A, ut sit (*Fig.* 19.) $M = \frac{4}{4+3} AB = AD$; $N = \frac{3}{3+4} BA = BD$, & in æquatione $M = \frac{4}{3} N = \frac{4}{3} BD = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{3+4} BA = \frac{4}{4+3} AB$, in qua evanescente homologa N non amplius relatio fluentium tantum habetur, ut in prima, sed ipsa M alteri N homologa. Si vero fiat $M = \frac{4}{3} N$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{3+4} BA = \frac{4}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{3+4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4-3}{4+3}\right)\right)}_{1} AB = \frac{4}{3}\ (BC - CD)$$

$$= \frac{4}{4+3}\ AB = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4+3}{4+3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4-3}{4+3}\right)\right)}_{1} AB = AC + CD,$$ quæ est

ipsa $M = AD$, & homologa ipsi $N = BD$. Quod si ponatur N differentia fluentium homologarum S A numeratoris (3), erit $M = \frac{4}{3} N$

=

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{\left(\frac{7+3}{2}\right)-\left(\frac{7-3}{2}\right)}{\left(\frac{7+3}{2}\right)+\left(\frac{7-3}{2}\right)}\right] AB = \frac{4}{\left(\frac{7+3}{2}\right)+\left(\frac{7-3}{2}\right)} AB$$

$$= \frac{4}{7} AB = \left[\frac{\left(\frac{7+4}{2}\right)-\left(\frac{7-4}{2}\right)}{\left(\frac{7+4}{2}\right)+\left(\frac{7-4}{2}\right)}\right]$$ AB differentia & hæc duarum fluentium homologarum ejusdem systematis SA, quæ nullam cum primis habent affinitatem. In prima enim fluentes homologæ $\frac{\left(\frac{7+3}{2}\right)}{\left(\frac{7+3}{2}\right)+\left(\frac{7-3}{2}\right)} AB$ $= \frac{5}{5+2} AB = AE$; $\frac{\left(\frac{7-3}{2}\right)}{\left(\frac{7-3}{2}\right)+\left(\frac{7+3}{2}\right)} AB = \frac{2}{2+5} BA = BE$, & earum differentia $Ee = \frac{3}{7} AB$. In secunda fluentes homologæ $\frac{\left(\frac{7+4}{2}\right)}{\left(\frac{7+4}{2}\right)+\left(\frac{7-4}{2}\right)} AB = \frac{11}{11+3} AB = AD$; $\frac{\left(\frac{7-4}{2}\right)}{\left(\frac{7-4}{2}\right)+\left(\frac{7+4}{2}\right)} AB$ $= \frac{3}{3+11} BA = BD$, earum differentia $\frac{8}{14} AB = \frac{4}{7} AB = dD$: differentia tamen primarum fluentium ad differentiam secundarum est in eadem ratione, qua primæ fluentes $\frac{4}{4+3} AB$, $\frac{3}{3+4} AB$ se se respiciunt.

§. 11. Referantur nunc fluentes M, N ejusdem analogiæ superioris ad systema SY, ut sit (*Fig.* 21.) $M : N :: \frac{4}{4-3} AB : \frac{3}{4-3} AB$, atque ideo M

=

$= \frac{4}{4-3}$ AB = AD fluens major; N $= \frac{3}{4-3}$ AB = BD fluens minor; & M $= \frac{4}{3}$ N $= \frac{4}{3} . \frac{3}{4-3}$ AB $= \frac{4}{4-3}$ AB, facto tranſitu a relatione ipſarum, quæ exhibetur ab æquatione M $= \frac{4}{3}$ N $= \frac{4}{3}$ BD ad verum & abſolutum valorem ipſius M. Quod ſi fiat M $= \frac{4}{3} . \frac{3}{4-3}$ AB $= \frac{4}{3}$ BD $= \frac{\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{4-3}{4-3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4+3}{4-3}\right)\right)}{1}$ AB $= \frac{4}{4-3}$ AB $= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4-3}{4-3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4+3}{4-3}\right)\right)}{1}$ AB erit, M = AB + BD. At ſi fiat

am $\frac{4}{1}$ AB ſumma fluentium SY $= \left[\frac{\left(\frac{4+1}{2}\right)+\left(\frac{4-1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right)-\left(\frac{4-1}{2}\right)}\right]$ AB = dD

= dA + AD $= \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)$ AB $= \frac{4}{4-3}$ AB = AD, & fluens major $\frac{\left(\frac{4+1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right)-\left(\frac{4-1}{2}\right)}$ AB $= \frac{5}{5-3}$ AB = AD; & fluens minor

$\frac{\left(\frac{4-1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right)-\left(\frac{4-1}{2}\right)}$ AB $= \frac{3}{5-3}$ AB = BD = Ad; quam ſumma $\frac{3}{1}$ AB

$= \left[\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right]$ AB = eE, & fluens major $\frac{2}{2-1}$ AB = AE

=

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2-1}\right)\right)}{1} AB = AB + BE; $$ & fluens minor $\frac{1}{2-1} AB = - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2-1}\right) AB + \frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2-1}\right)}{1} AB = BE = Ae:$

ac tandem $M = \frac{4}{3} N = \frac{4}{3} BD = \frac{4}{3} \frac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{4-3}{4-3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4+3}{4-3}\right)\right)}{1} AB$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4-3} AB = \frac{4}{4-3} AB = \frac{4}{1} AB = \left[\frac{\left(\frac{4+1}{2}\right)+\left(\frac{4-1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right)-\left(\frac{4-1}{2}\right)}\right] AB$$

$= dA + AD$: & fluentes hujufce fummæ longe diverfæ a fluentibus alterius; harum tamen fluentium fummæ eamdem inter fe rationem habent, in qua eft $AD : BD$. In exemplo allato tam $\frac{4}{1}$, quam $\frac{3}{1}$ ( quia fingulæ fractiones funt unitate majores ) poffunt fingulæ tam in fluentes folitarias homologas majorem & minorem tranfmutari ( ut fecimus in $\frac{4}{4-3} AB$, $\frac{3}{4-3} AB$ ), quam in fummam fingularum fluentium homologarum $\left[\frac{\left(\frac{4+1}{2}\right)+\left(\frac{4-1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right)-\left(\frac{4-1}{2}\right)}\right] AB$,

$\left[\frac{\left(\frac{3+1}{2}\right)+\left(\frac{3-1}{2}\right)}{\left(\frac{3+1}{2}\right)-\left(\frac{3-1}{2}\right)}\right] AB$, quarum fummæ nulla inter fe affinitate conjunguntur. Quod fi fluens minor $SY$ fit unitate minor, converti non poteft nifi in differentiam fluentium homologarum fyftematis $SA$. Ita fi effet $M : N :: 7 : 3$; & $N = \frac{3}{7} M$, fi $M$ fiat $\frac{7}{7-3} AB$, erit $N \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{7-3} AB =$

$= \frac{3}{7-3}$ A B, vel $= \left[\frac{\left(\frac{4+3}{2}\right)-\left(\frac{4-3}{2}\right)}{\left(\frac{4+3}{2}\right)+\left(\frac{4-3}{2}\right)}\right]$ A B differentiæ fluentium homologarum $\frac{7}{7+1}$ A B, $\frac{1}{1+7}$ B A, quæ est $\left(\frac{7-1}{7+1}\right)$ A B $= \frac{3}{4}$ A B. Et hoc modo a fluente minori $\frac{3}{7-3}$ A B systematis S Y transitus fieri potest ad systema S A, evanescente fluente M unitate majori in æquatione $N = \frac{3}{7} M$, substitutione ipsius fluentis $M = \frac{7}{7-3}$ A B.

§. 12. Quemadmodum ab æquatione ex duabus fluentibus composita $M = \frac{m}{n} N$, quæ non nisi relationem, qua se se respiciunt fluentes, ostendit, facile ex nostra Theoria ad unicam fluentem identicam M substitutione fluentis N homologæ pervenitur; ita viceversa cognita natura unius $M =$ ex: gr: $\frac{m}{m+n}$ A B S A ad æquationem ambas fluentes homologas continentem facilis est accessus. Si enim fiat $M = \frac{n}{n} \cdot \frac{m}{m+n}$ A B $= \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{n+m}$ B A, erit $M = \frac{m}{n} \cdot N$, qua æquatione ratio, quam habent inter se hujusmodi fluentes homologæ, exhibetur, quæ & ipsa est fluens, cum pendeat a valore fluente duorum numeratorum fluentium. Porro cum fluentes, licet diversæ naturæ ac systematis, eamdem inter se rationem retinere possint; consequitur in æquatione $M = \frac{m}{n} \cdot N$ rationem quidem fluentium $m : n$ innotescere, earum vero naturam indeterminatam manere; donec alterutra arbitrio firmetur. Sit ex: gr: $M = M = \frac{7}{7+5}$ A B identica in S A, in qua (5) denominatoris est numerator alterius fluentis; si fiat M $\frac{5}{5} \cdot \frac{7}{7+5}$ A B $= \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{5+7}$ B A, erit

$\frac{5}{5+7}$ BA $=$ N altera fluens homologa, & M : N :: $\frac{7}{7+5}$ AB : $\frac{5}{5+7}$ BA :: 7 : 5. Item si fiat $M = \frac{\frac{5}{5}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7+5}{7+5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7-5}{7+5}\right)\right)}{1}$ AB erit

$= \frac{\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+7}{5+7}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7-5}{7+5}\right)\right)}{1}$ BA $= \frac{7}{5}$ N : in hoc scilicet casu ut N sit homologa M hanc novam formam $\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+7}{5+7}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7-5}{7+5}\right)\right)}{1}$ BA

assumat necesse est. Sit nunc $M = \frac{7}{7-5}$ AB fluens major SY, erit

$M = \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{7-5}$ AB $= \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7-5}$ AB, vel

$M = \frac{\frac{5}{5}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7-5}{7-5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7+5}{7-5}\right)\right)}{1}$ AB

$= \frac{\frac{7}{5}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{7-5}{7-5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7+5}{7-5}\right)\right)}{1}$ AB $= \frac{7}{5}$ . N, & N fluens

minor SY; quæ fluentes eamdem rationem inter se habent, qua se se respiciunt fluentes superiores alterius systematis SA, licet natura ac limitibus universim diversis.

§. 13. In superioribus formulis, in quibus numeri fluentes 7, 5 sunt numeri finiti rationales, si poneretur $7 = \infty$, fluentes M, N videri possent esse inter se in utroque systemate in ratione $\infty : 5$, quæ tamen ratio in utroque systemate absurda in gravissimum errorem nos induceret: & facta $5 = 0$ fierent in ratione $\infty : 0$, quæ cum suis veris terminis non constet, fallax est perinde ac si M esset absolute infinita facta $N = 0$. Ut igitur hujusmodi rationes ad removendam ambiguitatem omnem ad veros suos terminos reducantur, revocetur doctrina Cap: V. in quo §. 38. & 39. ostenditur, utrasque formulas generales singularum fluentium §. 30., donec earum numeratores rationales & finiti sunt, reduci posse ad unum atque individuum numeratorem, ut factum vides in formulis §. superioris. Verum si numeris irrationalibus constent

( hic

( hîc addas velim aut symbolis ( $\infty$ ), ( $o$ ) transcendentibus ) non nisi ad formulas generales §. 32. fluentes referri possunt, cum nunquam in neutro casu numerator singulæ fluentis possit ad unum atque individuum numerum reduci. Hoc animadverso, si in formulis §. antecedentis ponatur $7 = \infty$, & $5 = o$, confugiendum est ad formulam generalem I.am $\frac{(1 - \frac{1'}{1}) + \frac{1'}{1}}{1}$ SA, & in SY ad II.am $\frac{(1 + \frac{1'}{1}) - \frac{1'}{1}}{1}$, a quibus tamquam generalibus derivantur etiam superiores, facta I.a $\frac{(1 - \frac{5}{12}) + \frac{5}{12}}{(1 - \frac{5}{12}) + \frac{5}{12}} = \frac{7+5}{7+5}$,

& II.a $\frac{(1 + \frac{5}{2}) - \frac{5}{2}}{(1 + \frac{5}{2}) - \frac{5}{2}} = \frac{7-5}{7-5}$. Formulæ igitur, posito $7 = \infty$; $5 = o$, erunt in SA $\frac{(1 - \frac{o}{\infty}) + \frac{o}{\infty}}{1}$, & in SY $\frac{(1 + \frac{o}{\infty}) - \frac{o}{\infty}}{1}$ : ergo in SA

$$M = \frac{(1 - \frac{o}{\infty})}{1} AB = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1 - \frac{o}{\infty}) + \frac{o}{\infty}}{(1 - \frac{o}{\infty}) + \frac{o}{\infty}} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1 - \frac{o}{\infty}) - \frac{o}{\infty}}{(1 - \frac{o}{\infty}) + \frac{o}{\infty}} \right\} \right\}}{1} AB$$

$= AC + CB$ : (*Fig.* 20.)

$$N = \frac{\left(\frac{o}{\infty}\right)}{1} BA = \frac{\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{o}{\infty} + \left(1 - \frac{o}{\infty}\right)}{\frac{o}{\infty} + \left(1 - \frac{o}{\infty}\right)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(1 - \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}{\left(1 - \frac{o}{\infty}\right) + \frac{o}{\infty}}\right\}\right]}{1} AB$$

$= BC - CB$; & in S Y

$$M = \frac{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right)}{1} AB = \frac{\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) + \frac{o}{\infty}}{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}\right\}\right]}{1} AB$$

$= AC + CB$ :

$$N = \frac{\left(\frac{o}{\infty}\right)}{1} AB = \frac{\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) + \frac{o}{\infty}}{\left(1 + \frac{o}{\infty}\right) - \frac{o}{\infty}}\right\}\right]}{1} AB$$

$= B$ .

In prima S A ex demonſtratis ($o$) creſcere poteſt uſque ad denominatorem (qui hîc eſt $\infty$): in ſecunda S Y ($o$) creſcere poteſt ultra quoſcumque limites, ac infinite ſupra denominatorem (hîc $\infty$).

§. 14. In noſtro hoc vero caſu erit in utroque ſyſtemate $M : N :: 1 : o$; ſed quia in S A coefficiens $M = 1 - \frac{\frac{o}{\infty}}{1}$ eſt maximus; in S Y coefficiens $M = 1 + \frac{\frac{o}{\infty}}{1}$ eſt minimus, erit in S A fluens maxima A B (*Fig.* 21.) & N minima $o$ B A; & in S Y fluens M minima A B; N item minima $o$ B D: & ratio ad veros ſuos terminos reducta erit in utroque $1 : o$. Facto vero $o = \infty$; erit in S A $M : N :: o : 1$; in S Y $M : N :: 2 : 1$: hoc eſt in S A quæ erat maxima fit minima zero, & viceverſa; at in S Y quæ erat minima $=$ A B, fit dupla, & quæ erat zero fit A B utraque media: quod quidem optime cum veritate conſentit. Creſcente enim ſucceſſive minima fluente in op-

opposita directione majoris, major minuitur usque ad *zero* quando minima fit maxima: at in S Y, utraque per eamdem directionem fluente, duplicatur prima, & fit secunda $=$ A B. Hæc nisi advertas, in maximas ambages numquam extricandas te conjicies, ut methodo communi contingit, quæ in hac singulorum ignoratione cæco se calculo committens incidit necessario sæpissime in eam æquationem $2 = o$, quam tamen ut absurdam mihi uni exprobrat: minime intelligens fluentem M, quæ in S A posito $o = \infty$ evanescit, duplicari in systemate S Y: qua facta animadversione & singula ad suum proprium systema refertur, & omnis tollitur repugnantia atque difficultas, quam hujusmodi æquatio præseferebat.

§. 15. Crescente *zero* supra ($\infty$), si augeatur finite (puta $= 2 \cdot \infty$, $3 \cdot \infty \ldots m \cdot \infty$) prima formula quæ pertinebat ad S A convertitur in sequentem I.$^{am}$ $\dfrac{-(m-1)+m}{-(m-1)+m}$, quæ est systematis S Y, & fluentes ambæ in directione opposita versus D procedunt, crescente B A $=$ B d fluenti majori: atque ideo N $=$ A d fluens minor, N $=$ B d fluens major S Y: II.$^{a}$ vero quæ jam erat S Y fit in hoc casu $= \dfrac{(1+m)-m}{(1+m)-m}$, ob quam fluentes versus eamdem partem ac in primo casu procedunt finite crescentes. Facto igitur *zero* finite major ($\infty$) utraque formula pertinet ad S Y: fluentes in utraque finite procedunt, sed primæ in directione secundis contraria. Verum in utraque fluentes nequeunt infinitæ fieri, nisi ($m$) infinita ponatur: tunc enim erit

$$\text{I.}^{a} \quad \frac{-\left(\dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty} - 1\right) + \dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty}}{-\left(\dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty} - 1\right) + \dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty}} = \frac{-(\infty - 1) + \infty}{-(\infty - 1) + \infty} ;$$

$$\text{II.}^{a} \quad \frac{\left(1 + \dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty}\right) - \dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty}}{\left(1 + \dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty}\right) - \dfrac{\infty \cdot \infty}{\infty}} = \frac{(1 + \infty) - \infty}{(1 + \infty) - \infty}$$ in quo casu utraque fluens fit infinita, sed in primo casu M : N : : $\infty - 1 : \infty$, sive M fluens minor, N major: in secundo M : N : : $1 + \infty : \infty$, scilicet M major, N minor, mutata primarum directione. Quare ratio ad suos ultimos reducta legitimos terminos, qua relatio fluentium in limite S A exhibetur, erit $1 - o : o$,

& M : N : : $1 - o : o$ \
vel M : N : : $o : 1 - o$ } exclusо ($\infty$) prorsus repugnante in hoc sy-

systemate, in quo fluentes limitibus semper coercentur finitis. Contra vero in systemate SY, in quo fluentes duobus limitibus minimo & maximo gaudent, ratio in limite minimo erit $1+o : o$; & in maximo $\infty + 1 : \infty$, vel $\infty - 1 : \infty$

Itaque in primo $\left.\begin{array}{l} M:N::1+o:\ o \\ \text{vel}\ M:N::\ o\ :1+o \end{array}\right\}$: in secundo $\left.\begin{array}{l} M:N::\infty+1:\infty \\ \text{vel}\ M:N::\infty-1:\infty \end{array}\right\}$

fluentibus scilicet utrisque vere infinitis. Hæc animadversio tantæ est necessitatis, ut nisi ad hanc diligenter attendas in constituendis limitibus veris utriusque systematis in errores sane gravissimos incides, quoties naturam ac formam absolutam utriusque fluentis in utroque systemate volueris determinare. Et sane nemo est qui non intelligat rationem $o : 1$ eamdem esse cum ratione $1 : \infty$; tamen si hac ultima in locum primæ substituta, ponatur $M : N :: 1 : \infty$, & ex hac analogia ad inveniendas fluentes, ut docuimus, transitus fiat, erit in systemate SA $M : N :: \frac{1}{1+\infty} AB : \frac{\infty}{\infty+1} AB$, & $M = \frac{1}{1+\infty} AB$; $N = \frac{\infty}{\infty+1} AB$; quæ a veris quam longissime abludunt, cum sit vere $M = \frac{1}{1+o} AB$; $N = \frac{o}{o+1} BA$; & in SY $M : N :: \frac{1}{\infty-1} AB : \frac{\infty}{\infty-1} AB$; $M = \frac{1}{\infty-1} AB$; $N = \frac{\infty}{\infty-1} AB$, quando veræ sunt $M = \frac{1}{1-o} AB$; $N = \frac{o}{1-o} AB$ in limite minimo systematis. In limite vero maximo SY cum sit $\infty \pm 1 : \infty$ ut quantitas finita ad finitam (licet hujusmodi ratio non ponatur æqualitatis, ut vulgo ad erroris augmentum perpetuo fit) sed fiat ut finita ($m$) ad finitam ($n$), semper tamen fluentes singulæ infinitæ tamquam finitæ producuntur, ignorato prorsus limite illo infinito absoluto, quo utraque gaudet. Quid mirum igitur si horum ignoratione Analysis communis multiplicibus undique tamquam vinculis præpedita in suis calculis æstuet incerta, & doctrinæ disconveniat ordine toto, modo hoc ($\infty$) quod dicitur *infinitum absolutum* libenter admittens, tamquam immanissimum absurdum modo repudians?

§. 16. Hisce explicatis ad doctrinam communem, qua æquationes primi gradus moderantur, excutiendam intimius accedamus. Ac primum præmitto æquationes omnes primi gradus vulgo usurpatas a relatione, qua se invicem respiciunt duæ fluentes homologæ, derivari posse, ut & quæ supra diximus §. 6. 7. 12 de methodo, qua licet a diversitate ad identitatem æquationis & viceversa transitum facere, & praxis communis, qua semper æquatio ab analogia, &c.

& viceversa analogia ab æquatione derivatur, manifeste declarant: quæ relatio cum non nisi inter duas quantitates dari possit, luce clarius patet in quacumque æquatione vulgo usurpata semper duas fluentes simul concurrere oportere (appareant ambæ vel non expresse in æquatione proposita) atque esse illius generis, quæ ab Analysi communi valore indeterminatæ appellantur. Falsa igitur est communis æquationum divisio in determinatas atque indeterminatas, & falsum est atque absurdum criterium, ut hæc invicem secernantur, desumptum ab una, vel a duabus variabilibus in æquatione expresse existentibus. Quod si a me quæras quæ fuerit prima hujusce falsæ opinionis universim receptæ caussa, fidenter dicam in eo sitam esse, quod quæ sint fluentes, earumque natura, plane ab Analysi communi ignoratur, & cum incognitis determinatis, quæ quæruntur, universim confunduntur: qua tamen fluentium natura ignorata, omnino tollitur Analysis geometrica proprie dicta, sive applicatio illa Analyseos abstractæ ad geometrica, quam tamen ad sublimiorem amplitudinis gradum novis sibi invicem succedentibus artificiis nunc demum evectam fuisse sibi blanditur. Et sane qui fieri posset, ut propositam æquationem ex: gr: $x = a$ determinatam reputasset, si cognovisset $x$ natura sua augeri vel minui posse ultra quemcumque magnitudinis gradum, atque supra vel infra valorem ($a$): atque proinde propositam æquationem esse limitis $x = a \pm o\, y$; a qua deducitur æquatio generalis $x = a - y$ S A, vel $x = a + y$ S Y, quæ limitis æque bene utrique systemati aptari potest, ut jam satis superque & in P. I, & Cap: VII. *hujus* §. 36. & seqq. demonstravimus?

§. 17. Quid plura? ex ipsa doctrina communi evincitur, æquationes illas, quæ una tantum variabili constant (licet etiam non sint limitis) esse tamen natura sua valore indeterminatas. Nonne enim æquatio ex: gr: $x = \frac{m}{n}\, y$ ab Analysi communi, nemine dissentiente, utpote duabus variabilibus conflata, indeterminata statuitur? Porro ex hac deducitur analogia $x : y :: m : n$ ($m$, $n$ numeris relationem fluentium indicantibus), in qua auxilio nostræ Theoriæ a numeris ad fluentes ipsas transitus fit, facta $x : y :: \frac{m}{m+n}$ A B : $\frac{n}{n+m}$ B A S A, vel $x : y :: \frac{m}{m-n}$ A B : $\frac{n}{m-n}$ A B S Y; ergo ex prima habetur $x = \frac{m}{m+n}$ A B; $y = \frac{n}{n+m}$ B A; ex secunda $x = \frac{m}{m-n}$ A B; $y = \frac{n}{m-n}$ A B, quibus habentur & valores absoluti fluentium, & earum forma pro systematis diversitate. Sed in S A $\frac{m}{m+n}$ A B

=

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}{1}\ AB;\quad \frac{n}{n+m}\ BA$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right)BA-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1}\ AB;\ \text{in } S\Upsilon\quad \frac{m}{m-n}\ AB$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)\right)}{1}\ AB;\quad \frac{n}{m-n}\ AB$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)\right)}{1}\ AB$$

: quæ si more communi efferantur, posita $AB = a$; & $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) AB = z$ in $SA$; & in $S\Upsilon$ $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) AB = z$: erit in $SA$

$$\left.\begin{array}{l} x : y :: \frac{m}{m+n}\cdot a : \frac{n}{n+m}\cdot a :: m : n \\ x : y :: \frac{a}{2}+z : \frac{a}{2}-z :: m : n. \end{array}\right\}\ x = \frac{m}{m+n}\cdot a =$$

$\frac{a}{2}+z$; $y = \frac{n}{n+m}\cdot a = \frac{a}{2} - z$; & in $S\Upsilon$

$$\left.\begin{array}{l} x : y :: \frac{m}{m-n}\cdot a : \frac{n}{m-n}\cdot a :: m : n \\ x : y :: \frac{a}{2}+z : -\frac{a}{2}+z :: m : n \end{array}\right\}\ x = \frac{m}{m-n}\cdot a =$$

$\frac{a}{2}+z$; $y = \frac{n}{m-n}\cdot a = -\frac{a}{2}+z$.

Ergo si æquatio $x = \frac{m}{n}\cdot y$ est valore indeterminata, indeterminata etiam

ma-

manebit si in locum $x$, $y$ (quæ sunt fluentes omnino indeterminatæ) ipsæ ad alterutrum systema natura determinatæ substituantur. Quare habebitur

$$\left.\begin{matrix} n x = m y \\ n\frac{a}{2} + n z = m\frac{a}{2} - m z \end{matrix}\right\} \text{in SA}; \quad \left.\begin{matrix} n x = m y \\ n\frac{a}{2} + n z = - m\frac{a}{2} + m z \end{matrix}\right\} \text{in SY}:$$

scilicet in SA $nx$ idem ac $n\cdot\frac{a}{2} + nz$; $my$ idem ac $m\frac{a}{2} - mz$:

& in SY $nx$ idem ac $n\frac{a}{2} + nz$; $my$ idem ac $-m\frac{a}{2} + mz$;

sed $nx = my$ censetur valore indeterminata; ergo erunt sequentes singulæ valore indeterminatæ, cum singulæ sint eædem ac prima, sed tantum quoad formam ad naturam sui systematis determinatæ.

§. 18. Intimius autem in rem hanc tantam inquirenti patebit falsi hujusce judicii pravitatem ideo altas in Analysi communi radices egisse, quia nec ipsa æquationum, quas indeterminatas vocat, natura satis ab ipsa explorata fuerit. In æquatione enim indeterminata $x = \frac{m}{n} y$, quæ oritur a ratione, qua se se respiciunt fluentes homologæ $x$, $y$ sive ab analogia $x : y :: m : n$, ratio ipsa $m : n$ constans sumitur, & fractio $\frac{m}{n}$ numeris primis constantibus conflata. Tamen a nostra Theoria docemur $m$, $n$ esse numeratores fluentium homologarum $x$, $y$, qui necessario fluentes sint oportet, ut $x$, $y$ naturam fluentium induere possint: hac enim conditione sublata quantitates geometricæ $x$, $y$ numeratoribus afficientur constantibus contra veram naturam fluentium homologarum. Quare æquatio $x = \frac{m}{n} y$ erit æquatio quatuor fluentibus conflata, cujus solutionem aut investigationem cum vires suas Analysis communis superare experta fuerit, arbitrio fractionem $\frac{m}{n}$ constantem posuit, minime intelligens hoc statuto coefficientes singulos fluentium homologarum fieri constantes, & veram fluentium naturam ab istis pendentem perturbari, ac funditus tolli primum, quo nititur vera æquationum Theoria, fundamentum. Quod cum tandem nostra Theoria prospere affecuta fuerit, fidenter docet æquationem indeterminatam $x = \frac{m}{n} y$ ex diversis fluentibus constantem fieri ex: gr: $x = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m \pm n} AB = \frac{m}{m \pm n} AB = \frac{m}{m \pm n} a$ in unam tantum fluentem identicam con-

versam substituta in locum $y$ ea formulæ natura, quæ alterutrius systematis propria est, atque ideo utraque æquatio indeterminata quidem erit: hoc tamen discrimine, quod prima valore & natura omnino indeterminata, natura ut geometriæ applicetur determinanda necessario est ope secundæ, quæ indeterminata quidem remanet in valore, sed naturam fluentis determinatæ assumit.

§. 19. Ex hac arbitraria male intellecta & male statuta constanti ratione $m:n$, qua se se respiciunt fluentes in æquatione $x = \frac{m}{n} y$ alter gravissimus ac multiplex scatet error, quoties valores peculiares fluentium $x$, $y$ singularum invicem ab Analysi determinantur. Si enim ponatur ex: gr: $y = o$, docet esse $x = o$ quod tamen a veritate abludit mirum quantum! Cum enim ex nostra Theoria ($n$) sit numerator fluentis $y$, posito $y = o$ erit necessario $n = o$, atque ideo $x = \frac{m}{o} . o$ quæ certe quidem *zero* esse non potest. Ut vero ejus valor legitimus statuatur, æquatio proposita est primum ad aliquod systema reducenda. Reducatur primum ad S A, ut sit $x = \frac{m}{n} y = \frac{m}{n} . \frac{n}{n+m}$ B A, & posito $n = o$, erit $x = \frac{m}{m+o}$ A B, sive $x =$ A B maxima: tantum igitur abest, ut $x$ (ut vulgo creditur) sit *zero*, ut sit maxima quæ haberi potest in hoc systemate, quæ quidem nequit fieri *zero* nisi ponatur $m = o$. In hoc tamen casu erit $x = \frac{m}{n} . y = \frac{o}{n} . \frac{n}{n+o} .$ B A, sive $x = o$, & $y = \frac{n}{n+o}$ B A $=$ B A maxima. Vide igitur necessitatem duplicis valoris limitis in unaquaque æquatione S A formæ $x = \frac{m}{n} y$ quoties alteruter limes sumitur: ut vere dici possit in proposita æquatione esse in limite $x = o$ A B $=$ A B: non quia *zero* sit æqualis A B, sed quia liberum est in ipsa ponere $m$, vel $y$ æqualem *zero*: nam si ponatur $y = o$, patet fieri $x = a$ maximam (posito protonumero A B $= a$): at posito $m = o$, fieri $x = o . a$, & $y$ maximam $= a$: ac insuper facta $y = o$ determinatur $m = 1$, & $x = \frac{m}{o} . o y = m . \frac{o}{o} . a = 1 . \frac{o}{o} . a = a$ maxima: qua tandem determinatur verus valor fractionis $m \frac{o}{o} y$ in systemate S A, & utriusque fluentis limitis, methodo communi prorsus impervius.

§. 20.

§. 20. Quemadmodum est illi impervius etiam in casibus mediis. Si enim posita $x = \frac{5}{3} y$ poneretur $y = \frac{1}{7} a$, fieret $x = \frac{5}{21} . a = \frac{5}{5+16} . a$ sive fluens minor SA, cui respondet major $y = \frac{16}{16+5} . a$, & $x : y :: 5 : 16$, ex qua $x = \frac{5}{16} y$, quæ longe differt a proposita $x = \frac{5}{3} y$: ex quo patet: determinata fractione $\frac{m}{n} = \frac{5}{3}$ determinari necessario valorem ipsius $y$, ac ejus numeratorem $= 3$: quod si aliter fiat ad alias fluentes homologas ejusdem systematis, si $y$ ponatur unitate minor, transitus fit. Quod si in æquatione $x = \frac{5}{3} y$ ponatur $y = 3 a$, erit quidem $x = \frac{5}{3} . 3 a = \frac{5}{1} a = \frac{5}{5-4} . a$, quæ sit fluens major SY, cui respondet sua homologa minor $\frac{4}{5-4} . a$, & $x : y :: 5 : 4$; & facto transitu ab analogia ad æquationem $x = \frac{5}{4} y$, quæ est vera æquatio continens veras fluentes homologas in hoc casu longe diversa a proposita $x = \frac{5}{3} y$. Ne igitur a fluentibus ad fluentes, a systemate ad systema incaute transeamus, determinatione arbitraria $x$ vel $y$; determinata jam prius fractione $\frac{m}{n}$, sive ratione $m : n$, vel viceversa, sequenda est doctrina a nobis hîc tradita, qua docemur determinata ratione $m : n$, ac systemate, necessario determinari fluentes, & contra determinatis fluentibus (ex qua determinatione necessario determinatur systema) ratio ipsa $m : n$ determinetur oportet ita, ut nullus amplius arbitrio locus relinquatur: hac differentia, quod determinata prius ratione $m : n$ (universim loquendo) liberum est & arbitrarium utrumque systema: at determinatis fluentibus, & ratio $m : n$, & ipsum systema necessario determinatur.

§. 21. Sumpta nunc eadem æquatio $x = \frac{m}{n} y$, posita $n < m$, determinetur ad systema SY, ut sit $x = \frac{m}{n} y = \frac{m}{n} . \frac{n}{m-n} . a$; & posito $y = o$,

 erit

erit $x = \frac{m}{o} . o = \frac{m}{o} . \frac{o}{m-o} . a = 1 . \frac{o}{o} . a$, quæ eſt fluens major facta minima S Y; cum ſit enim univerſim fluens major $x = \frac{m}{m-n} . a$ ſemper unitate major, quo magis creſcit $n$, eo magis creſcat oportet $m$, & viceverſa; donec facta $n$ minima $= o$, fit $x$ minima $= \frac{1}{1-o} . a$. Quod ſi fiat $m = o$, erit $x = \frac{o}{n} y = \frac{o}{n} . \frac{n}{n-o} . a = \frac{o}{1} . \frac{a}{1-o} = o . a$ fluens minor minima, cui reſpondet $y = \frac{a}{1-o}$ homologa major item minima. In hoc igitur ſyſtemate in æquatione $x = \frac{m}{n} . y$, poſita $y = o$, fit $x$ fluens major $= a$ minima; & poſita $m = o$ fit quidem $x = o . a$, & $y = a$, ſed tranſmutantur fluentes; & $x$, quæ erat major in primo caſu, fit in ſecundo minor; & viceverſa $y$, quæ erat in primo caſu minor, fit in ſecundo major. In caſibus vero intermediis facta ut ſupra $x = \frac{5}{3} y = \frac{5}{5-2} y$, erit $y = \frac{2}{5-2} . a$ fluens minor, & $x = \frac{5}{5-2} a$ fluens major: at facto $y = \frac{1}{7} . a$, erit $x = \frac{5}{21} . a = \frac{5}{26-5} . a$ fluens minor, & major $y = \frac{26}{26-5} . a$, & $x : y :: 5 : 26$, & $x = \frac{5}{26} y$. In hoc vero ſyſtemate ad habendas utraſque fluentes homologas limitis infiniti §. 15. hujus docemur fieri oportere $x : y :: \infty + 1 : \infty$, vel $x : y :: \infty - 1 : \infty$, ex quibus $x = \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) y$, vel $x = \left(\frac{\infty-1}{\infty}\right) y$, & $\frac{m}{n} = \frac{\infty+1}{\infty}$, vel $= \frac{\infty-1}{\infty}$ verus fractionis valor in limite infinito. Hinc $x = \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) y = \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) \frac{\infty}{(\infty+1)-\infty} . a = \left(\frac{\infty+1}{(\infty+1)-\infty}\right) . a$ fluens major infinita, vel $x = \left(\frac{\infty-1}{\infty}\right) y = \left(\frac{\infty-1}{\infty}\right) \frac{\infty}{\infty-(\infty-1)} a = \left(\frac{\infty-1}{\infty-(\infty-1)}\right) . a$

fluens

fluens minor infinita: ex quibus constat non posse fieri in hoc systemate alterutrum terminum rationis $m$ vel $n$ infinitum, quin alter infinitus evadat. Hunc tamen limitem infinitum in systemate S A absolutam repugnantiam involvere satis ex eodem §. 15. evincitur.

§. 22. Tamen si methodum communem consulas, quemadmodum in æquatione $x = \frac{m}{n} y$, posita $y = o$, docet esse $x = o$, quæ tamen est æqualis $a$ maxima in S A, minima in S Y; ita facta $n = o$, docet esse $x = \frac{m}{o} . y$ infinitam, quæ tamen in utroque systemate æqualis est $(a)$: ita ut eadem sit $x = \frac{m}{n} . o\, y = \frac{m}{o} . y$, cum ex demonstratis numerator fluentis $y$ sit idem ac $n$. In tantum igitur peccat Analysis communis, ut quæ fluens est finita & eadem modo *zero*, modo *infinito* perperam æquet, & promiscue tam systemati S A, quam systemati S Y fluentem infinitam applicet: quæ tamen infinita fluens systemati S A absolute repugnat; & in systemate S Y cui vere competit, longe aliter ac ipsa est, a methodo communi determinatur. Horum tamen omnium, & quidem gravissimorum errorum caussam ex eo repetendam esse quisque nunc aperte intelligit, quod scilicet æquationes, quibus tamquam primo ac uno instrumento utitur vetus Analysis ad suos Calculos concinnandos, & geometricis affectionibus applicandos, non nisi ex relatione, qua fluentes symbolis generalibus $x$, $y$ omnino indeterminatis conflatæ se se respiciunt, sibi efformaverit, quas tamen, ignoratione horum omnium, quæ hic docemus, in identicas, sive in eas, quæ veram & absolutam singularum fluentium homologarum naturam ac formam exhibent, nequit convertere: quibus sine omnia in incerto relinquuntur, nec formulæ analyticæ rite tractari possunt, nec ad legitimam constructionem geometricam applicari. Hinc nihil absoluti haberi posse; omnia & singula a relatione pendere ad ravim usque inculcat, suis tantum æquationibus docefacta: hactenus tamen ignorat qui sit primus relationis terminus nomine unitatis designatus, ad quem suas variabiles rite referre possit.

§. 23. Ut quod dico semper magis illustretur, ad constructionem geometricam communis Analyseos superioris æquationis $x = \frac{m}{n} . y$ excutiendam accedamus. Constructio hæc æquationis $y = \frac{a}{b} x$ (ut ipsissimis verbis clarissimi Riccati Inst. Analyt. T. I. Cap: VIII. utar) sic a communi methodo peragitur. „ In linea recta quacumque §. 13. M N (*Fig.* 22.) indefinita, „ determina punctum quodlibet C, & cape rectas quotlubet CV determinatas; „ jam si rectas hasce loco $x$ successive in æquatione substituas, necesse est prodeant successive totidem determinati valores $y$ totidem abscissis C V respon-

„ den-

„ dentes, qui in nostro hoc casu erunt quartæ proportionales post $b$, $a$, &
„ assumptam quamcumque C V. Sint hæ quartæ proportionales lineæ V Q;
„ illas applica lineæ M N unamquamque ad punctum illud V, ubi sua de-
„ finit abscissa, sed idem sit omnium angulus C V Q, hoc est sint parallelæ.
„ Jam vero si per puncta omnia Q ducas lineam, ea erit linea æquationis

„ $y = \frac{a}{b} \cdot x$; & revera manifestum est lineam B D relationem exprimere

„ omnium coordinatarum C V, V Q eamque esse lineam rectam, quæ neces-
„ sario secabit M N in puncto C initio abscissarum: est enim triangulorum
„ omnium rectilineorum proprium, ut quæcumque C V sint ad suas V Q inter
„ se parallelas in constanti ratione, ut hîc contingit, ubi coordinatæ sunt inter
„ se in ratione $b : a$ „ ex hac vulgo usurpata constructione colligitur 1.$^{um}$ rationem numericam $b : a$ semper ut constantem usurpari, atque ideo si $x$, $y$, ut vulgo fit, fluentes homologæ sumantur, cum ex nostra Theoria coefficiente numerico fluenti, & eodem protonumero gaudeant, naturam vere fluentium amittunt, communi protonumero manente indeterminato, cujus indeterminatione, ut vidimus, indeterminata remanet species peculiaris systematis, atque ipsæ variabiles quidem fiunt, cum cuicumque ad libitum protonumero applicari possint, sed non fluentes, coefficiente, a quo pendet vera fluxionis caussa, semper eodem manente. Cum vero nequeat peculiaris locus geometricus æquationis exhiberi, nisi prius determinetur protonumerus, patet constructionem communem nihil omnino conferre ad locum geometricum vere fluentium constituendum, qui adhuc in suspenso manet, nisi prius determinetur generalis conditio, quam fluentes in quocumque fluxionis suæ statu constanter ac semper servare debent. Ex hac itaque vulgo usurpata constructione nihil aliud erui potest nisi quod fluentes C V, V Q quæcumque sint, in eadem semper ratione crescunt, atque in eodem originis puncto C evanescunt: quod tamen in utroque systemate repugnat mirum quantum! In systemate enim S A facta una zero, vidimus alteram fieri maximam protonumero æqualem, & in systemate S Y minimam: ita ut repugnet simul utramque in utroque systemate evanescere posse. Inutilis igitur, fallax, ac falsa hujusmodi vulgata constructio in caussa fuit, cur in prima ac simpliciori Analyseos ad Geometriam applicatione tot difficultatibus Analystæ se implicaverint semper magis in progressu numero & gravitate crescentibus.

§. 24. A quibus nunquam tamen velint nolint sese expedire poterunt, nisi ad meam Theoriam confugientes tandem discant rationem numericam $b : a$, quam constantem volunt, esse natura sua fluentem in hoc peculiari casu arbitrio determinatam, systema vero & protonumerum omnino indeterminatum, & $x$, $y$, eadem semper manente ratione, fluere non posse, sed tantum variabiles fieri posse ob systematis & protonumeri infinitimodam varietatem, quæ utraque a communi exhibita constructione in incerto relinquitur. Nam æquatio

$x = \frac{b}{a} y$ in analogiam conversa ex mea Theoria exhibet $x : y :: b : a$

$:: \frac{b}{b+a} \cdot z : \frac{a}{a+b} \cdot z$ SA protonumero $z$; vel $x : y :: \frac{b}{b-a} \cdot z$ $: \frac{a}{b-a} \cdot z$ SY, posito $b > a$, vel $x : y :: \frac{b}{a-b} \cdot z : \frac{a}{a-b} \cdot z$, posito $b < a$. Et in primo casu SA $x = \frac{b}{b+a} \cdot z$; $y = \frac{a}{a+b} \cdot z$; in secundo SY $x = \frac{b}{\pm b \mp a} \cdot z$; $y = \frac{a}{\pm b \mp a} \cdot z$: ex quibus constat symbolis $b$, $a$ numeros abstractos indicari, simbolis vero $x$, $y$ significari fluentes homologas, quæ singulæ manente constanti $\frac{b}{a}$, variare quidem (ut vidimus) protonumero ad infinitum variante & ipsæ possunt ad infinitum quantitate; fluere tamen, semel valore protonumeri statuto, in eodem systemate nunquam possunt: atque ideo constructione proposita, nec fluere, neque suo systemati natura & specie determinato aptari possunt. Ut igitur constructio communis omnimode perficiatur, ita te geras oportet: sumantur in constructione communi ex infinitis ad angulum variabiles ex: gr: CV, VQ; ac primum ponatur, ad systematis SA determinationem, esse $CV + VQ = \frac{b}{b+a} \cdot z + \frac{a}{a+b} \cdot z = CF$: quo facto determinatur protonumerus $z = CF$. Hoc constituto, ex puncto F fixo duc ad angulum semirectum constantem VFQ lineam indefinitam FG per Q transeuntem, erit $VF = VQ$, & $CV + VQ = CV + VF = CF$: atque CV, VQ in hoc casu fluentes homologæ in ratione $b : a$. Sed crescente VF sive VQ, & facta SP, ut conditio necessaria systematis assumpti SA servetur, necessario decrescat oportet CV, fiatque CS, atque ideo ratio prima $b : a$, qua se se respiciebant fluentes CV, VQ, omnino immutetur oportet, & angulus VCQ transmutetur in majorem SCP, & fluentes in alia a prima diversa ratione se se respiciant. Hæc vero anguli mutatio cum successiva fluentium fluxione & ipsa mutetur; necessario consequitur fluentes universim se se respicere oportere in ratione numerica fluenti $m : n$, quæ in locum constantis $b : a$ est substituenda ut sit universim fluens $x = \frac{b}{b+a} z = \frac{m}{m+n} CF$; & $y = \frac{a}{a+b} \cdot z = \frac{n}{n+m} FC$. Posita $z$ valoris indeterminati, determinata quidem est natura systematis nempe SA, sed species arbitrio relinquitur, cum in locum $z$ protonumerum indican-

cantis quævis linea C F ad ſpeciem determinandam ſubſtitui poſſit, quæ licet ponatur $= o$, vel $= \infty$, numquam tamen naturam ſyſtematis immutare valet.

§. 25. Quod ſi punctum V hinc vel inde extra puncta fixa (*Fig.* 23.) A; F, fluendo prorumpat, tunc C V' facta major protonumero C F, nequit huic æquari niſi ab hac ſubtrahatur ſua homologa F V', ut ſit C V' — F V' = C F, & ducta F G' ad angulum conſtantem ſemirectum, erit ſemper V' Q' = F V', & differentia ſingularum fluentium homologarum conſtans = C F conſtituet ſyſtema S Y, in quo fluens C V' ſemper major fluente homologa F V': poſita igitur æquatione $x = \frac{b}{a} \cdot y$, erit $x : y :: b : a :: \frac{b}{b-a} \cdot z : \frac{a}{b-a} \cdot z$ :: C V' : V Q' (poſita $b > a$) :: $\frac{b}{b-a} \cdot CF : \frac{a}{b-a} \; CF$ :: univerſim $\frac{m}{m-n}$ C F : $\frac{n}{m-n} \cdot CF$. Sed facta $b < a$ utraque fluens fit negativa, atque ideo in hoc caſu $-x : -y :: -\frac{b}{a-b} \cdot z : -\frac{a}{a-b} \; z$ :: — C V' : — V Q' = — F V': ſed major — C V' negativa fit poſitiva C V", & convertitur in fluentem minorem; & minor — F V' negativa fit F V" poſitiva major: ergo analogia ſuperior terminis negativis affecta convertitur in $x : y :: \frac{b}{a-b} \; z : \frac{a}{a-b} \; z$ :: C V" : F V" :: $\frac{b}{a-b} \cdot FC : \frac{a}{a-b} \cdot FC$: in hoc etiam ſyſtemate F C protonumerus licet ponatur ($o$) vel ($\infty$) naturam ſyſtematis non immutat. Conſtructio igitur legitima æquationis $x = \frac{b}{a} \cdot x$ in locum conſtructionis vulgo uſurpatæ ſubſtituenda eſt ea ipſa, quam dedimus *Fig.* 5. P. I. Lib: II. Cap: II, quam diximus exhibere limites rectilineos utriuſque ſyſtematis æquationum ſecundæ dimenſionis, quæ, ut illic docuimus, viam ſternit ad limites curvilineos, ſive ad Loca geometrica ſecundæ dimenſionis invenienda. In hanc tamen non ultra hîc inquirimus, cum ſit reſervanda T. II. in quo de æquationibus ſecundæ & ulterioris dimenſionis ex compoſito agemus.

§. 26. Ut vero cognoſcas quam longe a veritate abludat ea vulgo recepta opinio, qua creditur in æquatione $x = \frac{m}{n} \, y$ rationem numericam $m : n$ conſtantem eſſe ac ſemper eamdem, qua nititur communis hujuſce æquationis conſtructio, animadvertas velim nos ſupra oſtendiſſe duobus diverſis modis valorem ſingularum fluentium obtineri poſſe. Primo modo data una fluente invenitur altera, atque ideo æquatio a ratione, qua ſe ſe reſpiciunt fluentes, deducta am-

ambas fluentes contineat oportet, sitque $x = \frac{m}{n} . y$, & $y = \frac{n}{m} . x$: secundo modo valor absolutus alterutrius fluentis exhibetur, proindeque æquatio una tantum fluente constans est identica (ut $x = \frac{m}{m+n} a$; $y = \frac{n}{n+m} . a$) a cujus secundo membro eruitur natura ac forma fluentis in primo membro omnino indeterminatæ. Ex hac doctrina consequitur esse

$$\text{in S A} \begin{cases} x = \frac{m}{n} . y = \frac{m}{m+n} . a = \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}{1} a = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}{1} a & m > n \\ x = \frac{m}{n} . y = \frac{m}{m+n} . a = \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\right)}{1} a = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\right)}{3} a & m < n \end{cases}$$

$$\text{in S Y} \begin{cases} x = \frac{m}{n} . y = \frac{m}{m-n} . a = \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1} a = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1} a & m > n \\ x = \frac{m}{n} . y = \frac{m}{n-m} . a = \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)\right)}{1} a = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)\right)}{1} a & m < n \end{cases}$$

Hisce formulis probe perspectis intelliges tam esse indeterminatam (sive fluentem) $x = \frac{m}{n} y$ duas fluentes continentem, quam quamvis aliam una fluente conflatam, in quam hæc prima transmutatur, dummodo numeri $m$, $n$, a quibus tantum pendet cujuscumque æquationis superioris indeterminatio, fluentes ponantur. Duplici igitur modo in constituenda æquationum natura peccat Analysis communis: primo modo in tradenda definitione æquationum determinatarum & indeterminatarum. *Æquationes enim quæ unam habent incognitam* ab Analysi communi *dicuntur determinatæ. Indeterminatæ dicuntur illæ, quæ incognitas plures continent*: Ricc: T. I. Cap: IV. §. *6*: quas tamen novimus utrasque fluentes esse, sed in primis habetur valor absolutus fluentis, in secundis ab alterutrius valore valor alterutrius derivatur, qui tamen in utrisque fluens & infinitis valoribus successive obnoxius utriusque generis æquationes indeterminatas reddit. Ideo vero hasce falsas definitiones sibi constituit Analysis communis, quia numeros $m$, $n$ semper constantes reputat: ex qua falsa suppositione in contradictionem incidit nullo modo sanandam. Si enim $m$, $n$ numeri constantes sunt, $x$, $y$ & ipsæ constantes sint oportet, nec ullis vicissitudinibus æquatio

ipsa $x = \frac{m}{n} y$ obnoxia, sed omnino determinata. Repugnat enim indeterminatio æquationis $x = \frac{m}{n} y$, & singulorum numerorum $m$, $n$ ad unum tantum valorem determinatio: qui est secundus error, in quem labitur ipsa in hac diversa æquationum determinatarum & indeterminatarum natura statuenda.

§. 27. Insuper in nostra formula duobus terminis constante evidentissima se prodit ratio, cur in systemate S A primus terminus $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)a$ sit necessario constans, fluens secundus semper primo constanti minor, cum sit $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)a$; & cur formula fluentem repræsentans modo duobus terminis positivis, modo horum terminorum differentiæ sit æqualis, prout $m$ major, vel minor $n$. Contra vero cur in systemate S Y primus fluentis terminus sit fluens, secundus constans & minor fluenti, utpote primus æqualis $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)a$, secundus $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)a$: ac tandem cur neutra fluentium formula utriusque systematis rite constituta fieri possit negativa, quicumque valor fluentibus $m$, $n$ tribuatur. Hæc tamen singula tam necessaria ad æquationum Theoriam rite inchoandam, quæ oculis ipsis a nostris formulis subjiciuntur, si symbolis ac formulis utamur passim receptis omnino impervia sunt: ut minime mirum sit, si conatus omnes illustriorum Analystarum uni vulgari Methodo se committentium in statuendis primis æquationum placitis irriti hactenus omnino fuerint. Et sane si formulæ nostræ superiores more communi efferantur in hasce sequentes convertentur vocata fluente $z$

$$x = \frac{m}{n} y = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}a - z\right) = \frac{1}{2}a + z = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}a + z\right) = \frac{1}{2}a - z$$

$$= \frac{m}{n}\left(z - \frac{1}{2}a\right) = z + \frac{1}{2}a = \frac{m}{n}\left(z + \frac{1}{2}a\right) = z - \frac{1}{2}a;$$ quas singulas pro diversitate systematis & valoris $m$, $n$ supra ex nostra Theoria veras esse deprehendimus. Tamen frustra requiras ab Analysi communi quid sibi velint, & quomodo & quando cum veritate conciliari possint hujusmodi tam diversæ formulæ, in quas sæpenumero suis artificiis necessario, velit nolit, ipsa incidit vel invita. A nostra quidem Theoria, posita $\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}a - z\right) = \frac{1}{2}a + z$,

ex

ex qua fit $z = \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) a$, & posita $n > m$, $z = -\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) a$ docemur in æquatione assumpta systematis S A ponendam esse $z$ negativam, ut convertatur in $\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2} a + z\right) = \frac{1}{2} a - z$, quæ est altera nostra quando $n > m$. Hæc tamen prima si systemati S Y applicetur, convertitur in $\frac{m}{n}\left(z - \frac{1}{2} a\right) = z + \frac{1}{2} a$, & $z = \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) a$, posita $n < m$: at facta $n > m$ erit $z = -\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) a$, hoc est $z$ negativa, & æquatio fit $\frac{m}{n}\left(-z - \frac{1}{2} a\right) = -z + \frac{1}{2} a$, sive $\frac{m}{n}\left(z + \frac{1}{2} a\right) = z - \frac{1}{2} a$, quæ est altera a nostra Theoria exhibita, quando $m$ est minor $n$ in systemate S Y. Verum si a communi methodo quæras quomodo intelligendæ sint hæ ipsæ, quas exhibet, formulæ, frustra quæras, ac sæpe in errorem induxeris. Nam ut hoc uno exemplo (quod possem pluribus) rem declarem, ex meis formulis patet esse

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{2} + z : \frac{a}{2} - z \\ \frac{a}{2} - z : \frac{a}{2} + z \\ z + \frac{a}{2} : z - \frac{a}{2} \\ z - \frac{a}{2} : z + \frac{a}{2} \end{array}\right\} :: m : n ;$$

sed primæ duæ pertinent ad S A, in quo $z < \frac{a}{2}$, duæ sequentes ad S Y, in quo $z > \frac{a}{2}$: prima vero & tertia quando $m > n$: secunda & quarta quando $m < n$. In methodo tamen communi sumpta una qualibet ex primis rationibus, quæ recte congruunt cum ratione $m : n$, hæc eadem tamquam legitima retinetur mutato quocumque modo systemate, & valore ipsius $m$ supra

vel infra $n$. Hinc fit ut ſumpta ex: gr: vera analogia $\frac{a}{2} + z : \frac{a}{2} - z$ $: : m : n$ quando $m > n$, ſi fiat $m < n$ in quo caſu $z$ quæ erat in primo termino poſitiva, fit negativa, & viceverſa in ſecundo, in methodo communi retento fluenti $z$ eodem ſigno, quæ eſt negativa, ſumitur poſitiva & viceverſa: ex quo oritur poſitivum æquale negativo.

§. 28. Inſuper Analyſis communis abſurdas dicet æquationes $\frac{1}{2} a + z = \frac{1}{2} a - z = z + \frac{1}{2} a = z - \frac{1}{2} a$, quas tamen neceſſarias mea Theoria declarat. Vel enim $\frac{1}{2} a + z$ pertinet ad ſyſtema S A, in quo $z$ eſt ſemidifferentia fluentium, & in hoc caſu erit $\frac{1}{2} a + z = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right) a}{1}$ ſi $m > n$, at ſi $m < n$ erit $= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\right) a}{1} = \frac{1}{2} a - z$, atque ideo $\frac{1}{2} a + z$ convertitur in $\frac{1}{2} a - z$. Vel $\frac{1}{2} a + z$ pertinet ad S Y, in quo $z$ eſt ſemiſumma fluentium, & $z + \frac{1}{2} a$ $= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) a + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) a}{1}$ ſi ſit $m > n$, at ſi ſit $m < n$, erit $= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)\right) a}{1} = z - \frac{1}{2} a$. Et ſane utraque æquatur $x = \frac{m}{n} y$, quam haſce ſingulas mutationes ſubire poſſe ſupra demonſtravimus. Quibus etiam deducitur ambas homologas fluentes ſigno $=$ in utroque ſyſtemate neceſſario conſociari: ac proinde ſignum hoc $=$ non ſemper æqualitatem utriuſque membri ſignificare ut in P. I. ſæpe demonſtravi. Rurſus iden-

identitate symboli $z$ decepta communis Methodus $\frac{1}{2}a+z$ SA cum $z+\frac{1}{2}a$ SY simul confundit, & $z$ formulæ $\frac{1}{2}a-z$ SA eamdem esse cum $z$ formulæ $z-\frac{1}{2}a$ SY supponit. Hinc nullescente $z$ in una, nullescere posse credit in cæteris: tamen nullescit quidem in formulis SA, quando $m=n$, & in hoc casu fluentes homologæ $\frac{1}{2}a+o$, $\frac{1}{2}a-o$ æquantur: verum in SY $z$ nunquam potest fieri zero, cum sit $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)a$, in qua $z$, posito $n=o$, fit minima & æqualis $\frac{1}{2}.a$, atque ideo $x=z+\frac{1}{2}.a$ $=\frac{1}{2}.a+\frac{1}{2}.a=a$ minima; $x=z-\frac{1}{2}.a=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a$ $=o$ minima, nunquam $x=o-\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}a$ negativa, in quam sæpe incidit Analysis communis, atque inde in imaginarium: quod tamen absurdum tollere facile potuisset, si posita $x=o-\frac{1}{2}.a$ intellexisset fieri etiam $x$ negativam, atque ideo esse $-x=o-\frac{1}{2}.a$, & $x=\frac{1}{2}a-o$: qua suppositione necessario fit transitus a systemate SY ad systema SA, in quo tantum fluens $z$ utpote semidifferentia fluentium minor $\frac{1}{2}a$ sive semisumma constanti fluentium esse potest. Ex confusa tamen nec bene explorata, quam sibi efformavit, notione symbolorum, quibus inconsulto utitur, ignoratione horum principiorum, quibus sine ne hilum quidem in hac Scientia inoffenso pede profici spes ulla subest, suis se vinculis, quo progreditur, arctioribus implicavit. Hinc factum fuit ut suarum formularum, quarum diversam naturam & indolem similitudine communium symbolorum non satis perspectam haberet, ad geometrica applicatio tam male succederet, quam tamen mea Theoria a suis bene constitutis formulis manu veluti ducta facile & eleganter consecuta fuit.

§. 29. Ut vero hoc gravioribus argumentis semper magis confirmetur, re-

vo-

vocatam iterum æquationem vulgarem $x = \frac{m}{n} y$ ad sequentem $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ reduco, ex qua plane constat $x$ & $y$ neutri systemati satisfacere posse, positis constantibus $m$, $n$. Cum enim $\frac{m}{n}$ non nisi uni determinato valori æqualis sit, cui æqualis est fractio $\frac{x}{y}$, hæc ipsa erit constans: & $x$, $y$ quæ eamdem semper constantem rationem $m : n$ inter se retinent, non nisi factore utrique communi indeterminatæ fieri possunt, non fluentes, quemadmodum alterutrum requirit systema. Insuper Methodus communis qui sit absolutus utriusque fluentis $x$, $y$ valor, quæ earum forma, & quam diversa in utroque systemate; qui diversi diversorum systematum limites; quæ diversæ notiones subeant diversimode tractandæ ignoret necesse est, una tantum ratione, qua se se respiciunt, cognita. Contra vero mea Theoria hæc omnia & singula principiis, quibus nititur, nullo negotio perficit & explanat, docendo universim esse

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(m-n)}{\frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}(m-n)} = \frac{\frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}(n-m)}{\frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(n-m)}$$ prout $m >$ vel $< n$. Hac tamen fractione, qua non habentur nisi numeratores numerici fluentium, indeterminatum omnino manet systema ac ejus species, & qui termini sint fluentes; nisi singulæ denominatore ab alterutro systemate quæsito afficiantur. Si igitur facias

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{(m+n)} \cdot \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)} \text{ S A.}$$

vel $$\frac{x}{y} = \frac{m}{(m-n)} \cdot \frac{n}{m-n} = \frac{m}{(n-m)} \cdot \frac{n}{n-m} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right)} \text{ S Y,}$$ erit determinata in utraque systematis natura;

ad

ad SA ex prima, ex secunda ad SY, utriusque fluentis forma, & termini fluentes & constantes in utroque systemate diversi determinati erunt, manente tantum indeterminata systematis specie quocumque protonumero ad libitum determinanda; ex symbolis enim $x$, $y$, quibus fluentes homologæ indicantur, nequit a priori protonumerus cognosci, nisi arbitrio, vel aliunde habeatur.

§. 30. Hac vero luce a nostra Theoria mutuata communibus symbolis formulæ superiores exprimantur, posito protonumero ad libitum $= a$, & erunt

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}a + z}{\frac{1}{2}a - z} = \frac{\frac{1}{2}a - z}{\frac{1}{2}a + z} \text{ SA} = \frac{z + \frac{1}{2}a}{z - \frac{1}{2}a} = \frac{z - \frac{1}{2}a}{z + \frac{1}{2}a} \text{ SY}$$

in quibus licet ob formularum communium naturam protonumerus non evanescat, tamen scimus singulas hujusmodi fractiones numeris tantum primis abstractis constare, omni lineari quantitate geometrica sublata. Scimus etiam terminum fluentem $z$ unius systematis longe differre a $z$ alterius systematis, licet eodem ignoto symbolo efferatur; in SA enim est semidifferentia fluentium semper minor $\frac{1}{2}a$: in SY vero semisumma fluentium semper major $\frac{1}{2}a$. Rursus veram quidem esse æquationem

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}a + z}{\frac{1}{2}a - z} = \frac{\frac{1}{2}a - z}{\frac{1}{2}a + z} \text{ in SA}; \frac{x}{y} = \frac{z + \frac{1}{2}a}{z - \frac{1}{2}a} = \frac{z - \frac{1}{2}a}{z + \frac{1}{2}a} \text{ in SY},$$

sed simul utrasque nullo modo verificari posse: prima enim inservit, posita $z < \frac{1}{2}a$, quando $m > n$; secunda quando $m < n$, utraque in eodem systemate SA. Et posita $z > \frac{1}{2}a$, prima systematis SY similiter inservit quando $m > n$, secunda quando $m < n$. Ac tandem $z$ in quocumque termino superiorum formularum est in suo respectivo systemate non solum æqualis, sed identica: constans vero terminus $\frac{1}{2}a$ æqualis quidem, sed diversus. Ut hoc exemplo illustremus, sit $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$, erit ex nostra Theoria

$\frac{x}{y}$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4} = \frac{\frac{1}{2}(5+4)+\frac{1}{2}(5-4)}{\frac{1}{2}(5+4)-\frac{1}{2}(5-4)}$$ omnino indeterminata: at facta

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{(5+4)} \cdot \frac{4}{4+5} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5+4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)}$$ determinatur univerſim ad SA: facta vero

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{(5-4)} \cdot \frac{4}{5-4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)}$$ determinatur univerſim ad S Y,

& in utroque cum ſit $5 > 4$ erit $x$ fluens major, $y$ minor, ac proinde non niſi hæc æquatio ex duabus ſuperioribus hſc locum habere poteſt. Ut vero etiam ſpecies ſyſtematis determinetur, tam numeratori, quam denominatori fractionis applicetur ad libitum linea geometrica $a$ protonumerum referens, & erunt fluentes homologæ

$$x = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4+5}{4+5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)\right)} a;$$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4+5}{4+5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4+5}{4+5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5+4}\right)\right)} a \text{ in SA}$$

$$x = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)\right)} a;$$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+4}{5-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{5-4}\right)\right)} a \text{ in SY}$$

Mea

Mea igitur Theoria ex proposita sibi fractione numerica superiori, quæ non est nisi ratio, qua se se respiciunt fluentes homologæ, singulas fluentes ipsas singillatim invenit, & ad utrumque systema prout occasio tulerit, diversa qua afficit forma universim disponit.

§. 31. Si quis autem ab Analysi communi quæreret quid sentiat de æquationibus $\frac{\frac{1}{2}a+z}{\frac{1}{2}a-z} = \frac{z+\frac{1}{2}a}{z-\frac{1}{2}a}$; $\frac{\frac{1}{2}a+z}{z+\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}a-z}{z-\frac{1}{2}a}$ suo more elatis; fidenter pronunciabit utramque veritati alienam repudiandam esse omnino; ex utraque enim deduceretur $1 = -1$, vel $-1 = 1$ quod est absurdum. Mea tamen Theoria falsitatem hujusce judicii suis placitis superius revocavit, dummodo in prima æquatione tam numerator, quam denominator primæ fractionis referatur ad systema S A; numerator & denominator secundæ fractionis ad systema S Y, ut sit $\frac{\frac{1}{2}a+z\ \mathrm{SA}}{\frac{1}{2}a-z\ \mathrm{SA}} = \frac{z+\frac{1}{2}a\,\mathrm{SY}}{z-\frac{1}{2}a\,\mathrm{SY}}$; erit enim $\frac{m}{(m+n)\cdot\frac{n}{m+n}} = \frac{m}{(m-n)\cdot\frac{n}{m-n}}$; sive $\frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)$: in secunda vero æquatione dummodo tam numerator primæ fractionis, quam secundæ reducatur ad systema S A, & denominator utriusque fractionis ad S Y: hoc pacto erit $\frac{\frac{1}{2}a+z\ \mathrm{SA}}{z+\frac{1}{2}a\,\mathrm{SY}} = \frac{\frac{1}{2}a-z\ \mathrm{SA}}{z-\frac{1}{2}a\,\mathrm{SY}}$ sive $\frac{m}{(m+n)\cdot\frac{m}{m-n}} = \frac{n}{(n+m)\cdot\frac{n}{m-n}}$, & $\frac{m}{m}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) = \frac{n}{n}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$: ex quibus colligitur perfectam inter hasce superiores formulas æqualitatem intercedere. Quamobrem veritas maximi momenti ignota hactenus ex dictis consequitur, formulas quibus utitur Analysis communis symbolis $x$, $y$ nimis generalibus atque omnino indeterminatis intermixtas signo $=$ sociatas certis legibus obnoxias esse oportere, ut perfecta inter ipsas æqualitas intercedat: quæ nisi diligenter serventur, æqualitas omnino tollitur inter ipsas, ac diverso valore dissociatæ non nisi singillatim verificantur.

Ita inter $\frac{\frac{1}{2}a+z\,SA}{\frac{1}{2}a-z\,SA} = \frac{z+\frac{1}{2}a\,SY}{z-\frac{1}{2}a\,SY}$ perfectam vidimus æqualitatem intercedere: at ſi fiat $\frac{\frac{1}{2}a+z\,SY}{z-\frac{1}{2}a\,SA} = \frac{z+\frac{1}{2}a\,SA}{z-\frac{1}{2}a\,SY}$, erit $\frac{m}{(m-n)\cdot\frac{n}{m+n}} = \frac{m}{(m+n)\cdot\frac{n}{m-n}}$, & $\frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)=\frac{m}{n}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$, quæ minime æquales ſunt, ſed indicant formulas hujuſmodi præter æqualitatem diverſum ſingulas ſubire poſſe valorem, prout ſyſtematum ſit mutatio. Quid mirum igitur ſi Analyſis communis, quæ hæc ſingula tam neceſſaria ſus deque habuit, quo ſe vertat plerumque neſciat: quæ ſigno tantum $=$ ita fidit, ut quæ membra ſemel hoc ſigno utpote perfecte æqualia conſociavit, nunquam poſſe, quocumque modo ſubducantur Calculi, ab hac perfecta æqualitate deſciſcere? Hinc perpetua inter ſuos Cultores diſſidia nunquam tollenda niſi ad hanc meam Theoriam tamquam ad aram confugiant.

§. 32. Ut vero re ipſa intelligatur quam caute incedendum ſit in ea, quam Analyſis communis præmonſtrat, via, ab iterum ſumpta æquatione legitima $\frac{\frac{1}{2}a+z\,SA}{\frac{1}{2}a-z\,SA} = \frac{z+\frac{1}{2}a\,SY}{z-\frac{1}{2}a\,SY}$ legitime deducitur $(\frac{1}{2}a+z)\,SA$ $(z-\frac{1}{2}a)\,SY = (z+\frac{1}{2}a)\,SY\,.\,(\frac{1}{2}a-z)\,SA$; eſt enim $\frac{m}{m+n}a$ $\frac{n}{m-n}a = \frac{m}{m-n}a\,.\,\frac{n}{m+n}a$. Sed erraret tamen qui identitate formulæ & ſymboli $z$ deceptus Analyſi communi ſe committeret, quæ docet $\frac{1}{2}a+z = z+\frac{1}{2}a$, atque ideo erueret $z-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a-z$: cum prima det $\frac{m}{m+n}\cdot a = \frac{m}{m-n}a$; ſecunda $\frac{n}{m-n}a = \frac{n}{m+n}a$, quarum

rum utraque positis iisdem $m$, $n$ æquatio perfecta esse non potest. Potest tamen utraque sic efferri $x = \frac{1}{2}a + z = z + \frac{1}{2}a$, & $y = \frac{1}{2}a - z$ $= z - \frac{1}{2}a$; hoc est tam $x$, quam $y$ potest tam ad SA, quam ad SY opportuno divisore præparari, ut hæ actu sumantur, quas assumptum systema requirit. Insuper vera est superior æquatio $(\frac{1}{2}a + z).(z - \frac{1}{2}a)$ $= (z + \frac{1}{2}a).(\frac{1}{2}a - z)$ sed si fiat (ut semper fieri oportere docet Analysis communis) $z^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - z^2$, tunc quadratum $z^2$ identitatem utriusque $z$ constituit & a formula $(\frac{1}{2}a + z)$ SA. $(z - \frac{1}{2}a)$ SY $= (z + \frac{1}{2}a)$ SY. $(\frac{1}{2}a - z)$ SA, a qua constituitur vera æqualitas, transitus fit ad $(\frac{1}{2}a + z)$ SY. $(z - \frac{1}{2}a)$ SY $= (z + \frac{1}{2}a)$ SA $(\frac{1}{2}a - z)$ SA inter quas æqualitas nequit interesse; cum sit hæc

$$\frac{m}{m+n}a.\frac{n}{n+m}a = \frac{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2\right)}{1^2}a^2,$$ illa

$$\frac{m}{m-n}a.\frac{n}{m-n}a = \frac{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)^2\right)}{1^2}a^2,$$ utraque æqualis $xy$, eo quia productum hoc vel ad SA, vel ad SY traduci potest. Hic tamen in hasce secundæ dimensionis non ultra inquiro: cum præter ea, quæ diximus LIB: II. T. I. majora erunt in T. II. ipsa rei natura cogente investiganda.

§. 33. Hisce explicatis nunc ex fractionibus, quibuscum comparavimus fractionem indeterminatam $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, ut rationem $m:n$, qua se se respiciunt fluentes homologæ $x$, $y$ utriusque systematis vere determinatam haberemus, elegans & generalis eruitur methodus, qua (præter illam, quam Cap: V. & VI. do-

docuimus ) facile ex propoſita fractione $\frac{m}{n}$ utrique ſyſtemati propriæ coefficientium fluentium formulæ inveniuntur. Ut exempli appoſitione facilius, quod volo, intelligatur, ſit $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} = \frac{3}{1}$, primum ſubtrahe (1) a (3), & differentia (2) biſariam diviſa, fac $\frac{3}{1} = \frac{2+1}{2-1}$ & $\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(1)}{\frac{1}{2}(2) - \frac{1}{2}(1)}$ : erit itaque ex dictis $\left\{ \begin{array}{l} m+n = 2 \\ m-n = 1 \end{array} \right\}$ ergo $2\,m = 3$; $2\,n = 1$, ergo

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

: & facta diviſione per $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$, ac per $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$, erit

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3+1}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3+1}\right)} \text{ S A}; \quad \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3-1}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3-1}\right)} \text{ S Y}, \&$$

$$x = \frac{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3+1}\right) \right)}{1} a = \frac{3}{3+1} \cdot a;$$

$$y = \frac{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{1+3}{1+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3+1}\right) \right)}{1} a = \frac{1}{1+3}\, a \text{ S A}:$$

$$x = \frac{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3-1}\right) \right)}{1} a = \frac{3}{3-1} \cdot a;$$

$$y = \frac{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{3+1}{3-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3-1}\right) \right)}{1} a = \frac{1}{3-1} \cdot a \text{ S Y}$$

ſum-

sumpto ad libitum protonumero $a$. Itaque ut singuli numeri $m$, $n$ reducantur ad formulam duobus terminis constantem, in qua terminus major sit positivus in utraque formulâ, & minor additus majori in formula $m$ majoris, detractus minori in formula $n$ minoris utramque formulam constituat, sumenda est differentia $m-n$, & hæc bifariam divisa erit numerus addendus formulæ majoris, detrahendus formulæ minoris; cætera peragenda ut supra. Si numeri $m$, $n$ erunt ambo pares vel impares, fractio $\frac{m}{n}$ intacta accipiatur: si vero alteruter erit par, alteruter impar, singuli multiplicentur per 2, ut formulæ numeris integris constent. Sit ex: gr: $\frac{m}{n} = \frac{14}{7}$ quarum differentia $m - n = 7$, & $\frac{m-n}{2} = \frac{7}{2}$, quæ a 14 subtracta dabit $14 - \frac{7}{2} = \frac{28-7}{2} = \frac{21}{2}$, & addita 7, erit $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$, in quo casu $\frac{14}{7} = \frac{21+7}{21-7} = \frac{28}{14} = \frac{14}{7}$. Ergo erit

$$\frac{x}{y} = \frac{14}{7} = \frac{28}{14} = \frac{21+7}{21-7} = \frac{\frac{1}{2}(21) + \frac{1}{2}(7)}{\frac{1}{2}(21) - \frac{1}{2}(7)} = \frac{\frac{1}{2}(14+7) + \frac{1}{2}(14-7)}{\frac{1}{2}(14+7) - \frac{1}{2}(14-7)} :$$

ac in systemate SA $x = \frac{14}{14+7} \cdot a$; $y = \frac{7}{7+14} \cdot a$: in SY $x = \frac{14}{14-7} \cdot a$; $y = \frac{7}{14-7} \cdot a$; sive $x = \frac{2}{2+1} a$; $y = \frac{1}{1+2} a$ SA, $x = \frac{2}{2-1} a$; $y = \frac{1}{2-1} a$, quo docemur reducendam primum fuisse fractionem $\frac{14}{7}$ ad numeros primos $\frac{2}{1}$. Sit $\frac{x}{y} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{9+1}{9-1} = \frac{\frac{1}{2}(9) + \frac{1}{2}(1)}{\frac{1}{2}(9) - \frac{1}{2}(1)}$; sed $m+n = 9$, $m-n = 1$; ergo $m = 5$; $n = 4$: & $\frac{x}{y} = \frac{5}{4} = \frac{\frac{1}{2}(5+4) + \frac{1}{2}(5-4)}{\frac{1}{2}(5+4) - \frac{1}{2}(5-4)}$: cætera ut supra.

§. 34.

§. 34. Eodem modo te gere si sit $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$: fac enim $\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(1)}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}(1)}$: sed $m+n=\sqrt{3}$; $m-n=1$, ergo $m = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$; $n = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, &c.

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}{\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}-\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}{\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}{\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}-\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}{\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}}\right\}} \text{ S A.}$$

$\frac{x}{y}$

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right]}{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}\right]}\ SY$$

quæ mire conveniunt cum iis quæ Cap: V. & VI. invenimus. Quare evidentissime patet, quamcumque fractionem $\frac{m}{n}$ ad utrumque systema præparari posse, ac eas in utroque systemate fluentes homologas invenire, quæ sint in utroque systemate in ratione $m : n$; dummodo tamen numeri $m$, $n$ non sint inter se æquales. Si enim essent inter se æquales, fractio non nisi ad systema SA traduci potest. Sit $\frac{x}{y}=\frac{1}{1}=\frac{1+0}{1-0}=\frac{\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(0)}{\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)}$ : sed $m+n=1$; $m-n=0$: ergo $m=\frac{1}{2}$, & $n=\frac{1}{2}$ sive $\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{1+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-1}{1+1}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{1+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1-1}{1+1}\right)}$ SA; & $x=\frac{1}{1+1}\cdot a=y$ in quo casu fluentes homologæ sunt æquales, & $x$ major minima inter majores, $y$ vero maxima inter minores. At in systemate SY fluens major semper differt a minori per (1) coefficientis, atque ideo earum differentia nunquam zero esse potest. Potest tamen $\frac{x}{y}=\frac{1+1}{1-1}$ ad utrumque systema præparari hoc sequenti modo, facta nempe $\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)}{\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(1)}$,

sed

ſed $m+n=1$; $m-n=1$; ergo $m=1$; $n=o$, & in SA

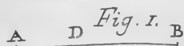
$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1+o}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1+o}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1+o}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1+o}\right)}\ \text{SA}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1-o}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1-o}\right)}\ \text{SY}$$ ſcilicet $x$

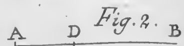
$=\frac{1}{1+o}\ a$ maxima; $y=\frac{o}{o+1}\ a$ minima in SA: in ſyſtemate vero SY

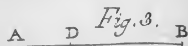
$x=\frac{1}{1-o}\cdot a$ major minima; $y=\frac{o}{1-o}\cdot a$ minor minima.

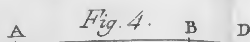
§. 35. Conferat nunc quiſquis eſt æquus rerum æſtimator haſce a mea nova Theoria inventas formulas, atque haſce primas, quæ in ipſo ſtatim limine ex his deſcendunt, evidentes, fœcundas conſecutiones cum formulis nulla certa lege a vulgata Analyſi conflatis: ac judicet utrum meæ ex ipſa intima utriuſque quantitatis diſcretæ & continuæ natura erutæ ſint tandem amplectendæ, quarum ope vulgatæ & moderantur & explanantur, an in illis veteribus mordicus inſiſtendum; quarum vim atque naturam nemo unquam intellexit adhuc, nec ab ullo unquam intelligi & geometricis affectionibus applicari poterunt, veteris doctrinæ placita ſequuto. Hoc illud fuit, quod noſtris temporibus Scientia hæc magni nominis auctoritate aucta & ſuffulta, immenſa Calculorum farragine obruta, ac tota in difficillimis ſubducendis abſtracte Calculis occupata, Geometria certa duce poſthabita, non niſi denſiſſima ſuorum myſteriorum religione ab incurſionibus ſe ſubtraxerit. Certe quidem multa ab illuſtrioribus noſtri Sæculi Analyſtis deprompta harum formularum, quas ſupra innuimus, exempla proferre poſſem, quæ in calculis præſertim vulgo ſublimioribus ad uſum traductæ acutiſſimam ipſorum Auctorum aciem effugerint ita, ut utrum veræ an falſæ ſint minime intelligentes, quæ e ſuo penu depromunt, ejuratis quæ ex alieno, ſpecioſo paradoxorum nomine condecoraverint. Sed ut omnis in hac re abſit invidia, ſatis ſit illarum formularum exempla commemorare, quæ in meis Opuſculis, ac præcipue in illo cui titulus „ *Rifleſſioni ſulla poſſibilità del Caſo irreducibile* „ primum protuli, ut hujuſce Scientiæ, quam animo conceperam, inſtaurationem neceſſariam in anteceſſum præmonſtrarem: quæ ad ſimilitudinem ſuperiorum confictæ, & a præceptis generalibus veteris Analyſeos neceſſario derivatæ ignoratione horum, quæ hic tradimus, elementorum falſitatis perperam inſimulantur adhuc, quia utrum rectæ ſint an non nullo modo intelligi poteſt, niſi ad haſce meas, tamquam ad lydium lapidem, confugiatur. Inter hæc tamen, quæ toto hoc Capite veteris Analyſeos impedimenta commemoravi, illud ſane gravius eſt, quod ſymbolis, quibus utitur, nequeat coefficientes numericos abſtractos a quantitatibus geometricis, quibus applicantur, ſecernere (quod eſt primum hujuſce novæ Scientiæ fundamentum) nec ab una ad alteram horum naturam, prout res poſtulat, legitimum tranſitum anquirere. Hinc fit ut quas

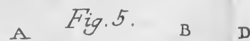
ſe-


Fig. 1.
A D B

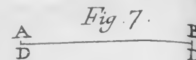

Fig. 2.
A D B

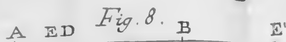

Fig. 3.
A D B

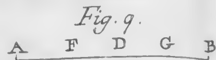

Fig. 4.
A B D

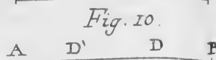

Fig. 5.
A B D

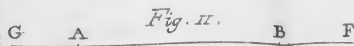

A B A' D

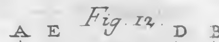

Fig. 7.
A B
D D

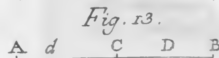

Fig. 8.
A E D B E'

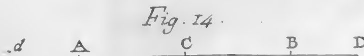

Fig. 9.
A F D G B

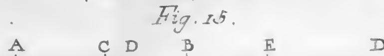

Fig. 10.
A D' D B

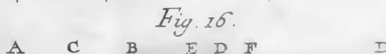

Fig. 11.
G A B F

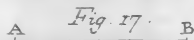

Fig. 12.
A E D B


Fig. 13.
A d C D B

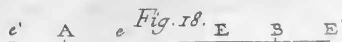

Fig. 14.
d A C B D

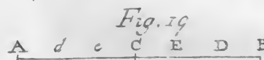

Fig. 15.
A C D B E D'

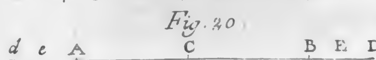

Fig. 16.
A C B E D F D'

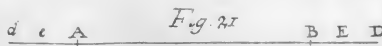

Fig. 17.
A B

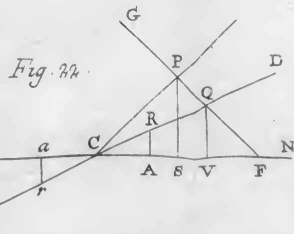

C D

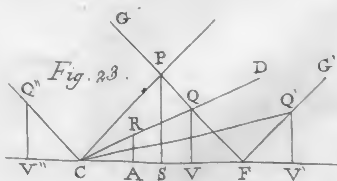

Fig. 18.
e' A e E B E'


Fig. 19
A d e C E D B


Fig. 20
d e A C B E D


Fig. 21
d e A B E D


Fig. 22.
G
P
D
Q
R
M u a C N
A S V F
r
B q


Fig. 23.
G
P
D
G'
Q''
Q
Q'
R
V'' C A S V F V'

AB. inc.

semel litteris *a*, *b*, *c* &c. quantitates geometricas designaverit, semper ut tales, quocumque modo tractetur formula, assumat: ut ex ipsa vulgo tradita constructione superioris æquationis $x = \frac{a}{b} y$ facile est cognoscere. Ex quo tamen errore tam multa veritati absona atque impervia in communem Analysim clam subrepserunt, ut me cogant in hisce eruendis atque evellendis in sequenti Capite diutius immorari.





# CAPUT IX.

*De ratione constanti qua Fluentes se se respiciunt: ubi Methodus generalis construendi æquationes primi gradus a vulgata Analysi usurpata expenditur.*

§. 1. Vidimus in Capite superiori quomodo tractanda sit æquatio $x = \frac{m}{n} \cdot y$, ut ad alterutrum systema traducatur, & legitima constructione ad geometrica applicetur, dummodo ratio $m : n$ numerica & fluens ponatur, ut $x$, $y$ possint esse fluentes homologæ alterutrius systematis, & $m : n$ ratio numerica, qua invicem se se respiciunt in quocumque peculiari casu intra limites systematis ad libitum sumpti, ad quod sua forma determinantur. Quibus statutis facilis est transitus ab hac analogia ad æqualitatem inter fluentes ipsas, & viceversa: quæ proinde æquatio duabus fluentibus homologis constet necesse est. Hoc uno fundamento nititur communis æquationum Theoria, a quo etiam nomen desumpserunt, in quibus tamen ut legitima inter duas fluentes instituatur æquatio, fluentes homologæ fiant oportet; hoc est eam habeant inter se necessariam ac intimam societatem, ut unius fluxio alterius fluxionem semper afficiat, & earum mutua conjunctio Locum geometricum unum continuum ac individuum constituat. Nostra porro Theoria ulterius in Capite superiori & VII. progressa docuit modum, quo ab hac inter duas fluentes æquatione ad identitatem unius fluentis, hoc est ad formam & valorem absolutum unius fluentis assequendum, altera sublata, perveniri possit: & qua ratione data una, alterius forma & valor obtineri possit, re ipsa & exemplis declaravit. Ex hoc intacto hactenus fonte multæ ac maximi momenti ad difficillima, & in Analysi communi prorsus impervia investiganda pleno alveo fluunt adhuc ignotæ veritates, quæ pro re nata in posterum deducentur.

§. 2. Nunc videamus quid sibi velit æquatio $x = \frac{b}{a} y$, & quomodo tractanda atque construenda; quæ sint fluentes $x$, $y$ in ea vulgo & universim recepta suppositione, in qua ratio $b : a$ constans & data semper usurpatur. Ac primum facile est ex dictis cognoscere rationem $b : a$ nullo modo constantem esse posse, nisi sint $b$ & $a$ quantitates geometricæ lineares protonumerum diversum referentes, cum demonstraverimus in uno eodemque systemate non nisi li-

neam

neam geometricam loco unitatis assumptam, quam diximus protonumerum, invariabilem perseverare posse ac debere. Et hæc una est ratio, cur Analysis vulgata, cum statuerit rationem hanc semper constantem, litteris $a$ & $b$ lineas geometricas repræsentare coacta fuerit, ut constructio hujusce æquationis $x = \frac{b}{a} . y$ ab ipsa peragi aliquo modo posset, & speciem quamdam veritatis præseferre. Videamus tamen quæ sit hujusce æquationis vera natura, ut videre possimus utrum Analysis vetus in hac tractanda ac construenda rectius se gesserit.

§. 3. Æquatio hæc in analogiam conversa dabit $x : y :: b : a$, in qua analogia si $x$, $y$ fluentes sunt, & $b$, $a$ lineæ geometricæ datæ; necessario consequitur, fluentes $x$, $y$ eodem coefficiente numerico fluenti constare debere, nec inter se alio nomine differre, nisi ob diversum protonumerum constantem, cui singulæ applicantur. Itaque $x$ & $y$ hujusce æquationis non possunt esse fluentes homologæ unius systematis, nec simul consociari ad unum & integrum systema constituendum: sed utraque ad diversum specie pertinet systema protonumeri $b$ vel $a$, licet utraque eodem coefficiente numerico fluenti sit donata. Quare erit $x : y :: b : a :: \frac{m}{m+n} . b : \frac{m}{m+n} . a$ SA, vel $:: \frac{m}{m-n} . b : \frac{m}{m-n} . a$ SY, & $x = \frac{m}{m \pm n} . b$, $y = \frac{m}{m \pm n} . a$: & $x$ erit fluens unius systematis protonumeri $b$, $y$ fluens alterius systematis protonumeri $a$, atque inter se natura dissociatæ, simul ad integrum systema efformandum conjungi nequeunt; cum una ad unum, altera ad alterum systema specie diversum pertineat. Habentur igitur hac æquatione duæ fluentes inter se distractæ, quarum singulæ, utpote ad diversum systema pertinentes, inchoant tantum diversum singulæ systema, deficiente in singulis sua homologa, cujus ope duo hæc diversa systemata inter se diffita respective perficiuntur. Ut vero utrumque hoc perficiatur systema, eadem æquatio $x = \frac{b}{a} . y$ bis sumatur oportet, ut ex hac duplici æquatione duplex analogia oriri possit, & ex hac bis repetita, quæ sint homologæ proprii systematis fluentes inveniri, ac simul conjungi possint. Fiat itaque

$$\left\{ \begin{array}{l} x : y :: b : a :: \frac{m}{m \pm n} \; b : \frac{m}{m \pm n} \; a \\ x : y :: b : a :: \frac{n}{m \pm n} \; b : \frac{n}{m \pm n} \; a \end{array} \right\} : \text{ex quibus}$$

 ( $x + x$

$$\left.\begin{cases} x + x = \frac{m}{m+n} \cdot b + \frac{n}{n+m} \cdot b \\ y + y = \frac{m}{m+n} \cdot a + \frac{n}{n+m} a \end{cases}\right\} \text{S A;}$$

$$\left.\begin{cases} x - x = \frac{m}{m-n} \cdot b - \frac{n}{m-n} \cdot b \\ y - y = \frac{m}{m-n} \cdot a - \frac{n}{m-n} \cdot a \end{cases}\right\} \text{S Y}$$

quo facto syſtema utrumque ſuis homologis conflatum perficitur, & unum ab altero legitima æquatione ſecernitur. Hoc uno ſenſu conſtructio vulgo uſurpata æquationis $x = \frac{b}{a} \cdot y$ tamquam legitima admitti poteſt: hoc uno enim ſenſu in æquatione $x = \frac{b}{a} \cdot y = \frac{mb}{(m+n) \cdot \frac{ma}{m+n}} \cdot y$, poſita $y$ ſive $m = o$, habetur $x = o$: & poſito $n = o$, habetur $y = a$ ſuo protonumero; & $x = b$ protonumero ſui ſyſtematis ab altero diverſi: & utraque maxima in proprio ſyſtemate, & creſcente una, vel decreſcente, creſcit item vel decreſcit altera.

§. 4. In hoc tamen caſu conſtructio communis unius $x = \frac{b}{a} \cdot y$, qua una ex fluentibus a protonumero $b$ ad protonumerum $a$ fit translatio, non eſt niſi dimidiata, & $x$ in $y$ tranſmutata, non niſi protonumerum diverſum, ac diverſum ejus ſitum, & directionem ſumpſiſſe oſtendit. Nam conſtructio unius æquationis $x = \frac{b}{a} \cdot y$ ita peragitur, ut ſumpta in indefinita hinc inde CZ (Tab: IV. *Fig.* 1.) CV $= b$, & e puncto V ſub quovis angulo erecta VQ $= a$, & vocata CS $= x$ fluente minori CV $= b$, & SP $= y$, erit CS : SP :: $x : y$ :: $b : a$ :: $\frac{m}{m+n} \cdot b : \frac{m}{m+n} \cdot a$, ergo CS $= x = \frac{m}{m+n} \cdot b$, & SP $= y = \frac{m}{m+n} \cdot a$: ergo CS, quæ erat fluens S A protonumeri CV

=

$= b$, transit in $SP = y = \frac{a}{b} x = \frac{ma}{(m+n) \cdot \frac{mb}{m+n}} \cdot x$, sed

$x = \frac{m}{m+n} \cdot b$, ergo $SP = y = \frac{m}{m+n} \cdot a$, quæ est altera fluens solitaria ejusdem coefficientis, sed protonumeri diversi $a$ alterius systematis SA. Hæc *zero* in puncto C, in quo est $x = o$, sive $m = o$, crescendo fluit hinc inde per totam indefinitam CZ, & in puncto V, in quo $x = b$ est maxima in suo proprio systemate SA, fit & ipsa maxima $= a$ in suo proprio systemate SA protonumeri $a$. Crescente vero CS supra constantem CV, facta

scilicet $x = CA$, fit hæc fluens major systematis SY protonumeri $b = \frac{m}{m-n} \cdot b$

$= b + \frac{n}{m-n} \cdot b = CV + VA$, eritque $x : y :: CA : AD :: b : a$

$:: \frac{m}{m-n} \cdot b : \frac{m}{m-n} \cdot a$, atque ideo erit $AD = \frac{m}{m-n} \cdot a = a$

$+ \frac{n}{m-n} \cdot a$, sive & ipsa fluens major systematis SY protonumeri $a$

$= DB + BA$. Idem obtinebis sumpta directione opposita VE, hac tantum

differentia, quod fluens systematis SY protonumeri $a$ sit $GE = \frac{m}{m-n} \cdot a$

$= a + \frac{n}{m-n} \cdot a = GF + FE$ in directione prorsus opposita primæ AD, &

tamen GE sumenda est positiva. Quinimmo sub eodem angulo ex puncto V ducta indefinita MN eadem constructio etiam in plagis oppositis locum habebit,

ut figura demonstrat. Hæc est constructio legitima & absoluta æquationis $x = \frac{b}{a} y$

ad similitudinem vulgaris concinnata, qua nihil aliud habetur nisi fluens protonumeri $a$, quæ respondet fluenti jam primum sumptæ protonumeri $b$, eodem utraque coefficiente numerico fluenti prædita. Quam nil mirum si Analysis vulgata dimidiatam exhibuerit, nec quid significet, intellexerit, utpote quæ in maxima rerum omnium, quæ ad hanc determinandam conducunt, ignoratione versatur. Vestigiis tamen nostræ Theoriæ insistendo facile fuit cognoscere, ex

analogia $VS : SR :: x : y :: b : a :: \frac{n}{n+m} \cdot b : \frac{n}{n+m} \cdot a$ alteram ori-

ri

ri æquationem $x = \frac{b}{a} y$, quæ dat utrasque fluentes systematis S A respe-

ctive homologas illis alterius æquationis $x = \frac{b}{a} . y$, suo unamquamque di-

verso protonumero applicatam: ut in primo completo systemate sint fluentes homologæ C S + V S = C V = $b$, quibus respondent in altero P S + R S = P R = $a$. At transgresso limite systematis S A, erit ex prima æquatio-

ne C A : A D : : $\frac{m}{m-n} . b : \frac{m}{m-n} . a$, V A : A B : : $\frac{n}{m-n} . b : \frac{n}{m-n} . a$; &

fluentes homologæ protonumeri $b$ S Y C A — V A = C V = $b$; quibus respondent D A — B A = D B = $a$.

§. 5. Universim itaque perficientur utraque systemata, si fiat

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{a} . y \ ; \ y = \frac{a}{b} . x \\ x = \frac{b}{a} . y \ ; \ y = \frac{a}{b} . x \end{array} \right\} ; \ \&$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + x = \frac{b}{a} . y + \frac{b}{a} . y = \frac{mb}{(m \pm n) . \frac{ma}{m \pm n}} . y + \frac{nb}{(m \pm n) . \frac{na}{m \pm n}} . y = \frac{m}{m \pm n} . b + \frac{n}{m \pm n} . b \\ y + y = \frac{a}{b} . x + \frac{a}{b} . x = \frac{ma}{(m \pm n) . \frac{mb}{m \pm n}} . x + \frac{na}{(m \pm n) . \frac{nb}{m \pm n}} . x = \frac{m}{m \pm n} . a + \frac{n}{m \pm n} . a : \end{array} \right\}$$

atque proinde

$$\left\{ \begin{array}{l} x + x = \frac{m}{m+n} . b + \frac{n}{n+m} . b = b \\ x - x = \frac{m}{m+n} . b - \frac{n}{m+n} . b = \left( \frac{m-n}{m+n} \right) . b \end{array} \right\} \text{S A}$$

=

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{m-n} \cdot b + \frac{n}{m-n} \cdot b = \left(\frac{m+n}{m-n}\right) \cdot b \\ \frac{m}{m-n} \cdot b - \frac{n}{m-n} \cdot b = b \end{array} \right\} SY$$

idem dicas de alia $y + y = \frac{a}{b} \cdot x + \frac{a}{b} \cdot x$. Ex quibus colligas velim, quid judicandum de primis veteris Analyseos placitis, ac de toto hoc vasto sane Opere hisce superstructo: cum primæ æquationum leges jubeant eamdem summam vel differentiam in utroque systemate desumendam esse a symbolis omnino indeterminatis $x$, $y$ signo $\pm$ affectis, ac valorum identitatem a fluentibus eodem symbolo $x$, $y$, vel $y$, $x$ expressis statuendam. Quod si hoc verum esset, vera etiam esset $x + x = x + x = b = \left(\frac{m+n}{m-n}\right) b$; $x - x = x - x = o$, & iterum $\left(\frac{m-n}{m+n}\right) b = b$, & ex utraque $+ 1 = - 1$, vel $- 1 = + 1$; ambages, quibus necessario a vulgaris methodi præceptis implicamur, nullo modo ab ipsa extricandæ.

§. *6.* Hac tamen §. 4. construendi ratione in quocumque fluxu singularum fluentium systematis protonumeri CV fixi ac stabilis, mutatur situs & positio GF, CT, PR, QV, DB, &c. protonumeri $a$ alterius systematis, atque ideo & ejus systema geometricum continuo fluxu hinc inde usque ad infinitum vagatur. Huic tamen malo remedium facile in promptu est: si per puncta nempe I, Y ducatur indefinita IY, quæ bifariam secat CV, & ab hac secatur in puncto L: quo facto stabilis fit protonumerus $a$ sumptus in linea stabili IY, in qua tamquam axe sumatur systema protonumeri $a$. Hoc tertio puncto addito fluentium homologarum utriusque systematis coefficientes hanc respective induunt formam $\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}{1}$ in SA;

$\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)}{1}$ in SY, quemadmodum docuimus Capite præsertim IV. Constructio hæc similis est illi, quam dedimus. §§. 24, 25 Capitis superioris, quam diximus esse illam P. I.ª Lib: II. Cap: II. *Fig.* 5. de limitibus rectilineis, ex quibus ad curvilineos facile, & eleganter transitum fecimus. Hac tantum differentia, quod illic constructio ab una tantum æquatione

ne $x = \frac{m}{n} . y$ eruta fuit, in qua & ratio $m : n$ est fluens, & fluentes $x$, $y$ sunt homologæ systematis ejusdem naturæ ac speciei. Hîc vero nostra constructio a duabus æquationibus $x = \frac{b}{a} . y$ deducta est, in quarum singulis & ratio $b : a$ est constans, & fluentes $x$ ; $y$ singulæ æquationis eodem coefficiente præditæ, diverso protonumero afficiuntur. Verum quemadmodum prima limitum rectilineorum præparatione ad circulum in S A, vel ad hyperbolas æquilateras ejusdem diametri in S Y manu veluti ducti fuimus; ita hac secunda, in qua protonumeri diversi sunt, sternitur via ad Ellypseos in S A, & ad hyperbolas conjugatas duabus inæqualibus diametris præditas T. II. inveniendas ac describendas.

§. 7. Sed jam universim ad primas æquationum simplicium construendarum leges vulgo traditas excutiendas accedentes, noverimus Analysim vulgarem semper inter quantitates constantes diversis symbolis $a$, $b$, $c$, &c. affectas, utpote diversi valoris, & inter $x$, $y$, &c, quæ incognitas modo, modo variabiles appellat, comparationem instituere, & quando analogia utitur, a qua ad æquationem, vel contra ab æquatione ad analogiam transitum facit, semper inter quatuor lineas geometricas proportionem instituere, ac in duas rationes geometricas æquales segregare, quarum singularum rationum termini singuli diversam lineam geometricam repræsentant. Hæc est doctrina & praxis communis universim recepta, & ita universim nota, ut supervacaneum esset de hac testimonia proferre. Sed ne in invidiam adducar, audi celeb. Riccati T. I. L. I. Instit. analyt. Cap: VIII. *De constructione Problematum Geometricorum primi & secundi gradus*, in quo §. 3. „ Quod spectat (*ait*) ad æquationes primi gra„ dus, quum in iis analyticus valor *incognitæ* subtractione vel additione, mul„ tiplicatione vel divisione terminorum inveniatur; geometricus pariter valor „ linearum additione vel subtractione obtinetur, vel ad summum tertiæ aut „ quartæ proportionalis inventione. Sit $x = a - b + c$, facta rectarum $a$ „ & $c$ summa, ab eaque detracta $b$, quod superest erit $x$. Si fuerit $x = \frac{ab}{c}$ fiat, „ ut recta $c$ ad rectam $a$, ita recta $b$ ad quartam: hoc est methodo ab Eu„ clide tradita post rectas $c$, $a$, $b$ quarta proportionalis inveniatur, ea erit $x$ „. Insuper vide cætera hujusce Capitis præter constructionem æquationis $y = \frac{a}{b} x$, ab Auctore traditam, de qua egimus Capite superiori §. 23.

§. 8. Videamus nunc quantum cum veritate, & cum natura geometricæ quantitatis hæc communis doctrina consentiat. Ac primum constat ex ipso nomine, ac (quod gravius est) ex ratione ipsa, qua præscribitur tractandam esse *inco-*

*gni-*

gnitam additione vel subtractione &c., ac si esset linea quæcumque constans ( ut in arithemeticis fit ) valoris tantum ignoti; de ejus diversa fluendi natura, ac de diverso modo, quo fluens tractanda est adeo nihil suspicari, ut in hac communi doctrina $x = a - b + c$ non sit nisi linea determinata, & illius tantum valoris capax, quem præbet $a - b + c$ quantitatum constantium complexus. Idem dicas de æquatione $x = \frac{ab}{c}$, illo tantum valore determinato affecta, quem quarta proportionalis post $c$, $a$, $b$ exhibet, quamque artificio longe diverso a prima inventam, longe distare a prima, cæteris paribus, arbitratur. Qua diversa utriusque æquationis constructione nihil ulterius producitur inquisitio, quæ tota in unius lineæ inventione definitur. Quod si nostram Theoriam interroges, primum te docebit, eligendum esse in primis protonumerum, qui vicem unitatis linearis gerens, sit comparationis terminus, ad quem cæteræ fluentes referantur. Et cum lineæ litteris $a$, $b$, $c$, indicatæ supponantur notæ, erit inter ipsas & inter aliam quamlibet notam ( puta $f$ ) nota etiam ratio, qua se se respiciunt. Possunt igitur singulæ ad ipsarum singulas, & ad aliam quamlibet $f$ referri, & ab hac una cæteræ jam omnes fluentes repræsentari. Posita igitur æquatione $x = a - b + c$, sit $b = \frac{2}{3} a$, $c = \frac{5}{2} a$, & $a = \frac{3}{17} f$, ac primum reducantur cæteræ ad protonumerum $a$, qua facta reductione, fit $x = a - b + c = \frac{17}{6} a$ 1.ª: posito protonumero $b$, est $x = a - b + c = \frac{17}{4} b$ 2.ª: vel sumpto protonumero $c$, $x = a - b + c = \frac{17}{15} c$ 3.ª: ac tandem posito protonumero $f$, $x = \frac{1}{2} f$ 4.ª. In prima igitur $x$ est fluens systematis tantum SY protonumeri $a$; quæ si fiat $x = \frac{17}{(6+11)-11} . a = \frac{17}{17-11} . a$ est fluens major, at si fiat $x = \frac{17}{(6+17)-17} . a = \frac{17}{23-17} . a$ est fluens minor: at 2.ª dat $x = \frac{17}{4} . b = \frac{17}{17-13} . b$, quæ est fluens major, $= \frac{17}{21-17} . b$ quæ est minor SY protonumeri $b$: ex 3.ª $x = \frac{17}{15} . c = \frac{17}{17-2}$ fluens major,

$= \frac{17}{3^2-17} \cdot c$ minor S Y protonumeri $c$. Ac tandem ex 4.ª $x = \frac{1}{2} f$, quæ si referatur ad S A protonumeri $f$, erit $x = \frac{1}{1+1} f$, sive æqualis suæ homologæ; si referatur ad S Y, erit $x = \frac{1}{3-1} f$ fluens tantum minor systematis S Y ejusdem protonumeri $f$. Quare ipsis oculis percipitur, $x$ æquationis propositæ esse vere fluentem, quæ prout ad diversum protonumerum refertur, pertinere potest ad unum tantum, vel ad utrumque systema, & in S Y semper vicem fluentis majoris vel minoris gerere posse: ac insuper ex ipsa forma, qua afficitur, suam semper homologam inveniri posse, quarum conjunctione systema, ad quod pertinet, rite completur; ac cætera deduci possunt, quæ in toto hoc Libro invenimus.

§. 9. Fluens nostra $x = a - b + c$ in nullo ex protonumeris superioribus potest fieri maxima vel minima, sive protonumero ipsi æquari. Si tamen fiat ex: gr: $b = \frac{5}{2} a$, & $c = \frac{5}{2} a$, erit $x = a - b + c = a$, vel facta $f = \frac{17}{6} a$, erit $x = f$: & fluens $x = \frac{1}{1 \pm o} \cdot f$ quæ est maxima in S A, major sed facta minima in S Y. Hic animadvertas velim $x = f$ posse esse etiam summam vel differentiam fluentium homologarum in S A, sive esse $x = x \pm o y = \left(\frac{1 \pm o}{1+o}\right) a = \left(\frac{1}{1+o} \pm \frac{o}{o+1}\right) \cdot a$: & in systemate S Y esse tam differentiam fluentium homologarum minimarum, quam earum summam: in primo casu erit $x = x - o y = \left(\frac{1}{1-o} - \frac{o}{1-o}\right) a$: in secundo $x = x + o y = \left(\frac{1}{1-o} + \frac{o}{1-o}\right) a$. Criterium vero quo dignosci possit quemnam ex istis casibus formula nostra complectatur, non nisi in ipso *zero* quæri potest. Itaque $x = a$, quæ in methodo communi non nisi ad æquationem identicam reducitur, ad utraque systemata referenda est, ac triplicem diversam naturam assumere potest, prout cum additione vel subtractione ipsius $(o)$ tam in numeratore quam in denominatore conjungitur, qua $(o)$ conjunctione utraque fluens simul consociatur, ac systema perficitur. Hinc sine $(o)$ expressa formula, $x$ non nisi unam tantum fluentem solitariam significat: at facta $(o)$ conjunctione systema alterutrum perficitur. Jure igitur sæpe in hac, & in I.ª P.ᵉ inculcavi $x = a$, quæ ad unum tantum valorem per vim a metho-

thodo nota constringitur, magis esse indeterminatam ac superiores, quæ solitariæ semper sumendæ sunt ad alterutrum systema determinandæ, quibus suæ respective homologæ addendæ, ut integrum systema habeatur. Ex fœcundissimo igitur, atque inexhausto tantarum veritatum fonte, quem nobis Theoria nostra nunc primum aperit, vide quantum hæc nostra a vulgata methodo angustissimis, fallacibus, ac falsis principiis suffulta differat, & utrum utri sit anteferenda. Cæterum constructionem superiorum formularum omitto, quæ facile ad normam illarum Cap: VII. perficitur.

§. 10. Quæ cum ita sint, manifeste evincitur æquationem $x = a - b + c$ substitutione unius protonumeri reduci ad secundam Auctoris $x = \frac{ab}{c}$, quam utpote origine prorsus diversam a quatuor lineis geometricis proportionalibus deduxerat celeberrimus Auctor, atque alterutram in alterutram facile posse transmutari. Ita posita ex: gr: $x = \frac{17}{6} a = a - \frac{2}{3} a + \frac{5}{2} a$, & posita $\frac{2}{3} a = b$, $\frac{5}{2} a = c$, erit $x = \frac{17}{6} a = a - b + c$. Quibus palam fit æquationis $x = \frac{ab}{c}$ originem non quartæ proportionali post tres datas esse tribuendam, sed ab una lineari æquatione pluribus lineis conflata, ad unum tantum protonumerum facta reductione, ut diversum illud systema, ad quod pro diversitate protonumeri arbitrio sumpti pertinet, construi legitime possit. Et sane proposita æquatio $x = \frac{ab}{c}$, quam Auctor a tribus lineis proportionalibus derivat, sic erit emendanda. Si enim fiat $x = \frac{a}{c} . b$, erit $b$ protonumerus, & reductis $a$, $c$ ad eumdem protonumerum $b$, facta ex: gr: $a = \frac{3}{2} . b$; $c = \frac{1}{5} . b$, erit $\frac{a}{c} = \frac{5 . 3 . b}{2 . 1 . b} = \frac{15}{2}$ fractio numerica fluens, & $x = \frac{15}{2} . b$ ad SY: vel facta $x = \frac{b}{c} . a$, erit $\frac{ba}{c} = \frac{2 . a}{3 . \frac{1}{5} . \frac{2}{3} . a} = 5\, a$ iterum ad SY; vel facta $a = \frac{1}{2} . f$; $b = \frac{1}{3} . f$; $c = 5 . f$, $x = \frac{1}{2 . 5} . \frac{1}{3} . f = \frac{1}{30} . f$ ad SA, vel

ad minorem SY ut supra: dummodo $a$, $b$, $c$, ponantur constantes. Si enim quæ constans vicem gerit protonumeri ponatur fluens, æquatio erit $x = \frac{a}{c} . y$, & facta $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$, fractione numerica fluenti, erit $x = \frac{m}{n} . y = \frac{mf}{(m \pm n) . \frac{nf}{m \pm n}} . y = \frac{m}{m \pm n} . f$ ut in superiori Capite: at si $a$ & $c$ lineæ constantes retineantur, erit $x = \frac{ma}{(m \pm n) . \frac{mc}{m \pm n}} . y$; & $x = \frac{m}{m \pm n} . a$; $y = \frac{m}{m \pm n} . c$, utraque ad systema diversi protonumeri, ut docuimus initio hujus Capitis. En igitur quot modis transformari possit æquatio $x = \frac{ab}{c}$, & quot variis notionibus obnoxia, quin veram fluentis naturam amittat, ac suæ homologæ consocietur ad integrum systema constituendum: quæ certe quidem in vulgari methodo neque fluere potest, nec diversimode modificari, atque ideo non nisi ut incognita ab ipsa considerari potest.

§. 11. Ut rem tanti momenti intimius excutiamus, quatuor geometricæ proportionales æquationis $x = \frac{ab}{c}$ in analogiam conversæ sint ( *Fig.* 2. ) $AB = c : BC = a :: AD = b : DE = d = \frac{ab}{c}$ : erit igitur quarta $d = \frac{BC . AD}{AB}$. Ex puncto A erecta AH parallela DE, & a puncto E ducta EH parallela AD, & producta BC usque ad I, erit $d = DE = \frac{BC . AD}{AB} = \frac{GD}{AB}$, sed $GD = GB + CD$, & $CD = CH$; ergo $GD = HB$: ideoque $\frac{BC . AD}{AB} = \frac{GD}{AB} = \frac{HB}{AB} = \frac{AB}{AB} AH = AH$, quæ est quarta proportionalis quæsita: & hæc est constructio superior Analyseos vulgatæ. Idem invenies si AD, BE sint respective minores lineis AB, BC. Itaque si lineæ AD, DE fluentes ponantur, & AB, BC constantes & datæ, erit $y = AD : DE = x :: AB = c : BC = a$, ex qua analogia eruitur tam $y = \frac{c}{a} . x$,

quam

quam $x = \frac{a}{c} y$ : quo ostenditur non posse $x$, vel $y$ fluentem esse, nisi fit & ipsa $a$ vel $c$: atque ideo in methodo nota $x$ æquationis $x = \frac{a}{c} . b$ non potest esse fluens, sed tantum quarta incognita proportionalis, quæ quæritur post $c$, $a$, $b$. Donec igitur hæc analogia quatuor lineis geometrice proportionalibus constat, cum termini singuli lineas diversas exhibeant, duas æquales quidem sed diversas rationes contineat necesse est: quo fit ut ad habendam quartam multiplicandæ sint duæ mediæ inter se, ac deinde earum productum per primam dividendum. Hinc a genere ad genus transitus necessario est faciendus: hoc est ad productum duarum dimensionum primo transferimur, deinde ut ad quartam linearem deveniamus, instituenda est per primam divisio. Si quis tamen hac methodo vulgo usurpata, qua fluentes $x$, $y$ eamdem, quam primo sumpserant, rationem inter se semper retinent, recte uti posse in inveniendis fluentibus utriusque systematis nostræ Theoriæ arbitraretur, sciat (quod diligentissime est advertendum) se longius quam dici potest a veritate aberrare.

§. 12. Præter enim ea, quæ diximus §. 23. & 24. Capitis superioris, ex demonstratis constat in quacumque æquatione pluribus datis conflata primum omnium ad unam tantum datam, sive protonumerum, quot sunt datæ, esse reducendas, ut unitas systematis apprime necessaria determinetur, sub quo vere fluentes homologæ legitime consocientur. Verum hac prima operatione peracta, rationes illæ duæ (vel quotquot addi possunt) quæ in lineis geometricis æquales quidem, sed diversæ erant, ad unam tantum rationem numericam abstractam reducuntur: ac proinde non licet amplius uti methodo inveniendi quartam proportionalem geometricam, evanescente omnino quicquid geometricum est, & ad solos numeros contracta re. Et sane analogia superior $y : x :: c : a :: b : \frac{ba}{c}$ si ad eumdem protonumerum, puta $f$, reducatur, facta $c = \frac{f}{5} = \frac{1}{3} . a$, erit $y : x :: \frac{f}{5} : \frac{3}{5} . f :: b : 3b$, sive $y : x :: 1 : 3$, una & simplex ratio numerica ex cæteris ad minimos reductis terminos: hoc est singulæ fiunt una & identica: atque ideo $x$, $y$ non possunt nisi in eadem semper ratione $1 : 3$ fluere, & crescente una & altera crescit, ac viceversa. Alia igitur est ineunda via ut reductione ad protonumerum facta fluentes homologæ utriusque systematis in quacumque fluenti ratione $m : n$, sine conditionis systematis assumpti dispendio, inveniantur. Hæc autem via ea est, quam nobis nostra Theoria in Capp: superioribus præmonstravit: ut nimirum posita $x : y :: 1 : 3$ ratione, qua fluentes se se respicere in hoc casu ponuntur, & protonumero $f$ arbitrio sumpto, fiat $x : y :: \frac{1}{3 \pm 1} . f : \frac{3}{3 \pm 1} . f$,

ex

ex qua oritur æquatio $x = \frac{1}{3} y$ (ut ſupra invenimus) quo artificio fluentes in continuo ſuo fluxu rationem mutant, & vere fluentes fiunt. Evaneſcentibus igitur lineis omnibus, ac ſolum exiſtente uno tantum protonumero $f$ arbitrio ſumpto, conſtructio ad Triangulum cum neutra conditione ſyſtematis conciliari poteſt, ſed in locum Trianguli, quod rationes geometricæ æquales ſed diverſæ requirunt, linea recta HG (*Fig.* 3.) duobus tantum punctis terminata ſuccedit, in qua res omnis peragitur, & conſtructio legitima in eodem ſemper genere linearis quantitatis ſufficitur. Quibus conſtat quam caute incedendum ſit in hiſce analyticis inveſtigationibus, in quibus formulæ diverſi prorſus generis ac naturæ, ac diverſas affectiones geometricas referentes, tantam inter ſe ſimilitudinem præſeferunt, ut hactenus tamquam identicas acutioribus Analyſtis ſe venditaverint, nova hac noſtræ Theoriæ luce deſtitutis.

§. 13. Nam ſi æquationes illæ communes a geometrica analogia ortæ cum illis noſtræ Theoriæ ſuperius traditis conferantur; ita inter ſe ad amuſſim congruere videntur, ac ſi ab eadem origine profectæ eamdem quoque geometricam conſtructionem exquirerent. Tamen

I.ª $x = \frac{a}{c} . b$ facta $= \frac{m}{n} . b$ ( $b$ conſtanti & protonumero, & $\frac{m}{n}$ fractione numerica ) oritur ab æquatione $x = a - b + c$ ad eumdem protonumerum $b$ reliquis $a$, $c$ reductis: & eſt una tantum fluens ſolitaria denominatoris $n$, numeratoris $m$. Quæ ſi $\frac{m}{n}$ major eſt unitate, pertinet tantum ad ſyſtema SY, & poteſt eſſe tam major, quam minor fluens: ſi $\frac{m}{n}$ eſt unitate minor pertinet, ad SA, vel fit fluens minor ſyſtematis SY.

II.ª $x = \frac{a}{c} . b$ facta $= \frac{m}{n} . y$, poſita ſcilicet $b$ fluente $= y$, oritur a ratione numerica $n : m$ fluenti, qua ſe ſe reſpiciunt fluentium homologarum $x$, $y$ coefficientes, atque ideo ipſæ fluentes: qua ad utrumque ſyſtema integrum cujuſcumque protonumeri rite perveniri poteſt.

III.ª $x = \frac{a}{c} . b$ facta $= \frac{a}{c} y$, $b$ ſcilicet fluente, & $a$, $b$, lineis geometricis datis, continet duas fluentes $x$, $y$ ejuſdem coefficientis, ſed diverſo ſingulæ protonumero præditæ, quæ ideo ſimul in eodem ſyſtemate nequeunt conſociari & eſſe homologæ. Erit enim $x : y :: a :: c :: \frac{m}{m \pm n} . a : \frac{m}{m \pm n} . c$

ſive

five ex: gr: (*Fig.* 4.) : : $\frac{3}{3+2}$ AB : $\frac{2}{2+3}$ CF, facta $a =$ AB, $c =$ CF, & $x = \frac{3}{5}$ AB = AD; $y = \frac{2}{5}$ CF = CE, quæ singulæ ad diversum systema pertinent. Quæ si ambæ ad AB $= a$, vel ad CF $= c$, vel ad quamlibet GH $= f$ (*Fig.* 5.) reducantur, æquatio fit $x = \frac{1}{3} \cdot y$ & pertinet ad II.am

§. 14. IV.a tandem $x = \frac{ab}{c}$, in qua, ut vult methodus nota, $c$, $a$, $b$ lineas datas repræsentant: in hac si fiat $x = \frac{a}{c} \cdot b$ erit $x : b :: a : c$; at facta $x = \frac{b}{c} \cdot a$, erit $x : a :: b : c$; in prima $x : b$ in ratione linearum $a : c$; in secunda $x$ ; $a$ in ratione linearum $b : c$. Itaque $x$, ut diximus, fluere nequit nisi in prima fluat $b = y$, & æquatio fit $x = \frac{a}{c} \cdot y$; in secunda fluat $a = y$, & æquatio fit $x = \frac{b}{c} \cdot y$. Prima a vulgari methodo construitur ope Trianguli MAN posita AB $= a$, BC $= c$, AM $= x$, MN $= y$ (*Fig.* 6): secunda prout $b$ est major vel minor $a$, ope Trianguli D′AC″ vel DAC′, in quo est AD′ vel AD $= b$, D′C″ = DC $= c$, & AM $= x$, MN″ vel MN′ $= y$. Poterat etiam utraque ope Trianguli BAC (*Fig.* 7.) anguli constantis construi: posita in prima AB $= a$, AC $= c$, erit AM $= x$, AN $= y$: in secunda, facta $b =$ AD′ vel AD prout est major vel minor $a$, erit AM″ vel AM′ $= x$, & AN $= y$. Omitto alios innumeros prope modos, quibus constructio hujus æquationis Analysim communem satisfacere posset. In utraque hac superiori constructione, quæ est vulgaris, semper a genere ad genus transitus fit, dummodo in prima $a$, $c$; in secunda $b$, $c$ lineæ geometricæ supponantur. Facile tamen hoc evitare fas est, cum sit in prima $\frac{a}{c}$, in secunda $\frac{b}{c}$ = fractioni numericæ abstractæ $\frac{m}{n}$ constanti ortæ a ratione constanti, qua se se respiciunt $c : a$; vel

$c : b$,

$c : b$, atque ideo in utroque casu æquationis $x = \frac{m}{n} y$, $n : m$ necessario est ratio constans. Hinc quid sequatur vide:

I.° fluentes $x$, $y$ infinitis quidem valoribus singillatim, & successivo motu obnoxiæ sunt, sed tamen eamdem semper rationem constantem $m : n$ inter se retineant necesse est, ita ut crescente una, altera crescat, & viceversa; & singulæ simul ab eodem originis puncto A profectæ simul in eodem puncto evanescant.

II.° Quoniam ratio $m : n$ constans est, ex analogia $x : y :: m : n$ rationem quidem, qua se se respiciunt fluentes, assequi poteris; nunquam tamen singularum valorem ac formam absolutam poteris obtinere: alterutra enim non nisi per alterutrius valorem arbitrio sumptum determinari potest; formam vero pro varietate circumstantiarum variam, quam indicare debent singulæ fluentes, a Methodo communi frustra requiras, de qua nihil suspicans semper tam incognitas, quam fluentes in quocumque casu symbolis genericis $x$, $y$, $z$ &c. arbitrio sumptis exhibuit.

§. 15. Quamobrem cum Analysis communis hac universali Methodo IV.ª ad linearium æquationum constructionem concinnandam utatur, atque eadem una ad ulteriores construendas progrediatur, rationem $m : n$ semper constantem assumat necesse est, ut valoris unius determinatione alterius valorem consequatur. Hinc opinio illa in Analysi universim recepta nihil esse absolutum; omnia a relatione pendere, quæ innotescat oportet, ut ex hac fluentium comparatione data, a qua unice æquatio vulgo conflatur, ea quam intelligit, æquationis solutio prospere succedat. Hoc ita verum est, ut si ipsi æquationem hanc $x = \frac{m}{n} y$ solvendam, atque construendam proponam, in qua tam $x$, $y$, quam $m$, $n$, fluentes velim, insanire putet solemnia me, utpote qui ab eo, quod omnino ignotum est, notum aliquid erui posse credam. Hoc tamen quod nunquam fieri posse Methodus vetus contendit, mea Theoria solidioribus nixa principiis artificio II.° §. 13. facile assequuta est, facta $x : y :: m : n :: \frac{m}{m+n} . f : \frac{n}{n+m} . f$ vel $:: \frac{m}{m-n} f : \frac{n}{m-n} . f$, ac demonstravit esse $x = \frac{m}{m+n} . f$; $y = \frac{n}{n+m} . f$, quia $x + y = \left(\frac{m}{m+n} + \frac{n}{n+m}\right) f = f$ intactam universim servat conditionem necessariam systematis S A: vel $x = \frac{m}{m-n} . f$; $y = \frac{n}{m-n} . f$; quia $x - y = \left(\frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n}\right) f = f$: quæ est

con-

conditio, qua sine systema S Y stare nequit: quo pacto & habetur valor generalis, & forma absoluta singularum fluentium homologarum in utroque systemate, & substitutione cujuscumque valoris in locum $m$, $n$ intra limites utriusque systematis, determinata fluentium ratio ac valor obtinetur. In nostra hac Methodo fluentes homologæ in eadem protonumeri linea positæ continuo fluxu semper rationem $m : n$ mutant, atque ideo & ipsa fluens sit oportet: servatur tamen semper ab utrisque prima & necessaria lex systematis. Contra in communi methodo ratio $m : n$ semper eadem perseverat; quo fit, ut fluentes non nisi in eadem semper ratione crescere ac decrescere possint, ac cum nulla alia conditione inter se conjunctæ sint, non nisi alia per aliam quoad valorem determinari potest, nullo modo quoad formam. Hinc necessitas rationis constantis $m : n$, quæ si ponatur fluens, omnis omnino tollitur solvendi atque construendi hasce æquationes facultas.

§. 16. Hic in eo tandem loco sita res est, ut ad diversam utriusque methodi vim ac præstantiam cognoscendam necesse sit constructionem generalem æquationum primi gradus, quam docet vulgata Analysis, conferre cum illa, quam mea nova Theoria nunc primum profert. Itaque ut in tuto res sit, assumam constructionem vulgo usurpatam quarumlibet æquationum primi gradus a §. 15. Cap: VIII. Lib: I. Instit. Analy. Riccati, in quibus duæ *incognitæ* sive *indeterminatæ* ( ut ejus verbis utar ) reperiuntur. Hujusmodi æquationes omnes hæc generalis formula complectitur $y = \frac{mA + mx}{n}$; in qua „ $m$A ( ut „ ait ) summam repræsentat terminorum omnium, qui cogniti sunt, eaque „ positiva esse potest vel negativa: $m$ est coefficiens quilibet positivus vel ne„ gativus abscissam $x$ multiplicans, $n$ vero coefficiens quicumque quantitatis $y$, „ seu primi membri æquationis, qui in altero in divisorem transit, ut $y$ sola „ ex una parte remaneat „. Hanc æquationem ad lineam rectam a ( *Fig.* 8. ) indicatam spectare facile sic demonstrare posse credit. Nimirum sumpta A C $=$ A, fiat in angulo quocumque linea A R $= \frac{mA}{n}$, & per R, C ducta recta B D, ea est quæ propositæ æquationi convenire arbitratur, in qua A V $= x$, V Q $= y$. Et §. 18. si quantitas A esset negativa, æquatio fieret $y = \frac{mx - mA}{n}$: in quo casu sumenda erit $a$C $=$ A, & $ar = \frac{mA}{n}$, & puncta $u$, C lineam determinabunt, & $au = x$, $uq = y$. At §. 21. si eorum alter terminorum, qui utramque indeterminatam continent, deficiat ( puta $x$ ), ut sit $y = \frac{mA}{n}$, locus (ait) respiceret lineam rectam lineæ abscissarum parallelam: & si esset $y = o$, erit $x =$ A, & locus erit linea recta parallela ordinatis &c. Et hæc est generalis constructio æquationum indetermina-

natarum ( hoc est duabus fluentibus constantium ) omnium Analystarum consensu universim recepta.

§. 17. Tradita methodo vulgaris Analyseos constructionis æquationum indeterminatarum primi gradus, videamus quæ in hac re sit Theoriæ nostræ doctrina. Ex §. 26. Cap: VIII. scimus, posito $n > m$, æquationem $y = \frac{m}{n} x$

$$= \frac{m}{n} \underset{1}{\underline{\left( \frac{1}{2} \left(\frac{n+m}{n+m}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n-m}{n+m}\right) \right)}} a$$

$$= \underset{1}{\underline{\left( \frac{1}{2} \left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n-m}{n+m}\right) \right)}} a \; SA \; ; \; \&$$

$$y = \frac{m}{n} \underset{1}{\underline{\left( \frac{1}{2} \left(\frac{n+m}{n-m}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n-m}{n-m}\right) \right)}} a$$

$$= \underset{1}{\underline{\left( \frac{1}{2} \left(\frac{n+m}{n-m}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n-m}{n-m}\right) \right)}} a \; SY.$$

Itaque facta $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) a$

$= A$, erit $a = 2A$, & facta $x = \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) a = \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) 2A$,

invenies $y = \frac{m}{n} \left( \frac{1}{2}\, 2A + x \right)$, quæ est æquatio superior cujus constructionem Auctor sibi proposuerat, in quam conversa fuit $y = \frac{m}{n} x$. Ergo prima eadem est ac secunda, & A est dimidium protonumeri assumpti $2A$, quæ tam pertinere potest ad SA, quam ad SY. In primo casu erit $y = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\, 2A + x\right) = \frac{1}{2}\, 2A - x$: in secundo $y = x - \frac{1}{2}\, 2A$, & in utroque $n > m$, & $y$ fluens minor. Sumpta igitur $aA = 2A = BF$ (*Fig. 9*), erit in SA $y = \frac{m}{n} x = \frac{m}{n} FD = BD = \frac{m}{n}\left(\frac{2}{2} A + x\right) = \frac{m}{n}$

$\frac{m}{n}$ (FC+CD) $= \frac{2}{2}$ A $- x =$ BC $-$ CD; & $y = \frac{m}{n} x = \frac{m}{n}$BV $= \frac{m}{n} ( x + \frac{1}{2}$ 2 A $) = \frac{m}{n}$ ( BC + CV ) = CV $-$ CF = FV fluens minor in systemate S Y. Si ponatur $x = o$, erit $y = x$, & $m = n$; atque ideo $y = x' = \frac{1}{2}$ 2 A $- o = \frac{1}{2}$ 2 A $+ o$. Hæc nostra multum differt a I.ª §. 13. $y = \frac{m}{n}$ A, hac una tantum $\pm o$ additione: qua ostenditur hîc $\frac{1}{2}$ 2 A = A esse dimidium protonumeri; quando illic A protonumerum integrum repræsentat. In utroque systemate $y$ potest quidem fieri zero æqualis, quia in utroque est fluens minor, & in S A $y = o =$ B, & in S Y $y = o =$ F: & $x$ maxima in S A = FB = 2 A, minima in S Y = BF = 2 A. Verum si proposita fuisset $y = \frac{m}{n} ( \frac{1}{2}$ 2 A $- x)$ in S A $= \frac{1}{2}$ 2 A $+ x$; vel $y = \frac{m}{n} ( x - \frac{1}{2}$ 2 A) S Y $= x + \frac{1}{2}$ . 2 A, in hoc casu minimus valor $y$ est $= \frac{1}{2}$ . 2 A: quando $x = o$ in systemate S A: at in systemate S Y minimus valor $y$ est $= \frac{1}{2}$ . 2 A $+ \frac{1}{2}$ . 2 A = 2 A, quia minimus valor $x$ in hoc systemate est $= \frac{1}{2}$ . 2 A: repugnat itaque in utroque systemate tam in formula $y = \frac{m}{n}( \frac{1}{2}$ . 2 A $- x$ ) S A, quam in $y = \frac{m}{n} ( x - \frac{1}{2}$ 2 A ) S Y, fluentem $y$ fieri posse zero: at in æquatione $y = \frac{m}{n} ( x + \frac{1}{2}$ 2 A) quæ est ambigua, & ad utrumque systema pertinere potest, in utroque fluens $y$ potest nullescere: quia in hoc casu $m$ fit zero minima, & $n = 1$ maxima, estque $y = \frac{m}{n} ( \frac{1}{2}$ 2 A $+ x$ ) =

$$= \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) 2\,A + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) 2\,A\right)}{1}$$

$$= \frac{o}{1}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1+o}\right) 2\,A + \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1+o}\right) 2\,A}{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1+o}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1+o}\right)}\right] = o$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1+o}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1+o}\right)\right) 2\,A}{1} = \frac{o}{1+o} \,.\, 2\,A,$$ idque in ſyſtemate S A.

At in ſyſtemate S Y $y = \frac{m}{n}\left(x + \frac{1}{2}\, 2\,A\right)$

$$= \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) 2\,A + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right) 2\,A\right)}{1}$$

$$= \frac{o}{1}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right) 2\,A + \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1-o}\right) 2\,A}{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1-o}\right)}\right] = o$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right) 2\,A - \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1-o}\right) 2\,A}{1} = \frac{o}{1-o} \,.\, 2\,A.$$

§. 18. In hoc uno caſu æquatio $x + a = o$, qua paſſim utitur, nemine diſſentiente, Analyſis vulgata, cum veritate conciliari poteſt. Nam $y = \frac{1}{2}\, 2\,A + x$, (quæ in propoſito caſu eſt $y = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\, 2\,A + x\right)$

$$= \frac{\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{1+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-1}{1+1}\right)\right) 2\,A}{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, 2\,A + o\right) = \frac{1}{2}\, 2\,A,$$

fluens

fluens major minima in S A, cui respondet $y = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{1+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1-1}{1+1}\right)\right)2\,A}{1}$ $= \frac{1}{2}\,2\,A - o$ fluens minor maxima); si zero æquiparetur, fit $y = \frac{o}{1}\left(\frac{1}{2}.2\,A + \frac{1}{2}.2\,A\right)$, & $x$ semidifferentia maxima $= \frac{1}{2}\,2\,A$, & $y = \frac{1}{2}.2\,A - x = \frac{\frac{1}{2}.2\,A - \frac{1}{2}.2\,A}{1} = o\,2\,A$ minima. At in systemate S Y utraque fluens minima, atque ideo $y = \frac{m}{n}\left(x + \frac{1}{2}\,2\,A\right)$ $= \frac{\frac{o}{1}\left(\frac{1}{2}\,2\,A + \frac{1}{2}\,2\,A\right)}{1}$ minima major, & $x$ semisumma minima, & $y = \frac{\frac{1}{2}.2\,A - \frac{1}{2}\,2\,A}{1}$ fluens minor minima $= o$. Quibus aperte ostenditur veritatem æquationis vulgo receptæ $A + x = o$ adstrui non posse, nisi ratio $n : m$, quæ vulgo constans semper sumitur, fluens, ut mea Theoria docet, ponatur; ut $y = \frac{1}{2}\,2A + x$, quæ vere est $y = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}.2A + \frac{1}{2}(o).2A\right)$ in S A, $y = \frac{o}{1}\left(\frac{1}{2}.2\,A + .\frac{1}{2}.2\,A\right)$ in S Y, convertatur in $y = \frac{o}{1}\left(\frac{1}{2}.2\,A + \frac{1}{2}.2'A\right)$ in S A $= \frac{o}{1}\left(\frac{1}{2}.2'A + \frac{1}{2}.2\,A\right)$ in S Y; & in utroque systemate $y = \frac{1}{2}\,2A - \frac{1}{2}.2'A = y = \frac{1}{2}.2'A - \frac{1}{2}.2\,A = o\,2\,A$.

Vide igitur quam longe distet constructio communis harum æquationum primi gradus a constructione, quam nobis exhibet nostra Theoria, cum hæ constructiones frontibus adversis inter se ita pugnent, ut nullo artificio componi possint.

§. 19. Sed antequam judicium feratur utra utri sit anteferenda, multum conducet ex ipso Auctore tradere methodum, qua geometrice duarum *incognitarum* valo-

valores determinat vetus Analysis, quotiescumque tamen duæ habeantur indeterminatæ æquationes primi gradus: ubi etiam principia methodi vulgaris eliminationis ac intersectionum Curvarum primum traduntur: atque deinde cum iis conferre, quæ in hac re tradit nostra Theoria. Verum ut in hujusmodi comparatione omnis partium studii suspicio removeatur, communem hanc doctrinam ipsissimis Auctoris verbis Cap: VIII. hîc subjiciam. „ Ex his (ait Auctor §. 22) „ quæ hîc tradimus, methodus aperitur, qua geometrice valores determinemus „ duarum *incognitarum*, quotiescumque duas habeamus indeterminatas æquatio- „ nes primi gradus. Sint hæ duæ æquationes $y = \frac{ax - ab}{n}$; „ $y = \frac{cx - cd}{m}$, & locum utriusque investigemus. In infinita M N „ (*Fig.* 10.) punctum A sit initium abscissarum: capiantur A C $= b$; „ C E $= n$; & in quocumque angulo M E F, fiat E F $= a$, ex superius „ dictis constat rectam ductam per puncta F, C fore locum primæ æquatio- „ nis, cujus coordinatæ sunt quælibet A V $= x$ & quælibet respondens V Q „ $= y$, & parallela rectæ F E. Jam vero quæramus locum æquationis secundæ, „ sed ita ut ejus abscissarum initium sit idem punctum A in linea eadem M N. „ Igitur sit A G $= d$, G P $= m$, & fiat P R $= c$, sed parallela ordinatis „ loci prioris, hoc est parallela F E; scimus rectam ductam per puncta R, G „ locum esse hujus secundæ æquationis. Nunc autem si R G producta secet in „ aliquo puncto Q lineam P C pariter quantum opus est productam, & ex „ puncto concursus demittatur Q V parallela F E, dicimus eam esse $y$ a dua- „ bus æquationibus requisitam . . . „ & hoc pacto etiam $x$ determinatur, ea „ namque erit A V . . . . Ita fit manifestum, quomodo duorum locorum in- „ tersectione geometrice inveniantur valores duarum *incognitarum* primi gradus.

„ §. 23. Ut hæc constructio plenius intelligatur, nonnulla sunt hîc animad- „ vertenda. Si ratio $n : a$ eadem fuerit ac ratio $m : c$ . . . . erunt lineæ „ F C, Q G parallelæ: atqui lineæ parallelæ etiamsi in infinitum producan- „ tur, nunquam se intersecant; ergo in hoc casu non possunt determinari va- „ lores $x$, $y$ qui proinde quibuscumque datis majores erunt existimandi . . . .

„ §. 24. Si supponamus $b = d$, erit $x = b$, & $y = o$. Patet primum „ quia tunc puncta Q, V incident in C: ergo A C $= b =$ A V $= x$: „ patet alterum quia ex eo quod puncta Q, V unum punctum efficiant, ne- „ cesse est tota linea Q V omnino evanescat. Idipsum Analysis ostendit. Etenim „ quum duo valores $y$, qui sunt in hoc casu $\frac{ax - ab}{n}$, $\frac{cx - cb}{m}$ inter „ se æquales esse oporteat, erit $\frac{a}{n}(x - b) = \frac{c}{m}(x - b)$, seu

„ ( $\frac{a}{-}$

„ $(\frac{a}{n} - \frac{c}{m}).(x - b) = o$ : ergo alteruter ex factoribus primi membri „ est $= o$: at non primus, quum eæ quantitates ad libitum assumi possint; „ ergo $x - b = o$, & $x = b$; jam vero si loco $x$ substituas $b$ in utro- „ que $y$ valore ambo fiunt $= o$.

„ §. 25. Denique cum rectæ BD, QG non possint se mutuo secare nisi in „ unico puncto, sequitur unicum ab iis valorem $x$, $y$ exhiberi „.

§. 20. Hæc est methodus veteris Analyseos in determinandis geometrice valoribus $x$, $y$ duarum æquationum, quas indeterminatas vocat. Videamus nunc quæ sit circa hasce æquationes Theoriæ nostræ doctrina. Ac primum ab hac nostra docemur æquationem $y = \frac{m}{n} x$ facile converti in æquationes Auctoris, a qua proinde & originem ducunt, & illi dant. Scimus enim §. 26. Cap: VIII. posita $n < m$ esse

$$\left\{\begin{array}{ll} y = \frac{m}{n} . x = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) f - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) f\right)}{1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) f + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) f}{1} = \frac{m}{m+n} f & \text{SA} \\ y = \frac{m}{n} . x = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) f - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) f\right)}{1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) f + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) f}{1} = \frac{m}{m-n} f & \text{SY} \end{array}\right\}$$

posita $n > m$

$$\left\{\begin{array}{ll} y = \frac{m}{n} . x = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) f + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) f\right)}{1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) f - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) f}{1} = \frac{m}{m+n} f & \text{SA} \\ y = \frac{m}{n} . x = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) f + \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right) f\right)}{1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n-m}\right) f - \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{n-m}\right) f}{1} = \frac{m}{n-m} f & \text{SY} \end{array}\right\}$$

Fac igitur $\frac{1}{2}\left(\frac{m \pm n}{m \pm n}\right) f = b$ constanti formulæ primæ Auctoris, vel $\frac{1}{2}\left(\frac{m \pm n}{m \pm n}\right) f = d$ secundæ, & erit in prima $f = 2b$; in secunda $f = 2d$; sed $f$ est protonumerus, ergo $2b$ erit protonumerus primæ, & $2d$ secundæ. In prima facta $\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) f$ in SA, vel $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) f$ SY, scilicet

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a+n}\right) 2b$ in S A vel $\frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a-n}\right) 2b$ S Y, $= x$, superiores factis substitutionibus erunt, posito $n < a$

$$y=\frac{a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a+n}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a+n}\right)2b\right)=\frac{a}{n}\left(\frac{1}{2}\ 2b-x\right)=\frac{a}{n}(b-x) \text{ prima}$$

Auctoris $= b + x = \frac{a}{a+n}\ 2b$ in S A;

$$y=\frac{a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a-n}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a-n}\right)2b\right)=\frac{a}{n}\left(x-\frac{1}{2}\ 2b\right)=\frac{a}{n}(x-b)=x+b=\frac{a}{a-n}\ 2b \text{ in S Y}$$

simili modo invenies, posito $c > m$

$$y=\frac{c}{m}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c+m}{c+m}\right)2d-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m}{c+m}\right)2d\right)=\frac{c}{m}\left(\frac{1}{2}\ 2d-x\right)=\frac{c}{m}(d-x) \text{ secunda}$$

Auctoris $= d + x$ S A $= \frac{c}{c+m}\ 2d$;

$$y=\frac{c}{m}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c+m}{c-m}\right)2d-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m}{c-m}\right)2d\right)=\frac{c}{m}\left(x-\frac{1}{2}\ 2d\right)=\frac{c}{m}(x-d)=x+d \text{ SY}=\frac{c}{c-m}\ 2d$$

Igitur æquationes Auctoris singulæ ad alterutrum systema pertinere possunt, & ambæ fluentes primæ sunt in ratione $a : n$; secundæ $c : m$ posita $a > n$; $c > m$; $b$ & $d$ sunt dimidii protonumeri suæ respectivæ æquationis, & $x$ si pertineat ad S A est semidifferentia fluentium homologarum in eadem formula existentium; si vero ad S Y, $x$ est semisumma fluentium homologarum. Quare tam $b-x$, quam $d-x$ est fluens minor, prima systematis S A protonumeri $2b$; secunda systematis S A protonumeri $2d$, & $b$, $d$, semisumma constans fluentium homologarum: atque ideo $x$ nunquam potest excedere valorem $b$, vel $d$, nec unquam formula fieri negativa. Ergo $y$ cui utraque comparatur, erit fluens major in suo proprio systemate. Et cum in prima sit $y = \frac{a}{a+n} \cdot 2b$ vel $\frac{a}{a-n} \cdot 2b$ fluens major, & fluens minor $x = \frac{n}{n+a} \cdot 2b$ vel $= \frac{n}{a-n} \cdot 2b$:

& in

& in secunda $y = \frac{c}{c+m} . 2d$, vel $= \frac{c}{c-m} . 2d$, & minor $x = \frac{m}{m+c} . 2d$, vel $= \frac{m}{c-m} . 2d$, liquido constat nullam ex istis fluentis naturam induere posse, quin in prima sint fluentes $a$, $n$; in secunda $c$, $m$; caussa enim vera, cur $x$, $y$ sint fluentes, a ratione $a : n$; & $c : m$ fluenti petenda est: quæ utraque ratio si constans fiat, ut vulgo fit, $x$, $y$, nunquam fluentes esse poterunt, sed ad eumdem valorem semper determinatæ.

§. 21. Adde quod Analysis vetus ad hanc fluentium determinationem obtinendam duas sibi æquationes comparet necesse est, quarum ope ad æquationem perveniat una tantum fluente affectam, a qua hujusce fluentis invento valore in propositis substituto, alterius fluentis in utraque æquatione valorem assequatur. Hinc ignorat methodum (ac dari non posse fidenter asseverat) qua ab una tantum æquatione duabus fluentibus conflata ad alteram pervenire possit una tantum fluente constantem, altera eliminata, & utriusque fluentis valorem determinare. Hoc tamen totum non solum facile, sed necessarium esse mea Theoria docet. Nam vidimus §.° superiori $\frac{a}{n}(b-x) = \frac{a}{n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a+n}\right)\right) 2b}{1}$ $= y = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{a+n} . 2b = \frac{a}{a+n} . 2b$; ergo $y = \frac{a}{a+n} . 2b$ fluens major, eliminata $(b-x)$ minori sive $x$; & minor $x = \frac{n}{n+a} . 2b$ eliminata majori $y$: & posita ex: gr: $a = 7$; $n = 5$, erit in æquatione $y = \frac{7}{5}(b-x)$, $y = \frac{7}{7+5} . 2b$ fluens major, & minor $b - x = x = \frac{5}{5+7} . 2b$: Quod Erat Faciendum. Quo semper magis evincitur, in methodo communi, in qua ponuntur semper $a$, $n$ determinatæ, tantum abesse ut $y = \frac{a}{n}(b-x)$ jure indeterminata appellari possit, ut etiam semper & ipsa, & singulæ fluentes necessario determinatæ maneant, eo prorsus modo, quo rationes $a : n$; & $c : m$ determinatæ concipiuntur. Hæc est ratio cur in §. §. allatis fluentes $x$, $y$ nomine tantum *incognitarum* designaverit Auctor, hoc est unius tantum valoris capaces: licet tamen æquationem ex: gr: $y = \frac{a}{n}(b-x)$ in-

indeterminatam posuerit: qua suppositione $x$, $y$ infinitis valoribus obnoxiæ, hoc est fluentes sint necesse est; tamen indeterminationem æquationis cum ratione constanti $n : a$ repugnare prorsus mea docuit Theoria. Non est itaque cur miremur, si Analysis nota fluentes cum incognitis, & viceversa, passim confundat, cum nullam habeat de natura fluentium claram & adæquatam notionem.

§. 22. Hæc licet sint gravia contra methodum determinandi fluentes in æquationibus indicatis ab Analysi nota usurpatam, graviora adhuc restant, si æquationes hujusmodi, Theoria nostra æquiorem lancem præbente, diligentius expendamus. In ea est hæresi Analysis communis, ut putet æqualitatem inter duo illa membra $\frac{a}{n}(x-b)$, $\frac{c}{m}(x-d)$ diversarum æquationum ad valorem ipsius $x$ inveniendum semper legitime obtineri posse, cum in hisce æquationibus primi gradus nunquam cadere possint imaginaria, a quibus tantum falsitatem æquationis, aut ejus *impossibilitatem* desumit. Exploremus tamen quam firmum & generale sit hoc principium, quo uno in hoc negotio secura nititur. Ut caute incedamus, sit primum æquatio $y = \frac{a}{n}(b-x)$; $y = b + x$, a quibus singulis eliminata $y$, est $\frac{a}{n}(b-x) = b + x$, a qua eruitur $x = \left(\frac{a-n}{a+n}\right) b = \frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a+n}\right) 2b$, protonumero $2b$; quæ est semidifferentia fluentium homologarum systematis S A. Simili modo facta $\frac{a}{n}(b+x) = b - x$, invenies $x = \frac{1}{2}\left(\frac{n-a}{n+a}\right) 2b$ semidifferentiam fluentium, sed in primo casu $a > n$; in secundo $a < n$, ut docuimus. Fiat nunc æquatio $\frac{a}{n}(x-b) = x + b$, ex qua $ax - ab = nx + nb$; & $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a-n}\right) 2b$; vel facta $\frac{a}{n}(x+b) = x - b$, erit $ax + ab = nx - nb$; & $x = \frac{1}{2}\left(\frac{n+a}{n-a}\right) 2b$ utraque ad S Y, in quo $x$ est semisumma fluentium, & in primo casu $a > n$; in secundo $n > a$. Quod cum semper in utroque systemate respective contingat, hujusmodi æquationes non modo veræ sunt, sed universim veræ, quibus Theoremata duo generalia §. 26. Cap: VIII. novo hoc argumento confirmantur.

§. 23.

§. 23. Nunc ad æquationem Auctoris $\frac{a}{n}(x-b)=\frac{c}{m}(x-d)$ explorandam accedamus, cujus primum membrum ex demonstratis est fluens major systematis S Y protonumeri $2b$, & $n<a$; secundum est item fluens major S Y sed protonumeri $2d$, & $m<c$. Verum hujusmodi fluentes nullo modo nec in systemate nec in valore convenire inter se universim possunt: atque ideo comparatio hæc æqualitatis inter hæc duo membra universim falsa est & absurda. Primum enim est fluens major S Y $\frac{a}{a-n}\cdot 2b$; secundum $\frac{c}{c-m}\cdot 2d$ fluens major S Y protonumeri $2d$: in quibus cum rationes $n:a$; $m:c$; atque protonumeri $2b$, $2d$ seorsim & arbitrio dati primum ponantur, quisque videt non posse inter hasce legitimam universim intercedere æqualitatem. Si enim facias ex: gr: $a:n::9:7$; $c:m::7:5$, & $b=\frac{1}{2}d$, erit primum membrum $\frac{9}{9-7}\cdot 2b=\frac{9}{9-7}\cdot d$, & secundum $\frac{7}{7-5}\cdot 2d=\frac{7}{7-5}\cdot 4b$, atque ideo inter se differunt mirum quantum! Quod si (ut vult Auctor §. 23.) ratio $n:a$ eadem fuerit ac ratio $m:c$, erit in prima $y=\frac{a}{a-n}\cdot 2b$, in secunda $y=\frac{a}{a-n}\cdot 2d$, quæ nequeunt esse æquales nisi sit $b=d$. Senserat hoc & ipse Auctor, qui in hoc casu valores $y$ determinari non posse asseverat, sed fieri quibuscumque datis majores. Sed rectius fuisset ex hoc incommodo (omissis ambagibus) falsitatem hujusce æquationis arguere a repugnantia constructionis inveniendi inter has fluentes $y$ ope intersectionis Locorum perfectam æqualitatem. Insuper falsum est alterum quod asserit §. 24. in quo posita $b=d$, vult $x=b$, $y=o$. Nam $y=\frac{a}{n}(x-b)$ est $=\frac{a}{a-n}\cdot 2b$; $y=\frac{c}{m}(x-b)=\frac{c}{c-m}\cdot 2b$ fluentes majores ejusdem systematis S Y universim finitæ, & in ratione coefficientium, non æquales. Ratio autem Auctoris ad suam probandam sententiam ea est, quod posita $\left(\frac{a}{n}-\frac{c}{m}\right)(x-b)=o$, factorem $\frac{a}{n}-\frac{c}{m}$ nullescere non posse ait, quia quantitates eæ ad libitum sumuntur; ergo nullescat oportet $x-b$, atque ideo $x=b$: qua ratione rectius erat deducere repugnantiam æqualitatis primo sumptæ: esset enim $\left(\frac{a}{a-n}-\frac{c}{c-m}\right)2b=o$, quæ

ex ipsa Auctoris sententia positis $a$, $n$; $c$, $m$ ad libitum nullo modo nullescere potest, nisi sit $\frac{a}{n} = \frac{c}{m}$. Insuper ex demonstratis est $\frac{a}{n}(x-b) = x+b$; & $\frac{c}{m}(x-d) = x+d$, ergo erit $x+b = x+d$, sed $x$ vulgo ponuntur identicæ: ergo $b = d$: ergo æquatio Auctoris locum habere nequit ex ipsa sua & communi sententia, nisi sit identica, & $\frac{a}{n} = \frac{c}{m}$.

§. 24. Ne quis vero reponat, qua tandem ratione fieri potuerit, ut Analysis nota tam diu ac a tot celeberrimis exculta Viris in gravissimos hosce errores, quos illi exprobo, inciderit, sciat totum hoc luctuosum sane ex præpostero, quo uti cogitur ordine, in solvendis æquationibus contigisse. Munus enim præcipuum ac directum (ut in Præfatione diximus) hujusce Scientiæ illud est, ut eam legitime ex datis & fluentibus pro varietate circumstantiarum sibi comparet æquationem, qua ad Locum geometricum ab ipsa quæsitum assequendum manu veluti ducatur. Necesse igitur erat prima ac generalia principia ad analytica rite tractanda, & geometricis applicanda primum invenire ac firmare: hoc est duo necessaria systemata linearia investigare; eorum diversas proprietates inquirere; omnia & singula æquationis elementa callere; fluentes a constantibus, atque earum diversam naturam cognoscere; varias, quibus affici potest pro varietate limitum, solutiones cognoscere, atque leges omnes, quas supra docuimus, generales in promptu habere, quorum omnium subsidio ad Locum geometricum tuto ac sine erroris periculo construendum deduceretur: verbo Geometria Analysim, non Analysis Geometriam ducem sequatur oportet. Verum in ea, quam ostendimus, principiorum analyticorum inopia atque imbecillitate constituta Analysis vetus, cum solutiones analyticas ex omni parte absolutas ex suo penu depromere non posset, suppetias a Geometria, cui auxilium præstandum erat, implorare coacta fuit, & a Locis geometricis quomodocumque descriptis eas solutiones atque fluentium valores Locorum intersectione repetere, quas ipsam primum Geometriæ præparare ac suppeditare par erat, ut Locus geometricus cum solutione analytica numeris omnibus absoluta optime responderet. Hinc factum fuit, ut sæpe geometricæ constructiones longe aliter significent, quam quod analyticæ formulæ re vera intelligunt: & sæpe ac sæpius, quod geometrice verum est, a falsis formulis & æquationibus non clare perspectis erutum arbitretur.

§. 25. Luculentissimum sane testimonium de hoc, quod dico, exhibet constructio hæc ipsa æquationum indeterminatarum vulgo recepta, quam præ manibus habemus. In hac enim intersectio duorum Triangulorum, quæ singula singulis æquationibus propositis pertinent, universim, ut ostendit Auctor, in aliquo puncto communi contingat necesse est: atque ideo recte in hac præparatione constructio geometrica abstracte sumpta procedit. Verum æquatio analyti-

lytica, quam vult Auctor $\frac{a}{n}(x-b)=\frac{c}{m}(x-d)$ longe a veritate universim aberrat, nec locum habere potest, ut ostendi, nisi datis $a$, $n$, $b$, sit in secundo membro vel ratio $m:c$ indeterminata, si $d$ datum velimus, vel data ratione $m:c$ ponatur indeterminatus $d$, ut alterutrum ad eum valorem determinetur, qui propositæ æquationi satis faciat. Constructio igitur Locorum in genere & nisi aliter quæratur, legitima est: æquatio vero in qua omnia primum ad libitum data concipiuntur excepta $x$, quæ ad amussim cum constructione congruere falso creditur, universim absolutam implicat contradictionem: licet in formulis analyticis nec recte institutis, neque intellectis minime appareat. Hæc tamen absurditas, si geometricis lineis formulæ analyticæ ad normam constitutæ applicari potuissent, ex ipsa constructione manifesta fieret, determinatione illarum fluentium, quæ sunt necessariæ ad geometricam Locorum intersectionem obtinendam, longe alienæ ab illis, quæ a proposita æquatione nimis generali & inconsulto conflata exhibentur: ac manifeste pateret fluentem $y$ communem geometricam cum analytica nullo modo conciliari posse, nisi æquatio legibus a me indicatis moderetur.

§. 26. Verum cum in eo sitam rem esse ostenderimus, ut ex hac universim recepta methodo, qua de agimus, quæratur non solum abstracte, & in aliquo peculiari casu qua ratione, quæ invicem in diversis Locis geometricis natura sunt distracta, uniantur atque æquentur, sed quamnam mutationem subeant fluentes in aliquo jam systemate constitutæ; hic necesse est ex mea Theoria ad totum negotium hoc hactenus tenebris involutum clare perspiciendum lumen mutuari, atque ostendere quinam sit usus atque finis hujusce methodi, quæ ad eliminandam unam ex fluentibus a duabus æquationibus indeterminatis, ut inde valores singularum fluentium inveniantur, perperam adhuc usque a vulgata Analysi adhibita fuit. Ajo itaque methodum hanc ad id unum, universim loquendo, institutam natura fuisse, ut fluens unius systematis ad aliud systema, vel ad aliam naturam in eodem systemate rite transferri possit sine ipsius valoris dispendio: in cæteris, quibus vulgo applicatur, utpote a vero suo fine detortam, falsam atque fallacem esse. Ac primum præter casus §. 26. Cap: VIII., quos formulis §. 22. hujus complexi sumus, scilicet

$$\text{I}\left\{\begin{matrix}\frac{a}{n}(b-x)=b+x & n<a \\ & \text{SA} \\ \frac{a}{n}(b+x)=b-x & n>a\end{matrix}\right\}:\ \text{II}\left\{\begin{matrix}\frac{a}{n}(x-b)=x+b & \\ & \text{SY} \\ \frac{a}{n}(x+b)=x-b & \end{matrix}\right\}$$

in quibus æquationes illæ universim veræ sunt, & more communi tractari & evolvi possunt, quia in singulis ab utraque membri parte $x$ sunt æquales & identicæ, atque ideo addi atque subtrahi invicem ope coefficientis possunt; videa-

deamus, utrum eodem protonumero $2b$ manente, aliæ legitimæ æquationes inter fluentes inveniri poſſint. Dico itaque æquationem SY 1.$^{am}$ $x+b=x-b$ SY ſemper verificari. Nam $x+b$ fluens major SY eſt ex mea Theoria $\frac{m}{m-n}.2b$ $=\frac{m}{m-n}$ AB $=$ AD (*Fig.* 11.); verum ſi fiat $\frac{m}{m-n}.2b$ $=\frac{m}{(2m-n)-m}.2b=$ BD', fluens hæc fit minor ejuſdem Syſtematis, licet æqualis primæ: ergo quæ erat (utpote fluens major) in ſitu AD puncto originis A, & cui reſpondebat ſua homologa minor BD $=\frac{n}{m-n}.2b$, transfertur in BD' puncto originis B, & fit minor, cui reſpondet ſua homologa major AD' $=\frac{(2m-n)}{(2m-n)-m}.2b$. Univerſim igitur ac ſemper vera erit æquatio $x+b$ SY $=x-b$ SY, quia ſemper licet fluentem majorem AD transferre in locum minoris BD'. Non licet tamen $x$ utriuſque membri æquales ut identicas ſumere (prout fecimus in ſuperioribus, & univerſim vulgo fit, ex quo eſſet $b=-b$, & $1=-1$), quia licet utraque ſit ejuſdem valoris, tamen utraque forma diverſa eſt: & in primo caſu eſt $x+b$ fluens major $=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)2b}{1}$; in ſecundo $x-b$ $=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{(2m-n)+m}{(2m-n)-m}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{(2m-n)-m}{(2m-n)-m}\right)2b}{1}$ fluens minor, licet ſint æquales: & $x$ primæ $\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b=$ CD; ſecundæ $=\frac{1}{2}\left(\frac{(2m-n)+m}{(2m-n)-m}\right)2b=$ CD': quæ ſunt inæquales, neque poſſunt ut æquales & identicæ ab utraque membri parte expungi; ut ſemper uſuvenit in communi Analyſi, identitate ſymboli $x$ decepta.

§. 27. Licet vero $x+b$ SY $=x-b$ SY ſemper vera Theorema generale conſtituat, quia nimirum licet ſemper in eodem ſyſtemate a majori fluente ad minorem ejuſdem valoris tranſitum facere; tamen converſa æquatio $x-b$ SY $=x+b$ SY (quod cuidam mirum videbitur) locum amplius univerſim habere.

re non poteſt: non licet enim in eodem ſyſtemate S Y minorem fluentem ſemper in majorem tranſmutare. Cum enim minor a zero uſque ad infinitum progrediatur, donec hæc protonumero eſt minor, non poteſt in majorem converti, quæ nequit eſſe minor ipſo protonumero. Hinc intra limites zero & protonumeri poteſt in fluentem minorem majoremve ſyſtematis S A converti: hiſce limitibus prætergreſſis, facta protonumero major e minori in majorem legitime poterit tranſmutari. Quare vel erit $x-b$ S Y $= b-x$ S A 2.ª, vel $x-b$ S Y $= b+x$ S A 3.ª, vel tandem $x-b$ S Y $= x+b$ S Y 4.ª, quarum tamen non niſi una eodem tempore verificari poteſt. Quomodo vero id fiat paucis accipe. Sit fluens minor S Y $\frac{n}{m-n}\,2b =$ B D (*Fig.* 12.), erit etiam hæc $\frac{n}{m-n}\cdot 2b = \frac{n}{(m-2n)+n}\,2b$. Sit primum $n < m-2n$, ſive $n < \frac{m}{3}$. Si eſſet $n = \frac{m}{3}$, fluens fieret $= \frac{m}{3m-m}\cdot 2b = \frac{m}{2m}\cdot 2b = \frac{1}{2}\cdot 2b$, æqualis ſcilicet dimidio protonumeri: igitur donec eſt $n < \frac{m}{3}$ erit fluens minor ſyſtematis S A, & locum habet æquatio 2.ª $x-b$ S Y $=$ B D $= b-x$ S A $=$ A E vel B E'. Facta $2n = m$ fluens fit $= \frac{n}{0+n}\cdot 2b = 2b$ protonumero, ergo maxima: ergo $n$ intra limites $\frac{m}{3}$ & $\frac{m}{2}$ conſtituit fluentem majorem ſyſtematis S A, & æquatio 3.ª $x-b$ S Y $=$ B D $= b+x$ S A $=$ A E' vel B E legitima eſt. Tandem poſito $n$ intra limites $\frac{m}{2}$ & infinitum, in quo caſu $m-2n$ eſt negativus, tranſitus fit a fluente minori ad majorem in eodem ſyſtemate S Y, cum ſit $\frac{n}{m-n}\cdot 2b = \frac{n}{n-(2n-m)}\cdot 2b$ ſive B D' $=$ A D, vel B d, & locum habet æquatio 4.ª $x-b$ S Y $=$ B D' $= x+b$ S Y $=$ A D vel $=$ B D.

§. 28. Ut hoc clarius percipiatur ſymbolis meæ Theoriæ formulas ſic effero.

2.a

$$x-b=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)}{1}2b=\frac{n}{m-n}.2b;\quad x=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b$$

$$=b-x=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(m-2n)+n}{(m-2n)+n}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{(m-2n)-n}{(m-2n)+n}\right)}{1}2b=\frac{n}{n+(m-2n)}.2b;\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{(m-2n)-n}{(m-2n)+n}\right)2b.$$

$n<\frac{m}{3}$

3.a

$$x-b=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)}{1}2b=\frac{n}{m-n}2b;\quad x=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b$$

$$=b+x=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(m-2n)+n}{(m-2n)+n}\right)2b+\frac{1}{2}\left(\frac{n-(m-2n)}{n+(m-2n)}\right)}{1}2b=\frac{n}{n+(m-2n)}.2b;\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{n-(m-2n)}{n+(m-2n)}\right)2b$$

$n>\frac{m}{3}<\frac{m}{2}$

4.a

$$x-b=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)}{1}2b=\frac{n}{m-n}2b;\quad x=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)2b$$

$$=x+b=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+(2n-m)}{n-(2n-m)}\right)2b+\frac{1}{2}\left(\frac{n-(2n-m)}{n-(2n-m)}\right)}{1}2b=\frac{n}{n-(2n-m)}.2b;\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{n+(2n-m)}{n-(2n-m)}\right)2b.$$

$n>\frac{m}{2}$

Sit nunc ex: gr: $m=9$; $n=1$, quæ ideo pertinet ad 2.am, in qua erit $x-b=\frac{1}{9-1}.2b=b-x=\frac{1}{1+(9-2)}.2b=\frac{1}{1+7}.2b$: prima $x=\frac{1}{2}\left(\frac{9+1}{9-1}\right)2b=\frac{1}{2}.\frac{5}{4}2b$: secunda $x=\frac{1}{2}\left(\frac{(9-2)-1}{(9-2)+1}\right)2b=\frac{1}{2}\left(\frac{7-1}{7+1}\right)2b=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}2b$. Si vero fiat $m=9$; $n-4$;

quia

quia $n > 3 < \frac{9}{2}$ æquatio 3.ª ſumenda eſt, in qua $x - b = \frac{4}{9-4} \cdot 2b$ $= b + x = \frac{4}{4+1} \cdot 2b$: prima $x = \frac{1}{2}\left(\frac{9+4}{9-4}\right) 2b = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5}\, 2b$: ſecunda $x = \frac{1}{2}\left(\frac{4-1}{4+1}\right) 2b = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2b$. Tandem facta $m = 9$; $n = 5$, quia $5 > \frac{9}{2}$ legitima erit 4.ª, ex qua eruitur $x - b = \frac{5}{9-5} \cdot 2b$ $= x + b = \frac{5}{5-1} \cdot 2b$: prima $x = \frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right) 2b = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 2b$: ſecunda $x = \frac{1}{2}\left(\frac{5+1}{5-1}\right) 2b = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2b$. In quacumque tamen ex iſtis æquationibus $x$ primi membri multum differt valore & poſitione ab $x$ ſecundi membri, atque ideo nec identicæ neque æquales inter ſe poſſunt eſſe: licet inter primum membrum & ſecundum perfecta æqualitas intercedat. Quare non niſi in I.^is & II.^is §. 26, in quibus, ut vidimus, fluentes in eodem ſyſtemate contentæ ſunt homologæ, fluentes $x$ æquationum ſunt identicæ & æquales, atque ut tales ſumendæ ſunt. In iſtis tamen repugnat æquatio $b - x = b + x$; $x - b = x + b$, vel $x + b = b + x$ &c. quia in prima fluentes homologæ S A $b - x$, $b + x$ nunquam inter ſe æquari poſſunt, niſi in unico caſu, in quo ſit $x$ utrinque $= o$: in ſecunda S Y fluens major a minori ſemper differt per protonumerum $2b$: in tertia fluens major $x + b$ S Y ſuperat ſemper majorem S A: atque ideo univerſim fluentes homologæ ejuſdem ſyſtematis nequeunt ſe reſpicere in ratione æqualitatis, ſed major ad minorem in ratione majoris inæqualitatis $m : n$. Quare æquationes hujuſmodi $x - b = x + b$ &c. non poſſunt eſſe legitimæ, niſi membrum unumquodque ad diverſum ſyſtema referatur, in quo uno caſu fluens aſſumpta in primo ſyſtemate ſibi ipſi æquari poteſt, licet in novam formam conformetur, quam ſyſtema alterum, cui applicatur, requirit.

§. 29. Hîc tamen diſtinguendi ſunt tres caſus, qui in hoc negotio occurrere poſſunt. Vel enim fluens unius ſyſtematis tranſit a majori ad minorem, vel contra in eodem ſyſtemate, ut eſt $x + b = x - b$, quam vidimus $x + b$ majorem facile transferri poſſe in minorem ejuſdem ſyſtematis, quin valor mutetur. Vel tranſit a ſyſtemate unius protonumeri ad aliud ſyſtema diverſæ naturæ ſed protonumeri ejuſdem, ut ſunt $x - b = b - x$; $x - b = b + x$ §. ſuperioris: vel tandem fluens tranſit ad ſyſtema diverſæ naturæ & protonumeri diverſi, mutata & natura & ſpecie ſyſtematis, ut eſſet $b + x = d - x$, $x + b$ $= x + d$ &c. In ſingulis tamen iſtis caſibus legitimæ poſſunt eſſe æquationes hujuſmodi diverſum ſyſtema complectentes, & facilis eſt tranſitus ab iſtis ad

æquationem I.am vel II.am, quæ fluentes homologas ejusdem systematis amplectitur, & contra: dummodo Theoria nostra fide sequatur. Sit ex: gr: una ex superioribus, quas legitimas ostendimus, æquatio $x+b = x-b$, cujus utrumque membrum pertinet ad S Y ejusdem protonumeri $2b$, ac tantum quæritur quomodo $x+b$ major legitime converti possit in fluentem minorem, intacto manente valore. Æquatio hæc in duas dispertiatur oportet, facta 1.a $M=x+b$; 2.a $M = x-b$. Sumatur primum $M = x+b$, & quoniam superius demonstratum fuit esse $x+b = \frac{m}{n}(x-b)$, statim devenimus ad æquationem II.am

§. 26. $M = x+b = \frac{m}{n}(x-b)$, ex qua eruuntur ambæ fluentes homologæ $M = x+b$; $N = x-b$, & ratio $n : m$, qua se se respiciunt; erit itaque $M = \frac{m}{n}(x-b) = x+b = \frac{m}{m-n}\ 2b$ fluens major, cui respondet minor $N = \frac{n}{m-n}\ 2b$. Nunc accipiatur altera æquatio $M = x-b$, quæ dat fluentem minorem systematis S Y ejusdem protonumeri $2b$, atque ideo erit $M=x-b = \frac{f}{g}(x+b)$, & $g : f$ ratio majoris inæqualitatis, & $M = \frac{f}{g-f} . 2b$ fluens minor; $N = \frac{g}{g-f} . 2b$ fluens major. Sed quoniam quæritur tantum conversio M majoris in M minorem, omissis in superiori N minori, in hac N majori fluentibus, fiat æquatio inter $M= \frac{m}{m-n} . 2b$, & inter $M = \frac{f}{g-f} . 2b$, ut sit $\frac{m}{m-n} . 2b = \frac{f}{g-f} . 2b$, & facta $\frac{f}{g-f} = \frac{m}{(2m-n)-m}$, erit hic ultimus coefficiens æqualis primo $\frac{m}{m-n}$, & ad eam formam conformatus, qua fluens, quam afficit, fit fluens minor. Erit itaque $M = \frac{m}{(2m-n)-m} . 2b = \frac{m}{m-n} . 2b$: & quoniam $\frac{m}{m-n} . 2b = \frac{m}{n}(x-b) = x+b$; $\frac{m}{(2m-n)-m} . 2b = \frac{m}{2m-n}(x+b) = x-b$; erit

legi-

legitima æquatio $\frac{m}{m-n} \cdot 2b = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1} 2b = x+b$

$= \frac{m}{(2m-n)-m} \cdot 2b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{(2m-n)+m}{(2m-n)-m}\right)2b - \frac{1}{2}\left(\frac{(2m-n)-m}{(2m-n)-m}\right)}{1} 2b = x-b$:

sed prima $x = \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) 2b$; secunda $x = \frac{1}{2}\left(\frac{(2m-n)+m}{(2m-n)-m}\right) 2b$ inæquales & inter se in ratione $m+n : 3m-n$. Advertas velim in hac secunda M minori, $m$ non posse minorem esse unitate, in quo casu fluens major prima $\frac{m}{m-n} \cdot 2b$, facta $n = o$, fit $= 2b$ minima. In hac suppositione $\frac{m}{m-n} \cdot 2b = \frac{1}{1-o} \cdot 2b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right)2b + \frac{1}{2}\left(\frac{1-o}{1-o}\right)}{1} 2b = x+b$

$= \frac{1}{2-1} \cdot 2b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2-1}\right) 2b - \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2-1}\right)}{1} 2b = x-b$ ut oculis patet: sed prima $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1+o}{1-o}\right) 2b$; secunda $x = \frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{2-1}\right) 2b$ in ratione $1 : 3$. Insuper in primo casu $M = \frac{1}{1-o} \cdot 2b$ maximæ respondet sua homologa minor $N = \frac{o}{1-o} \cdot 2b$ minima $= o$: at in secundo $M = \frac{1}{2-1}\, 2b$ minor est media; cui respondet sua homologa major $N = \frac{2}{2-1} \cdot 2b$ quæ est media & dupla primæ maximæ $M = \frac{1}{1-o}\, 2b$: quod revera contingere debet.

§. 30. Ex hisce facile est intelligere quo modo inversa ratione procedendum sit, ut rite transeamus ab æquationibus I.ª & II.ª §. 26. ad illas $x+b = x-b$; $b+x = d-x$ &c. §. superioris: quæ est via qua vulgaris Analysis insistit in tractanda hac, de qua agimus, Methodo constructionis; quæ tamen ab ipsa

 male

male intellecta & perperam tractatur, & applicatur deterius. Nam (ut re ipfa oftendamus quid fignificet & quid fibi velit Methodus hæc tam male vulgo ufurpata) fit una ex æquationibus Auctoris $M = \frac{a}{n}(x-b)$, quæ ex mea Theoria eft fluens major fyftematis $SY = x+b$, cui refpondet fua homologa minor $N = x-b$, quæ ad primam eft in ratione $n : a$, atque ideo $n < a$; quæ ratio fi ponatur, ut fit, determinata, erit utraque fluens determinata, & $M = \frac{a}{n}(x-b) = x+b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a-n}\right)2b + \frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a-n}\right)2b}{1} = \frac{a}{a-n}\cdot 2b$, & N minor $= \frac{n}{a}(x+b) = x-b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a-n}\right)2b - \frac{1}{2}\left(\frac{a-n}{a-n}\right)2b}{1} = \frac{n}{a-n}\cdot 2b$. Sit ex: gr: $n : a :: 5 : 9$, erit $M = \frac{a}{n}(x-b) = \frac{9}{5}(x-b) = x+b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right)2b + \frac{1}{2}\left(\frac{9-5}{9-5}\right)2b}{1} = \frac{9}{9-5}\ 2b$; & $x = \frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right)2b$: & fluens minor $N = \frac{n}{a}(x+b) = \frac{5}{9}(x+b) = x-b = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right)2b - \frac{1}{2}\left(\frac{9-5}{9-5}\right)2b}{1} = \frac{5}{9-5}\ 2b$: ac proinde determinata ratione $n : a$ utraque fluens determinatur in proprio fyftemate SY & quoad valorem & quoad formam, & $M = x + b = \frac{a}{n}(x-b) = \frac{a}{n}N$ eft æquatio orta a ratione, qua fe fe refpiciunt fluentes homologæ ejufdem fyftematis, atque ideo tam in majori $M = x+b$, quam in minori $N = x-b$, fluens $x$ eft utrinque æqualis & identica, & in hoc fyftemate $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a+n}{a-n}\right)2b = \frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right)2b$. Animadvertas quod licet fit $x+b$ æqualis $\frac{a}{n}(x-b)$, tamen fi fumas hanc fecundam pro prima, inno-

tefcit

tescit ratio $n : a$, quæ in formula $x+b$ implicite continebatur, per quam innotescit valor ipsius $x$: ex quo arguitur necessitas æquationis $x+b = \frac{a}{n}(x-b)$; vel $x-b = \frac{n}{a}(x+b)$.

§. 31. Nunc sumatur altera æquatio Auctoris $M = \frac{c}{m}(x-d)$, quæ est fluens & ipsa major systematis S Y sed protonumeri $2d$, & N minor $= x-d = \frac{m}{c}(x+d)$, & ratio $m : c$ minoris inæqualitatis. Quæ ratio si determinatur, determinatur & hîc, ut supra, utraque fluens, & valor ipsius $x$ æqualis in utraque semisummæ fluentium. Quare nullo modo post determinationem rationis $m : c$ inter hanc & primam legitima æquatio intercedere potest: in quo proinde graviter peccat, ut diximus, Analysis nota. Si igitur velimus primæ jam determinatæ & in valore & in natura hanc legitime comparare, sumenda est hæc ultima sub ea forma, quam requirit ejus natura, sed omnino indeterminata valore, ut ex comparatione alterius ille cognoscatur valor, qui cum æquatione instituta conciliari possit. Fiat itaque $\frac{a}{n}(x-b) = \frac{9}{5}(x-b) = x+b = \frac{c}{m}(x-d) = x+d$, cujus æquationis primum membrum est fluens major S Y determinata protonumeri $2b$, & secundum membrum repræsentat fluentem majorem S Y sed protonumeri $2d$. Ab hac igitur æquatione nihil aliud recte quæri potest, nisi ut exhibeat in systemate S Y protonumeri $2d$ fluentem majorem, quæ sit æqualis valore fluenti majori $\frac{9}{9-5} \cdot 2b$ systematis S Y protonumeri $2b$, sive quæritur quanam ratione fluens major determinata S Y protonumeri $2b$ applicetur systemati protonumeri $2d$, & fit fluens major, quin valor primæ perturbetur. Hoc bene statuto sic solvitur quæstio: fac $\frac{9}{9-5}\,2b = \frac{9}{5}(x-b) = x+b = \frac{c}{c-m}\,2d = \frac{c}{m}(x-d) = x+d$: in qua ultima determinandus est coefficiens $\frac{c}{c-m}$ sive ratio $m : c$, ut jubet æquatio. Quoniam vero $b$, $d$ sunt quantitates geometricæ datæ, sit $d = \frac{1}{4}b$,

&

& erit $\frac{9}{9-5}\, 2b = \frac{c}{c-m} \cdot 2d = \frac{c}{c-m} \cdot \frac{1}{4}\, 2b$: ergo $\frac{c}{c-m} = 4 \cdot \frac{9}{4}$ $= \frac{36}{4} = \frac{9}{9-8}$ coefficiens majoris fluentis : ac proinde $\frac{9}{9-5}\, 2b$ $= \frac{9}{9-8}\, 2d = \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{4}\, 2b = \frac{9}{4}\, 2b$. Ergo $\frac{c}{c-m} \cdot 2d = \frac{9}{9-8} \cdot 2d$

$$= \frac{9}{8}(x-d) = x+d = \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{9-8}\right) 2d + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{9-8}{9-8}\right)}_{1} 2d = x+b$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{9-5}{9-5}\right)}_{1}\right) 2b$$ : in hac $x = \frac{1}{2}\left(\frac{9+5}{9-5}\right) 2b$; in illa

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{9-8}\right) 2d$; ergo $x+b = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{4}\, 2b + \frac{1}{2}\, 2b = \frac{7}{2}\, b + b$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{1} \cdot 2d + \frac{1}{2} \cdot 2d = 17\, d + d$: ergo $\frac{9}{2}\, b = 18\, d = 18\, \frac{1}{4}\, b$ $= \frac{9}{2}\, b$. Ergo $x+b = x+d$ vera æquatio, & $x+b$ translata fuit a ſyſtemate SY protonumeri $2b$ ad ſyſtema SY protonumeri $2d$: quod erat faciendum, & quod unice ab hac methodo quæri utiliter poteſt.

§. 32. Ne tamen putes determinata prima fluente & ſyſtemate determinari ſemper poſſe & ſyſtema alterum & naturam ſuæ fluentis ad libitum: præter enim ea, quæ diximus §§. 27 & 28, ſi in hoc noſtro exemplo in æquatione $\frac{9}{9-5}\, 2b = \frac{c}{c-m} \cdot 2d$ ponatur $d = 4b$, erit $\frac{9}{4} \cdot 2b = \frac{c}{c-m} \cdot 2d$ $= \frac{c}{c-m} \cdot 4 \cdot 2b$, at $\frac{c}{c-m} = \frac{9}{16} = \frac{9}{9+7}$ vel $= \frac{9}{25-9}$, & $\frac{9}{5}(x-b)$ $= x+b = \frac{9}{7}(d-x) = d+x$ SA, vel $= \frac{9}{25}(x+d) = x-d$ SY.

Quod ſi fuiſſet $d = 5b$, eſſet $\frac{9}{4}\, 2b = \frac{c}{c-m}\, 2d = \frac{c}{c-m} \cdot 5 \cdot 2d$; & $\frac{c}{c-m}$ $= \frac{9}{20} = \frac{9}{9+11}$ vel $= \frac{9}{29-9}$ : ergo in hac ſuppoſitione $\frac{9}{5}(x-b)$

=.

$= x + b = \frac{9}{11}(d+x) = d - x$, vel $= \frac{9}{29}(x+d) = x - d$: in hoc tantum libertas est: at nullus ulterius arbitrio locus relinquitur. Quod si etiam sumpta indeterminata ratione $m : c$ non licet quodcumque volumus systema in formula $\frac{c}{m}(x-d)$ arbitrio eligere, quid dicendum de Analysi vulgari, quæ arbitrio determinatis rationibus $n : a$; $m : c$ in formulis $\frac{a}{n}(x-b)$, $\frac{c}{m}(x-d)$, eas deinde simul comparat, atque æquales supponit? Et sane sit $n : a :: 2 : 3$, $m : c :: 5 : 7$, erit $\frac{a}{n}(x-b) = \frac{3}{2}(x-b) = x + b = \frac{3}{3-2} \cdot 2b$; & $\frac{c}{m}(x-d) = \frac{7}{5}(x-d) = x + d = \frac{7}{7-5} \cdot 2d$: ergo si fiat $\frac{3}{2}(x-b) = \frac{7}{5}(x-d)$, erit $\frac{3}{3-2} \cdot 2b = x + b = \frac{7}{7-5} 2d = x + d$: quæ æquatio nullo modo vera esse potest cum arbitrio etiam relinquantur protonumeri $2b$, $2d$. Hæc itaque repugnantia nullo alio tolli potest modo, nisi cæteris determinatis ponatur protonumerus $2d$ indeterminatus, postea determinandus æquatione $\frac{3}{3-2} \cdot 2b = \frac{7}{7-5} \cdot 2d$, ex qua eruitur $2d = \frac{6}{7} \cdot 2b$; ut sit $\frac{3}{3-2} \cdot 2b = \frac{7}{7-5}\left(\frac{6}{7} 2b\right) = \frac{7}{7-5} \cdot 2d$, in quo casu erit $\frac{3}{2}(x-b) = x + b = \frac{7}{5}(x-d) = x + d$, sive $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3+2}{3-2}\right) 2b + \frac{1}{2}\left(\frac{3-2}{3-2}\right) 2b}{1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{7+5}{7-5}\right) 2d + \frac{1}{2}\left(\frac{7-5}{7-5}\right) 2d}{1}$ & $5b + b = 6d + d$, & $6b = 7d = 7 \; \frac{3}{7} 2b = 6b$.

§. 33. Hisce omnibus serio perpensis & æquiori lance, quæ vulgata Analysis, quæ mea Theoria in hac re docet, diligenter expensis, supervacaneum esset ad hæc jam evidentissime demonstrata aliquid ulterius addere: nisi præjudicata

cata

cata jam inde a primo hujusce Scientiæ exordio opinio omnium Analystarum animos ad doctrinam communem viribus omnibus tutandam obfirmasset. Ad hanc igitur si fieri potest evellendam, præter cætera quæ diximus, animadvertas velim quantum secum ipsa pugnet Analysis vulgata, dum quæ necessario e suis æquationibus universim receptis consequuntur, tamquam repugnantia & absurda incaute repudiat. Cum enim libenter & universim ad determinandas æquationes indeterminatas æquatione generali $\frac{a}{n}(x-b)=\frac{c}{m}(x-d)$ semper tamquam legitima utatur (quæ tamen quam caute adhibenda sit, & quibus legibus moderanda, ne decipiamur, superius ostendi); tamen æquationes, quæ ex illa immediate profluunt $x+b=x+d$ &c., ut ostendi, falsitatis damnat atque ejurat. Verum si hujusce repugnantiæ caussam diligenter investigare velimus, noverimus Analysim communem nullo certo consilio regulas quasdam, quas in arithemeticis veritati consonas experiundo comprobavit, tamquam Canones generales etiam in nova hac ad geometrica applicatione universim statuisse. Ita cum in æquationibus arithemeticis incognitam, quam symbolo $x$ vel $y$ &c. designat semper eamdem & identicam quantitatem, donec eodem symbolo exprimitur, significare intellexerit, id etiam universim in analyticis ad geometrica applicatis usuvenire arbitratur, atque eo magis fidenter, quod in æquationibus I.is & II.is §. 26. prospere succedere experta fuerit, quæ relationem inter fluentes homologas ejusdem systematis exhibent, in quibus tantum $x$ utrinque sumendæ sunt identicæ & æquales. Hoc igitur errore decepta, & cum veram æquationum $x+b=x+d$ &c. originem ignoraverit, quæ est ipsa $\frac{a}{n}(x-b)=\frac{c}{m}(x-d)$ æquatio, quam probat, & cum, positis $x$ utrinque identicis, ex istis sequatur $b=d$ &c, quod repugnat; æquationes hujusmodi tamquam falsas & absurdas rejiciendas judicavit. Tamen ex hac ipsa æquatione eruere potius potuisset $x$ utrinque tamquam identicam & æqualem assumi non posse nisi in casu $b=d$, sive ejusdem protonumeri: ac proinde in aliis casibus protonumeri in utroque membro diversi, $x$ unius membri multum differre valore, ac sæpius etiam natura a fluente $x$ alterius: si tamen quid sit & quotuplex systema, quid protonumerus, & quid æquatio $\frac{a}{n}(x-b)=\frac{c}{m}(x-d)$ significet, prius a mea Theoria didicisset.

§. 34. Hisce tamen omnibus & singulis ignoratis a proposita sibi æquatione $\frac{a}{n}(x-b)=\frac{c}{m}(x-d)$ nihil aliud quærere posse arbitrata est, nisi posita $x$ utrinque identica, & incognita ejus valorem regulis communibus investigare: quem cum invenerit $x=\frac{mba-ncd}{ma-nc}$ in sua inquisitione acquiescens, nihil

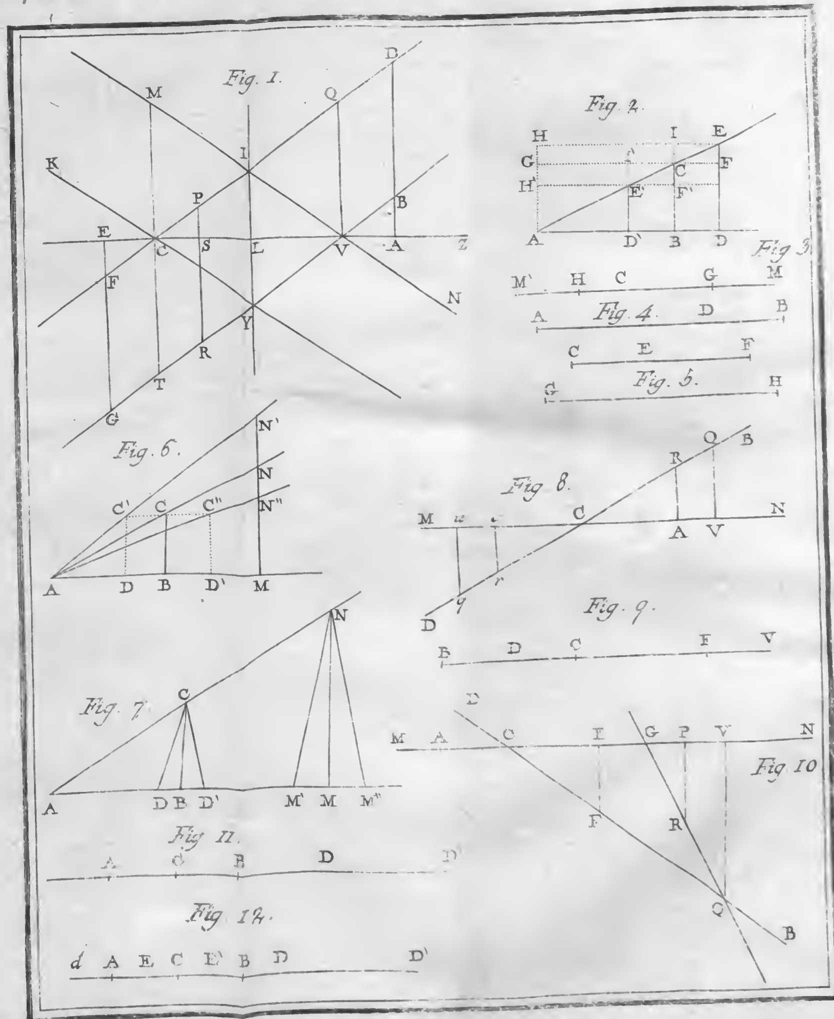
ultra quærendum esse putavit. Verum æquatione hac eo more, quo arithemeticæ simplices solvuntur, evoluta, præterquam quod coefficientes numerici $\frac{a}{n}$, $\frac{c}{m}$ cum lineis geometricis $b$, $d$ ita miscentur, ut inter se nullo modo amplius dignosci possint; ipsa $x$ nulli systemati ordinata, ac ad unum tantum valorem, quem quærit, determinata, fluentis naturam amittit, ac solum incognitæ nomen, quo passim vulgo donatur, obtinet. Verum quidem est, quod posita $y = \frac{a}{n}(x-b)$, & $y = \frac{c}{m}(x-d)$, æquationem propositam in duas indeterminatas æquationes Analysis communis dispertit, & ad duo diversa Triangula singillatim traducit æquationis $y = \frac{a}{n}(x-b) = \frac{a}{n}z$; $y = \frac{c}{m}(x-d) = \frac{c}{m}z$, in quarum singulis $y$, $z$ fluere videntur: sed cum hæ sint semper in ratione constanti $n : a$ in prima; $m : c$ in secunda, nec ulla alia lege invicem coerceantur, ab eodem originis puncto profectæ augeantur, decrescant, nullescant invicem in eadem ratione necesse est: quæ fluxionis ratio, qua pronumeri tantum variabiles efficiuntur, quantum differat a vera fluendi natura, qua necessario afficiuntur fluentes homologæ cujuscumque systematis §. 3. & seqq: hujus evidentissime arbitror me demonstrasse.

§. 35. Quare minime mirum videri debet, si nullo constituto prius systemate, nec ulla habita ratione ad naturam linearum geometricarum, quamcumque æquationem linearem huic $\frac{a}{n}(x-b) = \frac{c}{m}(x-d)$ similem, abstracte & numerice tantum sumptam, facta utrinque $x$ identica, semper legitime se solvere posse Analysis communis arbitrata fuerit; nec in eam repugnantiam incidisse, quam tamen a nobis in hac ad geometrica traducta æquatione necessario inesse superius §. 32. ostendimus, determinatis prius ad libitum rationibus $n : a$; $m : c$. De hac tamen repugnantia tunc demum conquesta fuit, cum a linearibus ad æquationes secundæ dimensionis solvendas accessit. Quam tamen, cum irritos fecisse quotquot fuerunt, quotquot sunt celebriorum Analystarum conatus re ipsa experta fuerit; in radicalibus tantum secundæ dimensionis imaginarii labe necessario infectis totius hujusce mali caussam inesse omnium consensu statuere tandem recte posse sibi visa est: non in primis linearibus jactis principiis, quæ omnium Analystarum anticipata opinio ab omni erroris suspicione immunia, certa, evidentia jam declaraverat. Ex hisce tamen primis male statutis notionibus, & ex male instituta æquationum

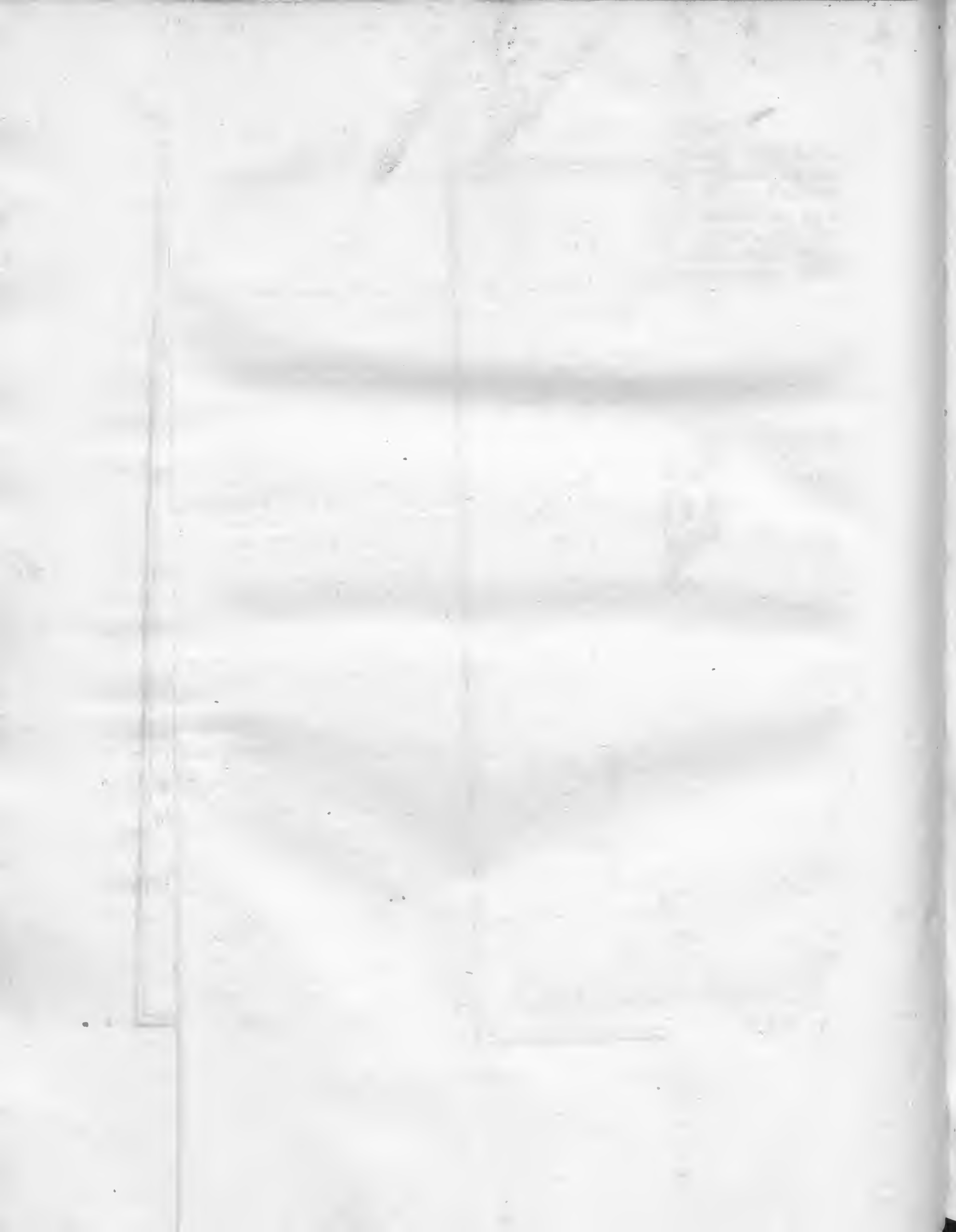
linearium ad geometriam applicatione quicquid mali in ſecundis, ac altioribus æquationibus irrepſit, tribuendum eſſe quiſque æquus rerum æſtimator ex his, quæ hactenus diximus, facile ominari poterit: quod in T. II. me demonſtraturum fidenter ſpondeo, præter ea quæ in ſolutione & in conſtructione æquationum ſecundæ dimenſionis in P. I. Lib. II. T. I. jam proſtant, quæ ſilentio potius obruere, quam aperte oppugnare præoccupata opinio ſatius duxit. Interim ad unam ex præcipuis hujuſce mali cauſſam detegendam atque tollendam nunc me converto.



CAPUT


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Æ.B. inc.



# CAPUT X.

*Vulgata methodo analytica inveniendi mediam proportionalem geometricam inter duas datas reprobata, legitima ſubſtituitur.*

§. 1. CAuſſa hæc in fine Capitis ſuperioris indicata, a qua imaginarium ſcatere diximus, caute latet in methodo univerſim ac unice vulgo uſurpata inveniendi mediam proportionalem inter duas datas ab ipſa Geometria (quis crederet!) deſumpta. Quemadmodum enim in Geometria inter duas datas ex: gr: AD, BD (Tab: V. *Fig*: 1.) earum media invenitur, ſi poſitis in directum lineis AD, BD deſcribatur circulus diametri AB, ex puncto D erecta DE, eſt illa media quæſita; ita in analyſi communi vocata $AD = a$, $BD = b$, & DE media incognita quæſita $= x$, & facta analogia $a : x :: x : b$, ex qua eruitur $x^2 = ab$, & $x = \sqrt{ab}$, hanc $\sqrt{ab}$ eſſe illam mediam analyticam quæſitam tam fidenter univerſim aſſeritur, ut mitteretur antyciram eo modo, quo quis geometricam mediam DE negaret, quiſquis ab hac univerſim recepta opinione diſſentiret. Verum pace hujuſce præoccupatæ atque univerſalis opinionis, primus audeo publice pronunciare ſolutionem analyticam hujuſce Problematis inveniendi mediam inter duas datas tam longe a geometrica ſolutione diſtare, quam longe a veritate error diſtat. Nam in ſuperiori geometrica conſtructione BD, AD ſimul ſumptæ totam diametrum AB conſtantem conſtituunt, cujus circulus AEB inſervit illis omnibus mediis, hoc eſt infinitis, quæ ſunt mediæ inter infinitas illas homologas diviſiones, quas ſubire poteſt eadem ac conſtans AB: ac proinde circulus hic eſt Locus geometricus omnium mediarum geometricarum DE inter BD, AD fluentes, quæ tamen ſimul ſumptæ eamdem diametrum AB conſtituunt. At in methodo communi analytica, in qua $a$ & $b$ ſingillatim conſtantes & datæ ponuntur, quoties valor aut alterutrius, aut ambarum $a$ & $b$ mutatur, mutatur etiam earum ſumma $a + b$, ac proinde & diameter AB, & Circulus, fluentibus punctis A, B, fixo manente D. Hinc nullo modo hac methodo inveniri poſſunt illæ mediæ, quæ in eodem circulo neceſſario exiſtunt, præter illam, quæ ex uno aſſumpto valore ipſius $a$ & $b$ conſequitur. Cui malo nullum aliud remedium adhiberi poteſt, niſi quod mea Theoria opportune exhibet, ut nempe ita conformetur earum ſingularum formula, ut ſingulæ fluentes ſint, at earum ſumma vel differentia conſtans perſeveret.

§. 2. Hoc vero obtineri poſſe docuimus ſi utraque $a$ & $b$ (quæ licet ſint valoris cogniti, naturam ſemper fluentium retinent) ad aliquem communem pro-

tonumerum ex: gr: $f$ referatur, & fiat $a = \frac{n}{n+m} \cdot f =$ A D fluens minor, & $b = \frac{m}{m+n} \cdot f =$ B D fluens major: earum tamen summa $a + b = \frac{n}{n+m} f + \frac{m}{m+n} f = f =$ A B perpetuo intacta servatur, ob quam idem circulus infinitimode singularum fluentium valoribus hac lege mutatis persevverat. Itaque in proposita analogia $a : x :: x : b$ tam $a$ & $b$ quam $x$ natura fluentes sunt, sed primæ cognitæ, & $x$ incognita, quæ quæritur. Quod si D hinc vel inde extra puncta fixa A, B vagetur puta in D', tunc erit A D' fluens major systematis S Y $= \frac{m}{m-n} \cdot f$; B D' minor $= \frac{n}{m-n} \cdot f$, & earum differentia constans, in quo casu media geometrica inter duas fluentes homologas A D', B D' est ordinata D' E' ad hyperbolam, ut ostendimus Lib: II. P. I. Qui tamen ultimus hic Locus geometricus in solutione hujusce Problematis vulgo nunquam adhibetur, quia semper duæ extremæ ad libitum sumptæ ad systema S A aliquo modo referuntur, cum in directum positæ simul uniantur: ignorata vero ea, quam requirit systema, legitima forma, qua afficiendæ sunt formulæ fluentium $a$ & $b$ valoris cogniti, nullo modo a methodo communi analytice solvitur propositum sibi problema *inveniendi inter duas datas mediam geometricam*. Nam antequam media hæc inter duas analytice inveniri possit, primum statuenda est natura & species systematis, sub quo illæ duæ lineares datæ continentur, ut inde ad earum mediam investigandam rite accedamus. Porro cum ex nostra Theoria natura systematis pendeat a varia coefficientium forma; species vero a diverso protonumero, cui coefficiens abstractus fluens applicatur; nisi hæc omnia & singula, quæ ab una nostra Theoria docentur, bene noveris, & apte pro diversa circumstantiarum varietate sciveris adhibere, irritus erit quicumque labor in concinnandis formulis analyticis, quæ legitimam constructionem exhibeant, aut constructioni jam peractæ rite respondeant.

§. 3. Hisce probe intellectis ut hujusmodi sequentes analogiæ $a : b :: c : d$; & $a : b :: b : d$; quarum prima quatuor lineas geometrice proportionales continet, & dicitur discreta; secunda tribus lineis geometrice proportionalibus constat, & dicitur continua, recte tractentur, sunt prius ad aliquod systema reducendæ. Ut hoc fiat, protonumerus aliquis, puta $f$, in primis eligendus est, ad quem singulæ traducantur. Hæ vel omnes sunt incognitæ, vel omnes cognitæ, vel partim cognitæ, incognitæ partim. In primo casu sit $a = \frac{f}{n}$;

$b=\frac{f}{m}$; $c=\frac{f}{h}$, & $n$, $m$, $h$ incognitæ. Facta ſubſtitutione prima analogia convertitur in ſequentem $\frac{f}{n}:\frac{f}{m}::\frac{f}{h}:\frac{nf}{mh}$, ſive $m:n::m:n$; & ſecunda in ſequentem $\frac{f}{n}:\frac{f}{m}::\frac{f}{m}:\frac{nf}{mm}$, ſive $m:n::m:n$, quæ eſt eadem ac prima: ex quo conſtat tam in prima, quam in ſecunda analogia fluentes in utraque ratione eſſe inter ſe ut $m:n$, quæcumque ſit ratio hæc $m:n$. Hoc poſito inveniendæ ſunt fluentes eà forma præditæ, quam requirit ſyſtema, ad quod eas referre velis, quæ ſint in ea ratione $m:n$. Si eligatur ſyſtema S A, quod ſummam fluentium neceſſario exigit, fac ( ut docuimus ) $\frac{m}{m+n}\cdot f:\frac{n}{n+m}\cdot f::\frac{m}{m+n}\cdot f:\frac{n}{n+m}\cdot f$: contra vero ſi ad ſyſtema S Y referantur, in quo fluentium differentia conſtans eſſe debet, invenies fluentes $\frac{m}{m-n}f:\frac{n}{m-n}f::\frac{m}{m-n}f:\frac{n}{m-n}f$. Ex quibus conſtat donec in utraque ratione idem natura & ſpecie ſyſtema eligitur ſemper rationem primam eſſe identicam cum ſecunda, atque ex utraque eaſdem numero fluentes derivare. Quod quidem per ſe patet, dummodo advertas in eodem ſyſtemate S A, vel S Y non niſi duas tantum homologas fluentes ex infinitis ( puta A D, B D in S A, A D′, B D′ in S Y ) (*Fig.* 2.) eamdem rationem $m:n$ inter ſe habere poſſe: hinc primus terminus eſt idem ac tertius; & ſecundus idem ac quartus. Triplici tamen modo ratio prima a ſecunda differre poteſt: primo ſi retenta in utraque ratione eadem ſyſtematis natura, mutetur protonumerus, & analogia ſit $\frac{m}{m+n}\cdot f:\frac{n}{n+m}\cdot f::\frac{m}{m+n}\cdot g:\frac{n}{n+m}\cdot g$: in quo caſu ratio prima continet fluentes homologas ſyſtematis S A protonumeri $f$; ſecunda fluentes homologas ſyſtematis S A, ſed protonumeri $g$. Secundo modo quando retento utrinque eodem protonumero $f$, mutatur natura ſyſtematis, & habetur $\frac{m}{m+n}\cdot f:\frac{n}{n+m}\cdot f::\frac{m}{m-n}\cdot f:\frac{n}{m-n}\cdot f$: in qua termini primæ rationis ſunt fluentes homologæ S A protonumeri $f$: termini ſecundæ ſunt fluentes homologæ S Y ejuſdem protonumeri $f$. Tertio tandem quando mutatur & natura & ſpecies ſyſtematis, ſitque $\frac{m}{m+n}\cdot f:\frac{n}{n+m}\cdot f::\frac{m}{m-n}\cdot g:\frac{n}{m-n}\cdot g$. In ſingulis hiſce caſibus fluentes unius rationis ſunt diverſæ a fluentibus alterius, & pertinent ad di-

diversum systema: sed tamen tam fluentes primæ rationis in suo proprio systemate, quam secundæ in suo eamdem inter se rationem $m : n$ habent. Hæc doctrina, quam fluentibus $a$, $b$, $c$, $d$ omnino ignotis applicavimus, æque bene convenit cæteris casibus initio hujusce §. indicatis: hac differentia, quod si ponantur lineæ geometricæ omnes notæ, tam $m$, quam $n$ erit cognita: si partim cognitæ, partim incognitæ, alterutra nota erit, alterutra incognita: quo fit ut in istis ultimis arbitrium, tam in systemate quam in valore ignotis tribuendo, intra certas leges coerceatur: quod exempli appositione facilius demonstrabitur.

§. 4. Sit igitur proposita analogia $a : b :: c : d$, in qua singulæ lineæ cognitæ intelligantur: sit $a = AB$; $b = CD$, & sumpta $FG = f$ (*Fig.* 3.) tertia linea ad libitum, ad quam sunt singulæ referendæ: sitque $AB = a = \frac{f}{2}$; $CD = b = \frac{1}{3} \cdot f$; & $c = \frac{f}{5}$. Facta substitutione erit $\frac{1}{2} \cdot f : \frac{1}{3} \cdot f :: \frac{1}{5} \cdot f : \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot f$, sive $3 : 2 :: 3 : 2$, eadem ratio bis repetita, qua se se respiciunt fluentes homologæ, quæ si ad idem numero systema referantur, fiunt, ut diximus, identicæ, & $c$ fit $a$; $b$ est $d$: idque æque continget in analogia $a : b :: b : d$. Reducatur primum hæc analogia ad S A sine dispendio valoris noti utriusque fluentis $a$, $b$: quod ut consequamur sit oportet $a + b = \frac{1}{2} f + \frac{1}{3} f = \frac{5}{6} f$: atque $\frac{5}{6} f$ erit protonumerus necessarius in hac suppositione. Abscissa igitur ab $FG$ (*Fig.* 3.ª) $FH = \frac{5}{6} \cdot f$ & collocata in (*Fig.* 4.), hæc erit protonumerus, ad quem reducendæ sunt tam $a$, quam $b$. Cum vero fluentes homologæ in hoc systemate sint $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{5}{6} f$; $\frac{n}{n+m} \cdot \frac{5}{6} f$; & debeat esse $a = \frac{1}{2} f = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{5}{6} f$; $b = \frac{1}{3} f = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{5}{6} f$, invenies ex prima $\frac{m}{m+n} = \frac{3}{5} = \frac{3}{3+2}$; ex secunda $\frac{n}{n+m} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2+3}$: & fluens major $a = \frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6} f$; fluens minor $b = \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6} f$. Divisa igitur (*Fig.* 4.) $FH$ in partes quinque, & sumpta

FD.

FD $= \frac{3}{5}$ FH $= a$, erit HD $= \frac{2}{5}$ HF $= b$; ac tandem $a$ & $b$ fluentes notæ ad propositum systema traductæ, cujus legibus jam declaratis subigantur oportet; & analogia $\frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6}f : \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6}f :: \frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6}f : \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6}f$, cujus rationes cum sint identicæ, non nisi unum systema SA constituunt, & fluentes M : N :: $\frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6}f : \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6}f$ :: FD : HD. Quod si ad systema SY reducendæ sint fluentes $a$ & $b$, fac $a - b = \frac{1}{2}f - \frac{1}{3}f = \frac{1}{6}f$, qui erit protonumerus; & quoniam $\frac{m}{m-n} \cdot \frac{1}{6}f = a = \frac{1}{2}f$, erit $\frac{m}{m-n} = \frac{3}{1} = \frac{3}{3-2}$; & $\frac{n}{m-n} \cdot \frac{1}{6}f = b = \frac{1}{3}f$, erit $\frac{n}{m-n} = \frac{2}{1} = \frac{2}{3-2}$; & M : N :: $\frac{3}{3-2} \cdot \frac{1}{6}f : \frac{2}{3-2} \cdot \frac{1}{6}f$: sumpta igitur in eadem (*Fig.* 4.) FL $= \frac{1}{6}f$, hæc erit protonumerus SY, & M = FD major $= \frac{3}{3-2} \cdot \frac{1}{6}f$ æqualis fluenti majori SA $\frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6}f$; N = LD $= \frac{2}{3-2} \cdot \frac{1}{6}f$ æqualis fluenti minori SA $\frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6}f$ = HD: atque ideo analogia superior erit

$$\text{M : N ::} \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6}f : \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6}f :: \frac{3}{3-2} \cdot \frac{1}{6}f : \frac{2}{3-2} \cdot \frac{1}{6}f \\ \text{FD : HD :: FD : LD} \end{array} \right\}.$$

Hac ratione fluentes M, N in hoc casu in utroque systemate sunt valore æquales, sunt in eadem ratione, sed tamen natura, forma, ac proprietatibus prorsus diversæ, ut jam satis superius demonstravimus.

§. 5. Quod si in analogia superiori, in qua protonumerus mutari ad libitum po-

poteſt, utpote ſingulis terminis communis fiat $M : N :: \frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6} f : \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6} f :: \frac{3}{3+2} \cdot g : \frac{2}{2+3} \cdot g$, termini ſecundæ rationis erunt fluentes ſyſtematis S A, ſed protonumeri $g =$ P Q ( *Fig.* 5 ) in eadem ratione $3 : 2$, in qua ſunt fluentes alterius ſyſtematis S A protonumeri $\frac{5}{6} f$ $=$ F H. Quod ſi poſito $g = \frac{1}{7} f$ velimus $\frac{3}{3+2} g = \frac{3}{3+2} \frac{1}{7} f$ $= \frac{3}{3+2} \frac{5}{6} f = \frac{1}{2} f$, tunc neceſſario coefficiens $\frac{3}{3+2}$ fluens mutàtur, ac facto $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{7} f = \frac{1}{2} f$, erit $\frac{m}{m+n} = \frac{7}{2} = \frac{7}{7-5}$ coefficiens S Y, eritque $\frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{6} f$ S A $= \frac{7}{7-5} \cdot \frac{1}{7} f$ S Y : & $\frac{n}{m-n} \cdot g$ $= \frac{n}{m-n} \cdot \frac{1}{7} f = \frac{1}{3} f$; $\frac{n}{m-n} = \frac{7}{3}$; & $\frac{n}{m-n} \frac{1}{7} f = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} f$ $= \frac{7}{7-4} \cdot \frac{1}{7} f$ S Y, $= \frac{2}{2+3} \cdot \frac{5}{6} f$ S A. Hoc tamen pacto erunt quidem $\frac{7}{7-5} \cdot \frac{1}{7} f$, $\frac{7}{7-4} \cdot \frac{1}{7} f$ termini ſecundæ rationis æquales terminis reſpective rationis primæ; ſed non conſtituunt fluentes homologas S Y, cum $\frac{7}{7-5} \cdot \frac{1}{7} f$ ſit fluens major S Y, cui reſpondet ſua homologa minor $\frac{5}{7-5} \cdot \frac{1}{7} f$; & $\frac{7}{7-4} \cdot \frac{1}{7} f$ ſit item fluens major ejuſdem ſyſtematis, quæ habet ſuam homologam minorem $\frac{4}{7-4} \cdot \frac{1}{7} f$, atque ideo nequeunt inter ſe conſociari, nec integrum ſyſtema repræſentare. Ut id vero etiam conſequamur fac $\frac{7}{2} \frac{f}{7} - \frac{7}{3} \frac{f}{7} = \frac{1}{6} f$ qui protonumerus conſtituatur: & termi-

mini ſecundæ rationis dabunt fluentes homologas S Y, quas in fine § ſuperioris invenimus. Univerſim ſi in prima analogiæ ratione habeantur fluentes homologæ alterutrius ſyſtematis, & velimus fluentes alterius rationis, diverſo protonumero affectas, homologas inter ſe & æquales fluentibus primæ rationis, ſi quæ ſunt in prima ratione, pertinent ad S A, erunt ad S Y fluentes ſecundæ rationis, & viceverſa: fieri enim nunquam poteſt, ut in eadem ſyſtematis natura inveniantur in una ratione duæ fluentes homologæ, quæ ſint æquales fluentibus homologis alterius rationis, quæ ſint ad ſyſtema ejuſdem naturæ, ſed ſpecie diverſi, ut quiſque facile ex dictis intelligit. Hæc tamen æqualitas facile obtinetur inter fluentes ſyſtematum diverſæ naturæ: quinimmo ſemper a fluentibus ſyſtematis S A tranſitus fieri poteſt ad fluentes æquales homologas S Y; & viceverſa a fluentibus homologis S Y ad æquales homologas ſyſtematis S A.

§. 6. Sint ex: gr: duæ fluentes homologæ S Y $M = \frac{7}{7-5} \cdot f$; $N = \frac{5}{7-5} \cdot f$, quæ eodem retento valore transferri debeant ad S A; fiat $\left(\frac{7}{7-5} + \frac{5}{7-5}\right) f = 6\, f$; & hoc ſumpto protonumero, fiat $\frac{m}{m+n} \cdot 6f = \frac{7}{2} f$, & $\frac{m}{m+n} = \frac{7}{2.6} = \frac{7}{7+5}$; & facto $\frac{n}{n+m}\ 6\, f = \frac{5}{7-5} f$, $\frac{n}{n+m} = \frac{5}{5+7}$ : ac proinde M : N : : $\frac{7}{7-5} \cdot f : \frac{5}{7-5} \cdot f : : \frac{7}{7+5} .6\, f : \frac{5}{5+7} , 6f$. Contra vero poſita $M = \frac{8}{8+7} \cdot f$; $N = \frac{7}{7+8} \cdot f$ ad S A, fiat $\frac{8}{8+7} \cdot f - \frac{7}{7+8} \cdot f = \frac{1}{15} f$ protonumero, & facto $\frac{m}{m-n} \cdot \frac{1}{15}\ f = \frac{8}{15} f$, erit $\frac{m}{m-n} = \frac{8}{1} = \frac{8}{8-7}$ : & facto $\frac{n}{m-n} \cdot \frac{1}{15}\ f = \frac{7}{15} f$, erit $\frac{n}{m-n} = \frac{7}{1} = \frac{7}{8-7}$. Ergo M : N : : $\frac{8}{8+7} f : \frac{7}{7+8} f : : \frac{8}{8-7} \cdot \frac{1}{15}\ f : \frac{7}{8-7} \cdot \frac{1}{15}\ f$. In praxi poſita analogia ex: gr: $\frac{7}{7+3}\ f : \frac{3}{3+7}\ f : : \frac{7}{7-3}\ f : \frac{3}{7-3} f$ ita diſponatur $7 \cdot \frac{1}{10} f : 3 \cdot \frac{1}{10} f$

$:: 7 \cdot \frac{1}{4} f \;:\; 3 \cdot \frac{1}{4} f$ : in prima ratione protonumerus $\frac{1}{10} f$; in secunda $\frac{1}{4} f$ : dividatur uterque terminus primæ per $7 - 3$; & secundæ per $7 + 3$, & sumpta $AG = \frac{f}{10}$ (*Fig. 6.*) erit

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{7}{7-3} \cdot \frac{1}{10} f : \frac{3}{7-3} \cdot \frac{1}{10} f :: \frac{7}{7+3} \cdot \frac{1}{4} f : \frac{3}{3+7} \cdot \frac{1}{4} f \\ AD \;:\; GD\,SY \;::\; AD \;:\; BD\,SA \end{array}\right\}$$

Universim si habeatur analogia $\frac{m}{m+n} f : \frac{n}{n+m} f :: \frac{m}{m-n} f : \frac{n}{m-n} f$, fac $\frac{m}{m-n} \cdot \frac{f}{m+n} : \frac{n}{m-n} \cdot \frac{f}{m+n} :: \frac{m}{m+n} \cdot \frac{f}{m-n} : \frac{n}{n+m} \cdot \frac{f}{m-n}$. Hoc artificio termini primi harum rationum æquantur inter se, & similiter secundi: sed prima ratio, quæ dabat fluentes homologas systematis SA, nunc exhibet fluentes homologas SY; & fluentes homologæ SY, quæ erant in secunda, convertuntur in fluentes homologas SA: hac differentia, quod in hac ultima analogia fluentes majores utriusque systematis æquantur inter se, & item minores; quia coefficientes sunt in ratione reciproca protonumerorum: quando in prima assumpta analogia fluentes primæ rationis differunt natura & valore a fluentibus secundæ rationis.

§. 7. Quamobrem ex demonstratis illud observatu necessarium consequitur, quod proposita analogia quatuor vel tribus lineis geometrice proportionalibus conflata, puta $a : b :: c : d$; vel $a : b :: b : d$, quæ fluentes ut vidimus repræsentant, si singulæ ad communem protonumerum $f$ referantur, utraque analogia (ut ostendi) in sequentem identicam rationem $m : n$ convertitur, qua docemur cujuscumque naturæ sint fluentes, tamen binæ homologæ semper in eadem ratione $m : n$ se se respicere. Itaque si utraque ratio $m : n :: m : n$ lege unius tantum systematis ad fluentes significandas compleatur, puta $\frac{m}{m+n} f : \frac{n}{n+m} f :: \frac{m}{m+n} f : \frac{n}{n+m} f$, habentur in utraque eædem numero fluentes bis repetitæ, & analogia $a : b :: c : d$, vel $a : b :: b : d$, ad duas tantum fluentes identicas in ratione $m : n$ significandas reducitur. Nec hujusmodi analogiæ quatuor fluen-

fluentes continere poterunt, nec duas æquales quidem ſed diverſas rationes conſtituere, niſi aut mutetur protonumerus, aut ſyſtema, aut utrumque, ut ſit

$$M : N :: \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{m+n} . f : \frac{n}{n+m} . f :: \frac{m}{m-n} . f : \frac{n}{m-n} . f \\ \frac{m}{m+n} . f : \frac{n}{n+m} . f :: \frac{m}{m+n} . g : \frac{n}{n+m} . g \\ \frac{m}{m+n} . f : \frac{n}{n+m} . f :: \frac{m}{m-n} . g : \frac{n}{m-n} . g \\ \frac{m}{m-n} . \frac{f}{m+n} : \frac{n}{m-n} . \frac{f}{m+n} :: \frac{m}{m+n} . \frac{f}{m-n} : \frac{n}{n+m} . \frac{f}{m-n} \end{array} \right\} :: m : n$$

In iſtis tantum caſibus analogia duabus æqualibus ac diverſis rationibus conſtans quatuor lineas geometricas diverſas complectitur, & vere nomen & naturam analogiæ deſumit, in qua termini unius rationis poſſunt eſſe ſinguli valore diverſi a terminis ſecundæ rationis (ut in tribus primis ſuperioribus analogiis contingit) vel etiam reſpective æquales ut analogia quarta oſtendit. In ſingulis tamen iſtis caſibus fluentes unius rationis nequeunt conſociari cum fluentibus alterius rationis, cum fluentes primæ rationis ad unum, fluentes ſecundæ rationis ad alterum ſyſtema ſpecie tantum, vel tantum natura, vel utroque modo diverſum pertineant; nec aliud inter ſe commune habeant, niſi rationem eamdem, qua invicem in ſuo proprio ſyſtemate homologæ ſe ſe reſpiciunt. Quare hujuſmodi fluentes quoad formam ac naturam, atque ideo quoad ſyſtema invicem diſſociatæ, re & facto invicem disjungendæ ſunt, & M, N ſeorſim æquandæ, ac binæ illæ homologæ ſumendæ, cæteris rejectis, quas diverſæ circumſtantiæ ſumendas jubent.

§. 8. Illud etiam præcipuum ex dictis conſequitur, methodum communem inveniendi mediam geometricam inter duas datas ex ignoratione harum veritatum, quas modo oſtendimus, penitus deficere, nec finem, quem ſibi propoſuit, ullo modo attingere poſſe. Nam cum ex dictis fluentes, inter quas invenienda eſt media, homologæ eſſe debeant, ut quæ ſunt ejuſdem naturæ legitime conſocientur, earumque media rite inveniatur; poſita, ut moris eſt, analogia $a : x :: x : b$, ſi hujuſce ſinguli termini ad idem ſyſtema (ut ſupra) reducantur, poſita $a = \frac{1}{5} f$, $b = \frac{1}{7} f$, & $x = \frac{1}{m} f$ ($m$ ignota ut eſt ipſa $x$); ſubſtitutione facta erit analogia $m : 5 :: 7 : m$; ſive $7 : m :: 7 : m$;

 vel

vel $m : 5 :: m : 5$ ( cum ſit $m = \frac{5 \cdot 7}{m}$ ) ideoque ſi, ut ſupra, ad utrumque ſyſtema reducatur hæc ratio identica bis repetita dabit $\frac{7}{7+m} \cdot f : \frac{m}{m+7} \cdot f :: \frac{7}{7-m} \cdot f : \frac{m}{7-m} \cdot f$ ſi $7 > m$, vel $:: \frac{7}{m-7} f : \frac{m}{m-7} f$ ſi $7 < m$. Verum in hoc caſu & ſingula fluens ignota eſt ob $m$ ſingulis fluentibus communem contra hypotheſim; & nulla media reperitur, quæ quæritur: cum in prima ratione contineantur fluentes homologæ ſyſtematis S A, in ſecunda homologæ S Y, inter quas remanet invenienda media, quæ quæritur. Ponendum igitur eſt $a$ & $b$ eſſe fluentes homologas jam ſeorſim ad alterutrum ſyſtema præparatas: in qua re illud primum obſervandum eſt, nihil referre utrum $a$ & $b$ ſint fluentes datæ, vel ignotæ: illud tantum omnino eſt neceſſarium, ut $a$ & $b$ ſint fluentes homologæ jam ſua forma ad alterutrum ſyſtema determinatæ, ut media geometrica ipſi reſpondens rite inveniri poſſit, quæ & ipſa erit ignota, ſi fluentes ignotæ ſumantur; erit data, ſi fluentes dati valoris proponantur. Quare Problema vulgatum ſic eſt reformandum: *Invenire analytice mediam geometricam inter duas fluentes homologas alterutrius ſyſtematis*: hæc conditio ita eſt neceſſaria, ut hac deficiente Problema propoſitum nullo modo ſolvi poſſit. Hinc cum Analyſis vulgata conditionem hanc ſemper poſthabuerit, vere dicendum eſt Problema hoc hactenus impervium illi fuiſſe: quod clare evincitur ex eo, quod illi neceſſariæ conditioni illam ſubrogaverit, quæ lineas datas requirit, qua ſine mediam geometricam inter duas variabiles $x$, $y$ haberi non poſſe ita pro certo habuit, ut ne tentare quidem umquam auſa fuerit.

§. 9. Experiamur tamen quid noſtra poſſit Theoria: ſumpta $a = \frac{m}{m+n} \cdot f$, $b = \frac{n}{n+m} \cdot f$ ( fluentibus ignotis ſyſtematis S A ) inſtituatur, ut vulgo fit, analogia $\frac{m}{m+n} \cdot f : x :: x : \frac{n}{n+m} \cdot f$, ſitque $x$ illa media geometrica, quam inter duas fluentes homologas quaſcumque ſyſtematis S A volumus invenire. Ex natura proportionis geometricæ erit $x^2 = \frac{m}{m+n} f \cdot \frac{n}{n+m} f = AD \cdot BD$ (*Fig.* 7) $= M \cdot N$ ( cum ſit, poſito protonumero $AB = f$, major fluens $= AD = \frac{m}{m+n} \cdot f$; minor $= BD = \frac{n}{n+m} \cdot f$ ); qua docemur ( ſi bene intelli-

telligatur) rectangulum AD.BD transformandum esse in quadratum sine sui valoris dispendio: sive utramque fluentem in eam novam formam transmutandam, ut ex earum producto oriatur verum quadratum æquale ipsarum rectangulo. Donec enim productum hoc naturam tantum rectanguli retinet, extractio radicis huic rectangulo applicata, ut vulgo fit, vere repugnat: quod enim a producto duorum tantum factorum oritur, frustra ac perperam ad lineare ope extractionis radicis deprimere quivis tentabit: & contra quod purum quadratum est, male in duos factores dividi posse quivis præsumpserit. Labor igitur omnis atque industria in eo primum collocanda est, ut quod naturam tantum rectangularem induit, opportunis artificiis in naturam quadraticam convertatur, si rite extractionem radicis solis puris quadratis propriam adhibere velimus. Et contra si purum quadratum in duos factores legitime dispertiri volumus, ita est hoc in primis transformandum, ut in duos factores æque recte dissolvi possit. Quare in hoc negotio formula pura tam rectangularis, quam quadratica ita erit prius conformanda, ut uno eodemque tempore & naturam quadraticam, & rectangularem possit referre, ut promiscue ad linearem deprimi possit alterutro modo, quem alterutra natura requirit: cui si applicatur extractio radicis, formula quadratica censenda erit, & ejus linearis vera radix, sive media, quæ quæritur: contra vero si in duos factores dividatur, rectangularis erit judicanda, & singuli factores erunt fluentes illæ, quarum media est radix inventa. Hæc tamen in hac re tam necessario præmittenda cum ignoraverit, atque perfunctorie & nullo consilio omnia agendo neglexerit prorsus Analysis communis, ad solutionem hujusce Problematis (quod est basis aliarum operationum in hac & altioribus dimensionibus) quam quærit & obtinere potest, aditum sibi penitus intercludit, & in ambages nunquam extricandas in progressu operis se ultro incaute conjicit.

§. 10. Hac præmissa necessaria doctrina revocemus æquationem $x^2 = MN = \frac{m}{m+n} f \cdot \frac{n}{n+m} f = AD.BD$ (*Fig.* 8.), in qua ut fluentium rectangulum in quadratum convertatur, fiat $M = \frac{m}{m+n} \cdot f$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}{1} f = AC + CD, \ \& \ N = \frac{n}{n+m} \cdot f$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)}{1} f = BC - CD \text{ ex demonstratis Cap: IV;}$$

qua facta formularum fluentium transmutatione oritur rectangulum MN =

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{4}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \right)}_{1^2} f^2 = \underbrace{\left( \left(\frac{m+n}{m+n}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \right)}_{1^2} \frac{f^2}{4} = x^2$$

æquale differentiæ quadratorum Circuli diametri $\frac{f}{2}$, & chordæ $\left(\frac{m-n}{m+n}\right) \frac{f}{2}$, æquale scilicet $x^2$ quadrato mediæ quæsitæ, sive æquale quadrato alterius chordæ homologæ in eodem circulo. Hoc modo igitur transformatis formulis fluentium, & earum rectangulo in quadratum translato, licet ope extractionis radicis invenire mediam quæsitam, quæ erit chorda homologa, cujus quadratum superius invenimus. Constructio vero ita peragitur: ex puncto D erigatur indefinita normalis DE, & radio CB descripto circulo BEA, qui in puncto E normalem secabit, ducatur radius CE, & per puncta C, D, E, descripto circulo CDE diametri CE æqualis radio CB alterius circuli, erit $DE = x$ chorda quæsita, cujus quadratum $(DE)^2 = x^2 = (CE)^2 - (CD)^2 = \underbrace{\left( \left(\frac{m+n}{m+n}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \right)}_{1^2} \frac{f^2}{4}$. Contra vero si hoc quadrato mediæ supposito, rectangulum huic æquale invenire velimus, ac fluentes sive factores, ex quorum producto oritur, investigare, fiat $x^2 = (DE)^2 = (CE)^2 - (CD)^2$

$$= \underbrace{\left( \left(\frac{m+n}{m+n}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \right)}_{1^2} \frac{f^2}{4} = \underbrace{\left( \frac{1}{4}\left(\frac{m+n}{m+n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \right)}_{1^2} f^2$$

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) \right)}_{1} f \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) \right)}_{1} f$$

$= \frac{m}{m+n} f \cdot \frac{n}{n+m} f = AD \cdot BD$; & AD, BD erunt fluentes quæsitæ, quarum summa constans æqualis circulo diametri $f$ duplæ diametro circuli chordarum, & chorda $DE = x$ mediæ transit in ordinatam circuli AEB. Hæc est solutio generalis Problematis inveniendi mediam geometricam inter duas fluentes quascumque homologas systematis SA, ac ejus inversi: in qua tam fluentes, quam ipsa media fluens sunt omnino ignotæ, quæ vulgo dicuntur variabiles.

§. 11. Nunc ut exemplo aliquo theoriam hanc illustremus, sumamus duas fluentes homologas hujusce systematis SA datas, sitque $M = \frac{5}{5+3} \cdot f$; N

=

$= \frac{3}{3+5} \cdot f$, quarum media proponitur invenienda. Ex doctrina superiori

erit $M . N = \frac{5}{5+3} f \cdot \frac{3}{3+5} f = \underbrace{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{5+3}{5+3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5-3}{5+3}\right) \right)}_{1} f \cdot$

$\underbrace{\left( \frac{1}{2}\left(\frac{3+5}{3+5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5-3}{5+3}\right) \right)}_{1} f = \underbrace{\left( \left(\frac{5+3}{5+3}\right)^2 - \left(\frac{5-3}{5+3}\right)^2 \right)}_{1^2} \frac{f}{4}$

$= \left(\frac{64}{64} - \frac{4}{64}\right) \frac{f^2}{4} = \frac{60}{64} \cdot \frac{f^2}{4} = x^2 = (DE)^2$: & $x = DE = \frac{\sqrt{60}}{8} \cdot \frac{f}{2}$
$= \frac{\sqrt{60}}{16} \cdot f = \frac{\sqrt{60}}{16}$ AB. Contra vero data $DE = \frac{\sqrt{60}}{16} \cdot f$, fiat $(DE)^2$
$= x^2 = \frac{60}{64} \cdot \frac{f^2}{4} = (CE)^2 - (CD)^2$; ergo $(CD)^2 = (CE)^2$
$- \frac{60}{64} \cdot \frac{f^2}{4} = \left(\frac{64}{64} - \frac{60}{64}\right) \frac{f^2}{4} = \frac{4}{64} \cdot \frac{f^2}{4}$, & $CD = \frac{2}{8} \cdot \frac{f}{2}$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot AB$, quæ ex demonstratis debet esse semidifferentia fluentium homologarum, quæ quæruntur, sive (ut ostendimus supra)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot f = \frac{1}{2} \left[ \frac{\left(\frac{8+2}{2}\right) - \left(\frac{8-2}{2}\right)}{\left(\frac{8+2}{2}\right) + \left(\frac{8-2}{2}\right)} \right] f = \frac{1}{2} \left(\frac{5-3}{5+3}\right) f;$$

& fluentes quæsitæ erunt, fluens major $M = \frac{5}{5+3} f = AD$, minor homologa $N = \frac{3}{3+5} f = BD$. Et hoc modo tam directum, quam inversum Problema supra indicatum universim, & etiam in casibus peculiaribus semper solutum habebis intra tamen limites systematis S A.

§. 12. Alia namque ratione nosmet geramus oportet si fluentes, quarum media geometrica invenienda proponitur, sint homologæ S Y (*Fig. 9.*). In hoc enim casu sumptis generalibus fluentibus $M = \frac{m}{m-n} f$; $N = \frac{n}{m-n} f$, &

A B

$AB = f$, erit ex nostra Theoria $M . N = \frac{m}{m-n} f . \frac{n}{m-n} f$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1} f . \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)\right)}{1} f$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2\right)}{1^2} f^2 = AD . BD = (CD + AC)$$

$(CD - CB) = (CD)^2 - (CF)^2 = (FD)^2 = (DE)^2 = x^2$ : quadratum mediæ quæsitæ: & si ex puncto D erigatur DE normalis AD, & abscindatur DE æqualis tangenti FD, hæc DE erit media geometrica quæsita inter fluentem AD & suam homologam BD. Et cum secans $CD = DG$ semper sit major FD, & FD major $BD = DH$, erit media DE intra limites BH, & CG, quæ est etiam assymptotus. Curvam hanc BE esse hyperbolam æquilateram jam quisque videt. Ad inversum Problema solvendum, sumpta media $= x$, & descripto circulo radii $CB = \frac{f}{2}$, & sumpta quacumque tangente $DF = DE$, cujus quadratum $x^2 = \frac{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m-n}\right)^2\right)}{1^2} f^2$ $= (CD)^2 - (CF)^2$; hæc quadratorum differentia in duos factores, ut supra, divisa ostendit modum, quo rite fiat transitus ad rectangulum, & ad inventionem duarum fluentium homologarum AD, BD cujuscumque valoris indeterminati intra tamen limites systematis. Habeatur nunc fluens $M = \frac{5}{5-3} . f$ $= AD$, cui respondet item data sua homologa $N = \frac{3}{5-3} . f = BD$: erit ex doctrina præcedenti $M . N = \frac{5}{5-3} f . \frac{3}{5-3} f$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+3}{5-3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5-3}{5-3}\right)\right)}{1} f . \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5+3}{5-3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5-3}{5-3}\right)\right)}{1} f$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{5+3}{5-3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{5-3}{5-3}\right)^2\right)}{1^2} f^2 = \left(\frac{1}{4} . \frac{64}{4} - \frac{1}{4} . \frac{4}{4}\right) f^2$$

$=$

$= (CD)^2 - (CF)^2 = \frac{1}{4} . \frac{60}{4} . f^2 = (FD)^2 = (DE)^2$, & media quæſita $x$ erit $DE = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{60}{4}} . f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{1}} . f$. Quod ſi data $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{60}{4}} . f$, & protonumero $f$, quærantur fluentes homologæ, quarum productum illius quadrato ſit æquale, fac $x^2 = \frac{1}{4} . \frac{60}{4} . f^2$: ſed hoc debet eſſe quadratum tangentis Circuli radii $\frac{f}{2}$ æquale differentiæ quadratorum $(CD)^2 - (CF)^2$: & ſcimus $(CD)^2$ eſſe quadratum ſemiſummæ fluentium homologarum: ergo erit $x^2 = \frac{1}{4} . \frac{60}{4} . f^2 = (CD)^2 - \frac{1}{4} . f^2$, & $(CD)^2 = \left(\frac{1}{4} . \frac{60}{4} + \frac{1}{4} . \frac{4}{4}\right) f^2 = \frac{1}{4} . \frac{64}{4} f^2$; & $CD = \frac{1}{2} . \frac{4}{1} f$, quæ debet eſſe ſemiſumma fluentium homologarum. Erit igitur ex demonſtratis

$$\frac{1}{2} . \frac{4}{1} f = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{4+1}{2}\right) + \left(\frac{4-1}{2}\right)}{\left(\frac{4+1}{2}\right) - \left(\frac{4-1}{2}\right)} \right\} . f = \frac{1}{2} \left(\frac{5+3}{5-3}\right) f,$$

ſemiſumma quæſita; & fluens major $M = \frac{5}{5-3} f$, minor homologa $N = \frac{3}{5-3} f$ erunt fluentes, ex quarum producto oritur quadratum mediæ datæ $\frac{1}{4} . \frac{60}{4} . f^2$, quæ erant inveniendæ.

§. 13. Juvat hîc breviter addere exemplum deſumptum ab ultima analogia §. 7, quæ eſt $\frac{m}{m+n} . \frac{f}{m-n} : \frac{n}{n+m} . \frac{f}{m-n} :: \frac{m}{m-n} . \frac{f}{m+n} : \frac{n}{m-n} . \frac{f}{m+n}$ cujus prima ratio continet fluentes homologas SA; ſecunda fluentes homologas SY, quæ tamen primæ ſunt reſpective ſecundis æquales. Sit igitur primum $M : N :: \frac{9}{9+7} . \frac{f}{9-7} : \frac{7}{7+9} . \frac{f}{9-7}$: & ſumpta (*Fig.* 10.) AB

æquali protonumero $\frac{f}{9-7} = \frac{f}{2}$, & divisa A B in partes 16, & abscissa A D $= \frac{9}{16} \cdot \frac{f}{2} = \frac{9}{16}$ A B, quæ erit fluens major, reliqua B D $= \frac{7}{16} \cdot \frac{f}{2}$ erit fluens minor homologa: cujus rectangulum $M.N = \frac{9}{9+7}\,\frac{f}{2} \cdot \frac{7}{7+9}\,\frac{f}{2}$

$$= AD.BD = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9+7}{9+7}\big) + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9-7}{9+7}\big)}_{1}\Big)\frac{f}{2} \cdot \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{7+9}{7+9}\big) - \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9-7}{9+7}\big)}_{1}\Big)\frac{f}{2}$$

$$= (AC+CD).(BC-CD) = \Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{9+7}{9+7}\Big)^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{9-7}{9+7}\Big)^2\Big) \cdot \frac{f^2}{4}$$

$$= \Big(\Big(\frac{16}{16}\Big)^2 - \Big(\frac{2}{16}\Big)^2\Big)\frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{f}{2}\Big)^2 = (CE)^2 - (CD)^2 = \Big(\frac{256}{256} - \frac{4}{256}\Big)\frac{1}{4}\Big(\frac{f^2}{2}\Big)$$

$$= \frac{252}{256} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{f^2}{4} = \frac{63}{128} \cdot \frac{1}{8} \cdot f^2 = (DE)^2, \ \& \ DE = \sqrt{\frac{63}{256}} \cdot \frac{f}{2}$$

$= \frac{1}{16} \cdot \sqrt{63}\ \frac{f}{2} = \frac{1}{32} \cdot \sqrt{63} \cdot f$ media quæsita. Quod si eadem ratio sequenti modo efferatur $M : N :: \frac{9}{9-7} \cdot \frac{f}{9+7} : \frac{7}{9-7} \cdot \frac{f}{9+7}$, fluentes M, N mutata natura, non valore ad systema S Y translatæ jam sunt: in quo casu sumpto protonumero A F $= \frac{f}{16}$, dabunt rectangulum

$$M.N = \frac{9}{9-7}\,\frac{f}{16} \cdot \frac{7}{9-7}\,\frac{f}{16} = AD.FD$$

$$= \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9+7}{9-7}\big) + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9-7}{9-7}\big)}_{1}\Big)\frac{f}{16} \cdot \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9+7}{9-7}\big) - \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9-7}{9-7}\big)}_{1}\Big)\frac{f}{16}$$

$$= (HD+AH).(HD-HF) = \Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{16}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{2}\Big)^2\Big) \cdot \Big(\frac{f}{16}\Big)^2$$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{252}{4} \cdot \Big(\frac{f}{16}\Big)^2 = \frac{63}{256} \cdot \frac{f^2}{4}$, ut supra. Descripta itaque, ut docuimus supra, hyperbola F E diametri A F $= \frac{f}{16}$, hæc transibit per punctum E, &

DE

DE erit media illa quæſita tam inter fluentes homologas SA, quam inter illas SY æquales quidem valore primis, ſed natura prorſus diverſas. Non eſt hujuſce loci in hiſce perſequendis nos diutius immorari: hæc attigiſſe leviter nunc ſatis ſit, quæ fuſius & uberius T. II. ubi de æquationibus ſecundæ dimenſionis, ac ulteriorum ordinum ex compoſito agemus, erunt tractanda, ubi & alias medias geometricas dabimus, quæ in ſyſtemate SA a chordis homologis circuli, in ſyſtemate SY a tangentibus ejuſdem circuli repræſentantur: & alia mira ſane adhuc ignota in apertum proferentur.

§. 14. Quod vero maxime ſpectat ad rem, de qua agimus modo, illud eſt, quod analogiæ omnes, in quibus fluentes homologæ utriuſque ſyſtematis continentur ex dictis a §. 1. uſque ad §. 8. pendent a generali analogia M : N : : *m* : *n*, in cujus prima ratione habentur fluentes homologæ ſyſtematis: in ſecunda vero expunctis protonumero & denominatore a fluentibus homologis ejuſdem ſyſtematis communibus, remanet ratio, qua fluentes illæ ſe ſe reſpiciunt. In hac itaque analogia ſi negativa erit fluens M, vel N, vel utraque, negativus neceſſario ſit oportet terminus alterius rationis *m*, vel *n*, vel uterque, cum *m*, *n* ſint numeratores numerici coefficientium, quibus afficiuntur fluentes M, N: ut evidentiſſime Cap: VIII. §. 8. demonſtratum fuit. Inſuper ex §. 9. conſtat, eam unam rationem, qua licet mediam geometricam inter duas fluentes invenire, ab eo uno artificio a nobis ſuperius adhibito pendere, quo fluentes ipſæ homologæ, inter quas quæritur media, ad eam novam formam traducuntur, ob quam earum productum eodem tempore & quadratum mediæ, & rectangulum fluentium ipſarum valeat repræſentare. Ex quo neceſſario conſequitur, quod ſi M, vel N ſumatur negativa, negativum etiam ſit quadratum, in quod convertitur negativum rectangulum — M N. Ita ex: gr: ſi ſit $M = \frac{3}{3+2} \cdot f$, & $N = \frac{2}{2+3} \cdot f$; & fiat $M \cdot - N =$

$$\frac{3}{3+2} f \cdot - \frac{2}{2+3} f$$

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{2} \left(\frac{3+2}{3+2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3-2}{3+2}\right) \right)}_{1} f \cdot - \underbrace{\left( \frac{1}{2} \left(\frac{2+3}{2+3}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3-2}{3+2}\right) \right)}_{1} f$$

$$= - \underbrace{\left( \frac{1}{4} \left(\frac{3+2}{3+2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{3-2}{3+2}\right)^2 \right)}_{1^2} f^2 = - \underbrace{\left( \frac{1}{4} \frac{25}{25} - \frac{1}{4} \frac{1}{25} \right)}_{1^2} f^2$$

$= - \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{25} \cdot f^2 = - x^2$, quadratum mediæ quæſitæ negativum æquale rectangulo negativo: ac propterea $M N = x^2$; & $x = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \sqrt{24} \cdot f$

 =

$= \frac{1}{5} . \sqrt{6} . f$ media quæſita. Vel ſi lubet ponere $- M N = - x^2$,

erit $- (M N)^{\frac{2}{2}} = - x^2$, & $- \sqrt{(M N)^{\frac{2}{2}}} = - \sqrt{\left(\frac{3}{3+2} f . \frac{2}{2+3} f\right)^{\frac{2}{2}}}$

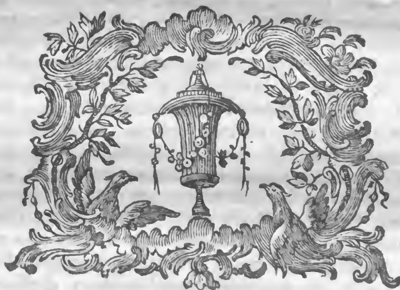
$= - \sqrt{\frac{6}{25} . f^2} = - \frac{1}{5} \sqrt{6} . f = - x$.

§. 15. Quæ cum ita ſint, fateantur tandem omnes vel inviti oportet, Analyſim communem hallucinari graviter, quando docet, datis duabus geometricis quantitatibus $a$ poſitiva, & $- b$ negativa, ut earum media geometrica inveniatur, inſtituendam eſſe hanc analogiam $a : x : : x : - b$, ex qua eruitur $x^2 = - a b$, & $x = \sqrt{-ab}$: quod eſt illud imaginarium nunquam definitum, neque definiendum, a quo ſe ſe expedire hactenus non potuit, neque unquam poterit, ſolemniter ſacrata, atque unanimi omnium Analyſtarum conſenſu confirmata analogia $a : x : : x : - b$, cui utpote a veritate alienæ prima hujuſce mali labes eſt referenda. Atque eo magis mirari ſubeſt, Analyſim communem in hunc errorem miſere prolapſam fuiſſe cum tamen univerſim, atque in cæteris caſibus analogiam $1 : 1 : : 1 : - 1$ ſemper ut falſam devoverit: quam tamen quomodo rectificari poſſit Cap: I. Lib: I. §. 37. & 38. & Cap: I. Lib: II. §. 25, & ſæpe alibi in T. I. oſtendimus. Neque reponat ejus quidem falſitatem etiam in hoc peculiari caſu ſatis exploratam habere, ſed tamquam malum neceſſarium cogi vel invitam tolerare; cum adhuc uſque ſatis ſuperque & ratione, & re ipſa oſtenderimus, malum hoc ipſam ſibi incaute comparaſſe, poſthabitis illis omnibus doctrinis, quas noſtra Theoria nunc primum inveſtigavit: quæ ita ſunt neceſſariæ ad Analyſim geometricam rite firmandam atque feliciter provehendam ut auſim publice declarare, quemvis acutiſſimo licet ingenio præditum, & pertinaciſſimi laboris patientem ſine earum ope ad hanc Scientiam rite pertractandam omnino imparem eſſe. Incredibile enim dictu eſt, quot ex hoc imaginario $\sqrt{-1}$ infecto tamquam fonte errores, & aliorum errorum ſibi invicem ſuccedentium ſemina profluxerint, quæ tamquam arcana & *paradoxa* ſuperſtitioſo, ut ita dicam, univerſali cultu venerantur adhuc, atque ſuſpiciuntur.

§. 16. Adde, quod malum hoc ac ſi ſatis per ſe grave non eſſet, aliud etiam noſtris temporibus non minus grave ac luctuoſum ad illud fulciendum acceſſerit, ex methodo illa derivatum, qua docetur, quomodo in duos factores imaginarios ſumma duorum quadratorum reſolvi poſſit. Hæc eſt altera ſane graviſſima $\sqrt{-1}$ cauſſa & origo, eo magis pertimeſcenda, quod recentiſſimis noſtris temporibus præſtantiſſimi ingenio & doctrina Viri tot undique ſcriptis hoc veluti fundamento novum ac ſublimiorem (ut dicitur) calculum ſuperſtruxerunt, nobiſque artificioſo (utinam vero!) calculorum apparatu commendarunt, & ad difficillima inveſtiganda problemata applicarunt.

Quo-

Quorum auctoritas tot clare factis merito parta tanta est, ut qui contra nunc hiscere auderet, temeritatis & ignorantiæ indicta caussa damnaretur. Principiis tamen, quibus nitor, ita fido, ut in T. II. totum hoc gravissimum sane negotium analyticum altius a suis principiis desumptum non improspere me tractaturum spero, ac ostendere, qua via, quibus artificiis id totum, quod hisce factoribus imaginariis perficitur, consequi possimus, atque emendare. Interim sufficiat leviter innuere, hujusmodi factoribus imaginariis ideo implicari, quia & veræ formulæ, quibus hæc summa quadratorum efferenda est, ignorantur, & quibus artificiis in alias tranformandæ sint, ut in rectangulum convertantur, antequam divisio instituatur (ut docuimus §. 9, & in seqq. præstitimus) nullum prorsus in Analysi communi inditium reperiatur.



CAPUT



# CAPUT XI.

*De continua Fluentium abstractarum utriusque Systematis divisione nova methodo pertractata, ac de vera serierum arithmeticarum origine & natura.*

§. 1. SAtis explorata superius diversa *Fluentium* utriusque Systematis natura, ac diversa formularum pro diversitate systematum configuratione, nec non varia ratione, qua efferendæ sunt formulæ unius ejusdemque systematis, ut salvo etiam ipsarum valore varias subire possint affectiones & vicissitudines; ac statutis principiis, quibus rite addi invicem ac subtrahi, verbo, tractari queant, quin ea, quam fluentes homologæ requirunt affinitatem, dissocietur; rei ipsius, de qua agimus, natura jubet, ut agamus de continua ipsarum singularum Fluentium divisione, de qua hactenus nullum verbum fecimus: res est tamen digna ut in hac explicanda & in hoc & in sequentibus Capitibus diligenter immoremur. Ac primum cum superius evidenter demonstratum fuerit, fluentes hujusmodi singulas fractionum abstractarum naturam induere, quæ fractiones minores vel majores semper sint unitate ipsa oportet; consequitur divisionem singularum fluentium ad coefficientem tantum numericum applicatam ad infinitum produci debere: cum denominator major vel minor numeratore nunquam exacte in ipso numeratore contineri possit, ut divisio tandem abrumpatur. Hinc singula fluens continuæ nullo limite coercendæ divisionis capax est, ex qua oritur series, quæ licet ad infinitum producatur, nunquam tamen a quocumque infinito terminorum numero exhauriri potest. Ab hac fractionum continua divisione primam serierum ad infinitum excurrentium notionem derivasse jure a nobis affirmari posse arbitramur.

§. 2. Hujusmodi tamen fractionum continua divisio cum duobus modis institui possit, ac uno tantum modo vulgo semper peragatur, de utroque hic agendum erit, ut quæ ex diversa hac dividendi ratione diversæ manant consequutiones intelligantur. Prima methodus hujusce divisionis instituendæ ab Analysi communi aut ignorata, aut tanquam inutilis repudiata prorsus in singulis fluentibus utriusque systematis sequenti modo peragitur. Sit primum fluens $\frac{m}{m+n}a$ systematis SA, cujus coefficientis $\frac{m}{m+n}$ divisio indefinite instituenda pro-

po-

ponatur. Fac primum $\frac{m}{m+n} = 1 - \frac{n}{n+m}$, & quotiens 1 hujusce primæ divisionis ostendit hanc unitatem 1 æqualem esse summæ fluentium homologarum $\frac{m+n}{m+n}$, & $\frac{m}{m+n} = \left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{n}{n+m}$, a qua sublata $\frac{n}{n+m}$, remanet fluens primum proposita, quæ vere est æqualis summæ fluentium homologarum subtracta fluente homologa $\frac{n}{n+m}$. Hinc exsurgit methodus, qua facile ab identitate fluentis ad æqualitatem, & viceversa, te transferas, quin divisione in primo casu, & multiplicatione in secundo (ut vulgo fit) uti cogaris. Data enim $\frac{m}{m+n}$ fac $= 1 - \frac{n}{n+m}$ ut ab identitate ad æqualitatem transeas, & data $1 - \frac{n}{n+m}$ fac $= \left(\frac{m+n}{m+n}\right) - \frac{n}{n+m} = \frac{m}{m+n}$ ut statim ad identitatem iterum te restituas. Quare hac ratione ad infinitum producta serie, si numerus terminorum sit par, cæteris evanescentibus, non nisi duo ultimi $1 - \frac{n}{n+m}$ remanent; si sit impar, ultimus tantum terminus idem ac propositus remanebit. In primo igitur casu ultimus seriei terminus signo negativo affectus erit fluens homologa propositæ; in secundo erit ipsa primum sumpta fluens. Itaque posito protonumero $AB = a$, erit in primo casu ex Cap: III. (Tab: V. *Fig.* 11.)

$$\frac{m}{m+n} AB = \left(1 - \frac{n}{n+m}\right) AB = \left(\frac{m\,AB}{(m+n)\,AB} + \frac{n\,BA}{(n+m)\,AB}\right) AB$$

$$- \frac{n\,BA}{(n+m)AB} AB = \frac{m}{m+n} . AB + \frac{n}{n+m} . BA - \frac{n}{n+m} . BA$$

$$= \frac{m}{m+n} . AB = AD:$$ in secundo casu remanet ipsa identica AD: ergo in prima serie primum æquationis membrum est æquale, sed non identicum cum secundo: in serie vero secunda est æquale & identicum. Ultimus seriei terminus dicetur in posterum *complementum* seriei, quia ad quemcumque infinitum terminorum numerum protrahatur divisio, sive series producatur, semper in prima subtrahendum est hujusmodi complementum, in secunda addendum, ut æquatio legitima perseveret. Facile quisque videt idem omnino in hoc sy-

ste-

stemate evenire fluenti homologæ $\frac{n}{n+m}$ BA = BD, si eadem continua divisio instituatur, aut series ad quemcumque terminorum numerum producatur.

§. 3. Nunc ad fluentes homologas systematis SY accedentes sumamus primum fluentem majorem $\frac{m}{m-n}a = \frac{m}{m-n}AB = \frac{m}{m-n}BA$, & facta methodo superiori divisione, erit $\frac{m}{m-n} = 1 + \frac{n}{-n+m} = 1 - 1 + \frac{m}{m-n} = 1 - 1 + 1 + \frac{n}{-n+m}$, & sic ad infinitum: quæ series eo modo, quo superiores S A, a positivo ad negativum alternantibus terminis procedit, atque ideo eodem modo produci potest ad evitandam continuam divisionem. Quare si sumatur series terminorum parium erit ex Cap. III $\frac{m}{m-n}a = \frac{m}{m-n}AB = \left(1 + \frac{n}{-n+m}\right)AB = \left(\frac{m\,AB}{(m-n)AB} - \frac{n\,AB}{(m-n)AB}\right)AB + \frac{n\,AB}{(m-n)AB}AB = AD'$: vel $\frac{m}{m-n}a = \frac{m}{m-n}BA = \left(1 + \frac{n}{-n+m}\right)BA = \left(\frac{m\,BA}{(m-n)BA} - \frac{n\,BA}{(m-n)BA}\right)BA + \frac{n\,BA}{(m-n)BA}BA = Bd$: & sumpta illa imparium, erit $\frac{m}{m-n}AB = AD' = \frac{m}{m-n}BA = Ad$ identica. Fluens vero minor eadem methodo divisa dabit $\frac{n}{-n+m} = -1 + \frac{m}{m-n} = -1 + 1 + \frac{n}{-n+m} = -1 + 1 - 1 + \frac{m}{m-n}$, & sic ad infinitum. At sumpta fluente minori negativa erit $-\frac{n}{-n+m} = 1 - \frac{m}{m-n} = 1 - 1 - \frac{n}{-n+m} = 1 - 1 + 1 - \frac{m}{m-n} = 1 - 1 + 1 - \frac{n}{-n+m}$. Ex quo eruitur seriem fluentis minoris posi-

tivæ

tivæ initium sumere a — 1 negativo, ut ad positivum + 1 transeat; contra vero negativam per seriem unitatum 1 — 1 + 1 — &c. procedere eodem modo, quo utraque systematis S A, & major systematis S Y. Quare series sequentes ad infinitum productæ fluentes utrasque homologas abstractas utriusque systematis repræsentant

$$\left.\begin{array}{l} \text{I.}^a \ \frac{m}{m+n} = 1-1+1-1+1- \frac{n}{n+m}\ \text{II.}^a = 1-1+1-1+ \frac{m}{m+n}\ \text{III.}^a \\ \text{IV.}^a \ \frac{n}{n+m} = 1-1+1-1+1- \frac{m}{m+n}\ \text{V.}^a = 1-1+1-1+ \frac{n}{n+m}\ \text{VI.}^a \end{array}\right\} \text{S A.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.^a \ \frac{m}{m-n} = 1-1+1-1+1+ \frac{n}{-n+m}\ 2.^a = 1-1+1-1+ \frac{m}{m-n}\ 3.^a \\ 4.^a \ \frac{-n}{-n+m} = 1-1+1-1+1- \frac{m}{m-n}\ 5.^a = 1-1+1-1- \frac{n}{-n+m}\ 6.^a \end{array}\right\} \text{S Y.}$$

Series hæ sunt quotientes a continua divisione singularum fluentium orti, quæ proinde in calculo substitutæ continuam divisionem fluentium indicabunt: numerus vero unitatum ostendit quot vicibus continuata fuerit divisio. Hujusmodi series duobus elementis constant, serie nempe unitatum numero imparium ut II.ª & Vª; 2.ª & 5ª; a qua in S A alterutra fluens subtrahitur; at in S Y additur minor, subtrahitur major: vel serie unitatum numero parium ut III.ª & VIª; 3.ª & 6ª; cui in S A alterutra fluens additur; at in S Y additur major, minor demitur. Series primæ in S A æquantur suis homologis positivis, at in S Y series cum additione fluentis minoris æquatur fluenti majori; series cum subtractione majoris æquatur minori negativæ; ac proinde membra harum æquationum sunt diversa. Series secundæ, evanescente serie unitatum numero parium, eamdem primo sumptam fluentem ante divisionem exhibent, & æquationes fiunt identicæ.

§. 4. Ex sola harum serierum inspectione palam se prodit hac continuæ divisionis methodo series unitatum (si hæ identicæ sumantur) quocumque terminorum numero augeantur, post primam divisionem nihil admodum promoveri. Quare præter primam divisionem, cæteræ, quæ institui possunt, omnino supervacaneæ ac frustraneæ videntur: recidunt enim semper vel in fluentem ipsam, quæ dividitur, vel in ejus homologam a prima divisione exhibitam. Hinc hujusmodi divisionis methodus nunquam in Analysi vulgata cognita fuit, aut consilio adhibita, ex qua tamen quædam maxime necessaria erui posse nunc demonstrare aggredior. Ac primum a prima statim divisione exhibetur coefficiens fluentis homologæ, quæ simul cum proposita conditionem systematis necessariam adimplet: atque ideo patet determinata natura ac forma unius fluen-

tis in utroque systemate determinari necessario naturam & formam alterius homologæ, hac prima divisione peracta: quæ veritas tam necessaria a methodo communi prorsus ignoratur. Insuper si simul addantur membrum identicum, & diversum æquale identico, facile fluentes homologæ in eam formam transmutantur, ob quam & tertium punctum medium fixum, & quæ est major quæ minor, sola formulæ inspectione, cognoscitur. Nam si addantur simul I.$^a$ & II$^a$, IV.$^a$ & V$^a$; 1.$^a$ & 2$^a$: 4.$^a$ & 5.$^a$ positivæ sumptæ, ac fiat divisio per 2, si $m > n$, invenies $\frac{m}{m+n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n+m}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+n} = \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$; $\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{m+n}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{n+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$; $\frac{m}{m-n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{m}{m-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)$; $\frac{n}{m-n} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{m}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{n}{m-n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m-n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)$. Ex quibus tantum formulis eruere fas est, quæ demonstravimus Cap: IV. & seqq. nec non mediæ geometricæ proportionalis inventionem Cap. X. demonstratam.

§. 5. Facilis etiam & elegans a prima divisione peracta exsurgit methodus se transferendi ab una fluente formulis §. 3. II.$^a$ & V.$^a$, 2.$^a$ & 5.$^a$ expressa ad suam homologam, retenta eadem formulæ natura. Si enim sumas I.$^{am}$ $\frac{m}{m+n} = 1 - \frac{n}{n+m}$ II.$^a$, ac facias $\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{m+n} = 1 - \frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m+n}$ invenies IV.$^{am}$ $\frac{n}{n+m} = 1 - \frac{m}{m+n}$ V.$^a$ Item sumpta in SY 1.$^a$ $\frac{m}{m-n} = 1 + \frac{n}{m-n}$ 2.$^a$ erit $\frac{-n}{m}\cdot\frac{m}{m-n} = 1 + \frac{m}{-n}\cdot\frac{n}{m-n}$, sive 4.$^a$ $\frac{-n}{m-n} = 1 - \frac{m}{m-n}$ 5.$^a$, & sumpta 4.$^a$ $\frac{-n}{m-n} = 1 - \frac{m}{m-n}$ 5.$^a$ erit $\frac{m}{-n}\cdot\frac{-n}{m-n} = 1 - \frac{n}{m}\cdot\frac{m}{m-n}$, sive 1.$^a$ $\frac{m}{m-n} = 1 - \frac{n}{m-n}$ 2.$^a$. Verum si sumpsisses $\frac{n}{m-n} = -1 + \frac{m}{m-n}$, erit $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m-n} =$

+

$-1+\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{m-n}$, sive $\frac{m}{m-n}=-1+\frac{n}{m-n}$; vel $\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{m-n}=1$ $+\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m-n}$, sive $\frac{n}{m-n}=1+\frac{m}{m-n}$ quod nullo modo cum veritate consentit. Quare in systemate S Y ut hæc translatio a fluente ad fluentem hac methodo recte succedat, coefficiens in $\frac{m}{-n}$ vel $\frac{-n}{m}$ est ducendus, 1 constanti intacta servata. At si more communi, posita ex: gr: $\frac{m}{m-n}=1+\frac{n}{m-n}$, ducas utraque membra in $\frac{n}{m}$, invenies $\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{m-n}=\frac{n}{m}+\frac{nn}{m(m-n)}$ $=\frac{mn}{m(m-n)}=\frac{n}{m-n}$, sive identicum æquale identico, & sic in cæteris: quo fit ut methodum communem secutus ab æquatione inter duo membra æqualia sed diversa in identicum recidas: quando hoc novo artificio semper æquationem, facto transitu a fluente homologa ad fluentem homologam, inter duo membra diversa institues: quod in aliquibus circumstantiis cum multum prosit, non erat omittendum. Interim statuas a fluente $1-\frac{n}{n+m}$, facta $1-\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{n+m}$, transferri ad homologam S A, & in S Y a positiva $1+\frac{n}{m-n}$, facta $1+\frac{m}{-n}\cdot\frac{n}{m-n}$ transferri ad $1-\frac{m}{m-n}$ suam homologam minorem negativam, & ab hac negativa, facta $1-\frac{n}{m}\cdot-\frac{m}{m-n}=1+\frac{n}{m-n}$ transferri ad homologam positivam majorem.

§. 6. Donec aut una tantum fluentis divisio instituta fuerit, aut singulæ Seriei unitates identicæ ponuntur, nihil promovetur Series, sed habetur eadem identica fluens si series unitatum terminis constet numero paribus; si vero imparibus, fluens proposita habetur per suam homologam. Quod si singulæ Seriei unitates inter se diversæ concipiantur, longe aliter res succedit. Porro cum unitates abstractæ sint omnino & quoad omnia indeterminatæ, nisi quantitati geometricæ applicentur, a qua & earum diversam naturam, & positionem diversam desumunt, tunc solum reputandæ erunt identicæ, cum eidem protonumero singulæ applicentur; semper vero erunt diversæ, si non eidem sed æquali protonumero applicentur. In primis enim identicum subtrahitur ab identico, idest a se ipso, at-

atque ideo Series nullescit; in secundis unitates singulæ ab æquali sed in opposita directione constituto protonumero diverso repræsentantur: ex quo fit ut Series unitatum quæ in primo casu nullescebat, in secundo ad infinitum producatur. Itaque si habeatur fluens $\frac{m}{m+n} f$, & ponatur protonumerus $f = AB$ (*Fig.* 12) ac instituatur divisio & perficiatur ut docuimus Cap: III. formula, sumpto protonumero A B semper identico, erunt formulæ I.ª, II.ª, III.ª §. 3. sequentes

$$\frac{m}{m+n}\, AB = \left(\frac{AB}{AB} - \frac{AB}{AB} + \frac{AB}{AB} - \frac{AB}{AB} + \frac{AB}{AB} - \frac{n}{m+n}\frac{AB}{AB}\right) AB$$

$$= \left(\frac{AB}{AB} - \frac{AB}{AB} + \frac{AB}{AB} - \frac{AB}{AB} + \frac{m}{m+n}\frac{AB}{AB}\right) AB;$$ in quibus termini intermedii utpote æquales & identici nullescunt, nec remanet nisi $\frac{m}{m+n}\, AB$

$$= \left(\frac{AB}{AB} - \frac{n}{m+n}\,\frac{AB}{AB}\right) AB = AB - \frac{n}{m+n}\, AB = AB - BH,$$ sive

$AH = AB - BH$. Verum si hujusmodi intermedii termini æquales, fiant diversi, (hoc est sit $AB = AB$, $-AB = BC$, $+AB = CD$, $-AB = DE$, $+$ &c. $=$ &c.) cum invicem subtrahi nequeant & evanescere, licet signo alternatim positivo & negativo afficiantur; tunc erit fluens I.ª M

$$= \left(\frac{AB}{AB} + \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AB} + \frac{DE}{AB} + \frac{EF}{AB} - \frac{n}{m+n}\,\frac{FE}{AB}\right) AB$$

$$= \left(\frac{AB}{AB} + \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AB} + \frac{DE}{AB} + \frac{m}{m+n}\,\frac{EF}{AB}\right) AB = AB + BC + CD$$

$$+ DE + EF - \frac{n}{m+n}\, FE = AB + BC + CD + DE + \frac{m}{m+n}\, EF$$

$= AF - FL = AL$. Idem dic de aliis formulis §. 3.

§. 7. Ut igitur in hac suppositione omnis prorsus signi negativi ambiguitas tollatur, fluentes sunt reducendæ ad eas formulas, quas docuit Cap. II. §. 18. & seqq. facta $m+n = b$, ut sit $\frac{m+n}{m+n} = \frac{(b-n)+n}{(b-n)+n} = \frac{m+(b-m)}{m+(b-m)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{n}{b}\right)+\frac{n}{b}}{\left(1-\frac{n}{b}\right)+\frac{n}{b}} = \frac{\frac{m}{b}+\left(1-\frac{m}{b}\right)}{\frac{m}{b}+\left(1-\frac{m}{b}\right)}$$ in SA $= \frac{\left(1+\frac{n}{b}\right)-\frac{n}{b}}{\left(1+\frac{n}{b}\right)-\frac{n}{b}}$

=

$$= \frac{-\frac{m}{b}+\left(1+\frac{m}{b}\right)}{-\frac{m}{b}+\left(1+\frac{m}{b}\right)}$$ in SY. In præparata formula fluentium facile erit quamcumque fluentem terminis singulis signo positivo affectis ad infinitum producere, quin continua instituatur divisio, quæ non nisi quantitatibus constantibus, quæ nullo modo fluere possunt, applicari potest. Methodo enim §. 3. & 6. cognovimus loco continuæ divisionis ad infinitum producendæ substituendam esse in fluentibus seriem unitatum indefinitam, cui addenda vel subtrahenda una ex homologis. Quod quo fiat modo, sequenti problemate explicandum.

## PROBLEMA.

Invenire formulam generalem fluentis systematis SA, qua fluens continuo successivo fluxu ad infinitum producta determinari potest.

In indefinita zZ (*Fig.* 13.) determinetur arbitrio punctum A; in quo fluens nulla supponatur, versus Z vel z progressura. Primum omnium hæc linea indefinita utrinque a puncto A divisa concipiatur in partes numero indefinitas & æquales singulas protonumero arbitrio sumpto $f$; nempe in AB, BC, CD, DE, EF ... KL; Ab, bc, cd, de, ef ... kl. Hac facta præparatione fluxus in A nullus toties determinatur quoties fluendo incidit successive in puncta B, C, D ... b, c, d ... in punctis intermediis omnino indeterminatus. Fluens igitur in puncto A nulla in punctis intermediis indeterminata in singulis A, B, C, D ... A, b, c, d ... necessario determinatur, ac tamquam solitaria sumi potest comparanda suo speciali protonumero. Quæ ideo cum intra suum protonumerum fluat, semper naturam fluentis homologæ systematis SA induet. Sed si in puncto A, in quo est nulla, simplici nota A $= o$ signetur, nec sui virtualis fluxus mensura, nec ejus directio cognosci potest. Quare ut hoc etiam, antequam fluat, innotescat, vocata ipsa M, si fiat M

$$= \left(o + \frac{\frac{o}{b}}{\frac{o}{b}+\left(1-\frac{o}{b}\right)}\right) f = \left(o + \frac{\frac{o}{b}}{\frac{o}{b}+\left(1-\frac{o}{b}\right)}\right) AB,$$ innotescit statim primum ejus directio versus Z; secundo punctum B in quo fluendo per AB $= f$ tandem necessario determinatur; tertio denominatore constanti $b$, sed arbitrio sumpto, in quot partes $b$ ad libitum divisa concipiatur AB $= f$, ut habeantur partes intermediæ notæ, quæ unæ post determinationem protonumeri arbitrio nostro relinquuntur. Hæc igitur fluens

( $o$ +

$\left( o + \frac{\frac{o}{h}}{\frac{o}{h} + \left(1 - \frac{o}{h}\right)} \right) f$ est fluens minima SA, cui respondet sua homologa maxima $\left( \frac{1 - \frac{o}{h}}{\left(1 - \frac{o}{h}\right) + \frac{o}{h}} \right) f = BA$. Ergo si a potentia ad actum hujusmodi fluxus nullus revocetur, erit fluens $M = \left( \frac{o + \frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} \right) f$ omnino indeterminata, nisi determinetur $n$. Sed ex demonstratis præsertim Cap: III. $n$ nequit determinari nisi in punctis $o, 1, 2, 3 \ldots h$, in quo ultimo casu recidit in B, & fluens necessario determinatur facta - maxima $= AB = f$, evanescente necessario sua homologa minima $\left( 1 - \frac{\frac{h}{h}}{\left(1 - \frac{h}{h}\right) + \frac{h}{h}} \right) f = B. \; f = o\, f$. Huc perventa si ulterius progredi concipiatur, erit $M = \left( 1 + \frac{\frac{o}{h}}{\frac{o}{h} + \left(1 - \frac{o}{h}\right)} \right) f = f + \frac{\frac{o}{h}}{\frac{o}{h} + \left(1 - \frac{o}{h}\right)} f = AB + B$, atque ideo M componitur ex constanti $f$, & fluente nova B, & erit $M = f + M = f + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} f$, & fluens $M = \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} f = \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} BC$: quæ fluendo facta maxima recidit necessario in pun-

punctum C, eritque denuo $M + M + M = f + f + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} f$.

Hoc modo successive sine fine progrediendo fluens, servata semper natura fluentis SA, per partes determinatur, atque ad infinitum produci potest, facta M

$$= f + f + f \ldots + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} f = g\, f + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} f$$

$= AB + BC + CD \ldots + Kp = AK + Kp$, vel $M = f + f + f \ldots$

$$+ f - \left(1 - \frac{\frac{n}{h}}{\left(1 - \frac{n}{h}\right) + \frac{n}{h}}\right) f = AB + BC + CD \ldots$$

$+ KL - Lp$, quæ sunt formulæ II.ª & III.ª §. 3. ortæ a continua divisione unius vel alterius fluentis SA, posito protonumero in singulis terminis diverso, ut advertimus §. 6.

§. 8. Corollarium 1. Methodus hæc inservire potest ad reducendam quamcumque fluentem majorem protonumero primo sumpto ad eamdem naturam systematis SA, mutata tantum ejus specie. Si enim loco $f$ sumatur quivis pro-

tonumerus $lf$ major $g$, erit $M = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{g}{h}} = \frac{\frac{\frac{g}{l}}{h}}{\frac{\frac{g}{l}}{h} + \left(1 - \frac{\frac{g}{l}}{h}\right)} lf$

$= \frac{\frac{g}{lh}}{\frac{g}{lh} + \left(1 - \frac{g}{lh}\right)} lf$: quo facto a systemate SA protonumeri $f$ transitus

fit ad systema ejusdem naturæ SA sed protonumeri $lf$, & M quæ æqualis erat summæ $g$ protonumeri $f \pm$ una ex homologis, reducitur ad unam tantum fluentem homologam ejusdem systematis sed protonumeri $lf$.

Coroll.

Coroll. 2. Quod si haberetur $M = \left( g - \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} \right) f =$ ex: gr:

$AL - Lp$, eodem modo quo successiva additione fluentis $\frac{\frac{h}{h}}{\frac{h}{h} + \left(1 - \frac{h}{h}\right)} f$

factæ maximæ ad fluentem $AL + Lp$; ita continua ejusdem fluentis subtra-

ctione tandem pervenitur ad fluentem $M = \left( 1 - \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} \right) f$

$= AB - BH = AH$; ac tandem ad fluentem nullam in puncto A. Coroll. 3. Idem omnino eveniet si fluxus in puncto A nullus in opposita primum directione versus z dirigeretur, ac eadem formula absolute spectata facto $f = Ab$ satisfaceret. Sed si directio hæc cum prima comparetur, tunc cum protonumerus AB dictus fuerit $f$, erit certe quidem $Ab = -f$: quo intelligitur fluxum in contrariam partem ejus, versus quam fluebat primo, procedere. Hinc negativus supponit prius existentiam positivi, ex cujus comparatione tantum fluxus oppositus dici potest negativus. Nihil igitur absolute consideratum negativum dici potest.

§. 9. Coroll. 4. Poterat quidem sumi formula $M = \frac{\frac{n}{h}}{\left(1 + \frac{n}{h}\right) - \frac{n}{h}} f$, quæ

naturam fluentis minoris SY induens a puncto $A = o$ usque ad infinitum producitur; sed in hoc casu in linea indefinita zZ non haberentur ante fluxum data nisi puncta b, A protonumeri $bA = f$. Cætera puncta quamvis, posita $n = 1, 2, 3 \ldots$ ut in formula superiori, determinare liceat, tamen necessario non determinantur successive, ut requirit SA, sed per saltum ad quamcumque magnitudinem, posito $n$ quovis numero integro. Re tamen ipsa id obtineri po-

test, quod ex altera eruitur. Fluens tamen major $M = \left( 1 + \frac{\frac{n}{h}}{\left(1 + \frac{n}{h}\right) - \frac{n}{h}} \right) f$

osten-

ostendit fluentem majorem systematis S Y non posse minorem fieri ipso protonumero $f$, retenta eadem natura: atque ideo in hoc casu ut intra puncta b, A

successive fluere possit, convertenda est in fluentem $M = \left( 1 - \frac{\frac{n}{b}}{\left(1 - \frac{n}{b}\right) + \frac{n}{b}} \right) f$,

& quæ erat minor in fluentem $\frac{\frac{n}{b}}{\frac{n}{b} + \left(1 - \frac{n}{b}\right)} f$ utraque ad S A. Quo

evincitur formulas §. 3. continua divisione a methodo communi evolutas posse ac debere singulas ad fluentes systematis S A traduci, ac methodo hujusce problematis tractari.

Coroll. 5. Quo magis augetur denominator $b$, eo major erit numerus fluentium, quæ determinari poterunt inter puncta fixa A, B, C, D, E &c. cujusvis protonumeri $f$, sive A B, B C, C D, D E, &c.: quo major enim est numerus partium cognitarum, in quas dividitur $AB = f$, eo major est numerus seriei $0, 1, 2, 3 \ldots b$ numerorum naturalium, in quibus successive determinatur $n$: atque etiam major erit numerus punctorum datorum, in quæ cum incidit fluxus determinatur. Verum quo magis crescit denominator $b$ (in quo casu majores numero partes protonumeri innotescunt, cum series numerorum naturalium $0, 1, 2, 3 \ldots b$ longius producatur) singulæ hujusmodi partes quantitate minores sint oportet. At si augeatur $b$ ad infinitum & efferatur, ut fit, hac nota omnino indeterminata $\infty$, numerator fluens $n$ per seriem indefinitam $\frac{0}{\infty}, \frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}, \frac{3}{\infty} \ldots \frac{\infty}{\infty}$ terminis numero indefinitis procederet quidem, sed non nisi in punctis $\frac{0}{\infty} A = 0f$, & $\frac{\infty}{\infty} AB = f$ poterit determinari: velim enim dicas quota sit pars unitatis $\frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}, \frac{3}{\infty} \ldots$ &c.? Itaque si excipias punctum $A = \frac{0}{\infty} f$, in quo fluens est nulla, & ultimum $\frac{\infty}{\infty} f$, in quo fluens est maxima, nulla fluens intermedia $= \frac{\frac{n}{\infty}}{\frac{n}{\infty} + \left(1 - \frac{n}{\infty}\right)} \cdot f$,

vel ejus homologa $\left(\frac{1-\frac{n}{\infty}}{\left(1-\frac{n}{\infty}\right)+\frac{n}{\infty}}\right) f$ determinari poterit.

§. 10. Corollar. 6. Diximus numeratorem fluentem $n$ fractionis $\frac{n}{h}$ valoribus a serie numerorum naturalium $o, 1, 2, 3, \ldots h$ exhibitis successive afficiendum esse ut habeantur partes omnes datæ, in quas dividitur denominator constans $h$. Si enim $n$ poneretur alicui datæ fractioni $\frac{e}{g}$ æqualis, fractio $\frac{n}{h}$ fieret $\frac{e}{gh}$, & universim fluens fractio $\frac{n}{gh}$, in qua iterum $n$ a serie $o, 1, 2, 3, 4 \ldots gh$ successive determinaretur, tot terminis aucta, quot novus denominator $gh$ requirit. Et hoc unum est munus denominatoris cujuscumque dati $h$, ostendere siquidem ultimum terminum $h$ seriei $o, 1, 2, 3, \ldots h$ ad quem ad summum attingere potest numerator fluens $n$ fractionis $\frac{n}{h}$ antequam ad integrum fractio reducatur & nova oriatur fractionum series: quo denominatore propterea indicatur in quot partes datas dividi possit unitas abstracta, quæ applicata suo protonumero $f$ ostendit partes datas, in quas protonumerum ipsum licet dividere.

Coroll. 7. Hic loci attente observandum denominatorem $h$ ad infinitum quidem augeri posse, sed non posse esse minorem unitate ipsa: si enim fiat fractio minor unitate ex: gr: $\frac{e}{g}$, vidimus Coroll. superiori in denominatorem integrum $gh$ converti: quo tantum augetur numerus fluentium determinatarum inter fluentes limitis $\frac{o}{gh}.f$ minima, $\frac{gh}{gh}.f$ maxima, extrema protonumeri $f$ puncta. Restat ut ponatur $h = o$, in quo casu si sumantur formulæ fluentium utriusque systematis, erit

in SA $\frac{\left(\left(1-\frac{n}{o}\right)+\frac{n}{o}\right)f}{1}$, in SY $\frac{\left(\left(1+\frac{n}{o}\right)-\frac{n}{o}\right)f}{1}$, & minimus valor $n = o$ dabit fluentes in SA $\frac{\left(\left(1-\frac{o}{o}\right)+\frac{o}{o}\right)f}{1}$;

in

in SY $\frac{\left(\left(1+\frac{o}{o}\right)-\frac{o}{o}\right)f}{1}$ : sed hæ recidunt in $\frac{\left(\left(1-\frac{1'}{1}\right)+\frac{1'}{1}\right)f}{1}$;

$\frac{\left(\left(1+\frac{1'}{1}\right)-\frac{1'}{1}\right)f}{1}$, in quibus $\frac{1''}{1}\cdot f$ est maxima $=1\cdot f$, quæ hoc denominatore 1 determinari potest: & cum in hoc casu $\frac{o}{o}\cdot f=\frac{1}{1}\cdot f$, patet $b$ non posse minorem esse 1: quo denominatore fluens $\frac{n}{1}f$ non nisi in casu $n=o$, $n=1$ determinari potest.

§. 11. Coroll. 8. Ex Coroll. 5.° luce clarius patet quam longe a veritate abludant, ac frustra laborent illi, qui communi decepti opinione continuo denominatoris $b$ augmento, quo minuitur fractio, hanc tandem ad absolutum zero, posito denominatore $b=\infty$, deprimere posse putant, quod nullo modo obtineri fas est nisi in limite minimo, in quo fluens in puncto A est nulla, facta $\frac{n}{\infty}f=\frac{o}{\infty}f$. Ex 7.° vero evincitur, posito denominatore $o$, numeratorem $n$ fractionis $\frac{n}{o}f$ necessario debere esse $o$, & $\frac{o}{o}f$ idem esse ac $\frac{1}{1}f$, in qua determinantur tantum fluentes $\frac{o}{1}f$ minima $=$ A, & maxima $\frac{1}{1}f$ $=$ A B in duo extrema puncta protonumeri A B desinentia, eodem prorsus modo, quo evenit fractioni $\frac{\infty}{\infty}f$: hac tantum differentia, quod ex prima $\frac{n}{\infty}f$, licet $n$ successive æquetur seriei $o$, 1, 2, 3, .... $\infty$, ostenditur fluentem nullam ex intermediis determinari posse nisi illas limitis $\frac{o}{\infty}f=o\ f$, $\frac{\infty}{\infty}f=f$, in punctis scilicet A & B: quia quid sit $\infty$, $\infty$ omnino ignoratur. Contra vero ex necessaria $\frac{o}{o}f=\frac{1}{1}f$ indicatur nullam fluentem in casibus intermediis haberi posse, quia nulla divisio intermedia protonumeri facta.

cta fuerit: atque ideo non nisi illas limitis $\frac{o.o}{o} f = \frac{o}{1} f$, & $\frac{1}{1} f$ posse determinari in iisdem punctis A, & B. Itaque fluentes intermediæ in primo casu nequeunt innotescere ob indeterminationem denominatoris $b = \infty$, licet concipiatur protonumerus divisus in partes quovis numero majores, hoc est, indefinitas, quarum singula indefinita sit & ipsa necesse est: in secundo vero casu fluentes intermediæ nequeunt innotescere, quia $b = o$ omnem omnino intermediam divisionem excludit, idemque fit zero. Verum quoad effectum determinandi fluentem, idem est supponere protonumeri divisionem in partes quasvis indefinitas, ac supponere divisionem nullam: in utroque enim casu fluxio intermedia semper indeterminata manebit. Hac nova luce illustrantur atque ampliantur quæ diximus Cap: II. §. 30, nec non Cap: III.

§. 12. Coroll. 9. Crescente $n$ supra zero in fractione $\frac{n}{o}$, vel supra 1 in fractione $\frac{n}{1}$, determinatur fractio in prima si ponatur $n$ successive $= o.o$, $1.o$, $2.o$, $3.o$ ... ut sit $\frac{n}{o}$ successive $= \frac{o}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \ldots$, determinatur in secunda si ponatur $n$ successive $= o, 1, 2, 3 \ldots$ in quo utroque casu transitus fit a primo protonumero ad secundum, tertium, quartum &c., ac termini seriei qui determinantur, desinunt successive in puncta A, B, C, D, &c. Quod si retento denominatore ($o$), ponatur $n$ successive $= o, 1, 2, 3 \ldots$ fractio $\frac{n}{o}$ erit quidem major quavis data sed semper indeterminata quosvis limites semper excedens. Fractionem tamen hanc $\frac{n}{o}$ non nisi systemati SY applicari posse jam ostendimus.

Coroll. 10. Hæc dicta volo ut intelligatur quomodo rectificanda sit praxis communis usu recepta in continua divisione fractionis $\frac{1}{o}$, quæ ponitur $= \frac{1}{1-1}$ ut exsurgat $1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + \frac{1}{1-1}$, ex qua necessario consequitur $o = m$ etiam infinito. Consequutio hæc, quæ licet per ea quæ diximus §. 6. legitima esse possit si recte intelligatur, tamen repugnantia, quam præsefert, nullo modo a communi Theoria tolli potest, utpote

quæ

quæ in ipsa $\frac{1}{1-1}$ in locum $\frac{1}{o}$ substituenda initio statim hallucinetur. Nam ex demonstratis constat fluentem hanc $\frac{1}{o}$ mancam esse, ac suo denominatore constanti carere, qui differentiam fluentium homologarum continet ad constituendam veram fluentem systematis S Y. Quæ si perficiatur revera erit

$$\frac{\frac{1}{o}}{-\frac{1}{o}+\left(1+\frac{1}{o}\right)}\text{, vel si mavis }\frac{\frac{1}{1-1}}{-\frac{1}{1-1}+\left(1+\frac{1}{1-1}\right)}$$

, ac si continue dividatur, dabit seriem $-1+1-1+1\ldots+\frac{\frac{1}{o}}{-\frac{1}{o}+\left(1+\frac{1}{o}\right)}$

$$=-1+1-1+1\ldots-1+\frac{1+\frac{1}{o}}{\left(1+\frac{1}{o}\right)-\frac{1}{o}}$$

ut docet §. 3. in quibus si loco constantis $-1$ & $+1$ ponatur ejus valor $\frac{\left(1+\frac{1}{o}\right)-\frac{1}{o}}{\left(1+\frac{1}{o}\right)-\frac{1}{o}}$, & hujusmodi unitates identicæ sumantur, perfectam invenies inter fluentem & seriem æqualitatem: si vero diversæ ponantur, seriem hanc ultra quoscumque finitos limites recte produci posse §§. 6, 7 jam docuerunt.

Coroll. 11. Hisce bene perspectis alterum etiam apprime necessarium consequitur, quod nempe licet valor fluxionis $\frac{n}{b}$ non possit determinari nisi in punctis $\frac{o}{b}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{2}{b}$ ... $\frac{b}{b}$, tamen non est dicendum (ut opinio vulgata docet) fluxionem per saltum procedere. Fluxio enim successivo nullo interjecto spatio quovis minimo per omnia puncta intermedia procedit quidem, sed nequit a nobis determinari nisi per saltum, cujus mensura a denominatore arbi-

bitrario $h$, sed dato, determinatur. Aliud igitur est fluxionem natura sua necessario per saltum procedere; & aliud non nisi per saltum innotescere posse fluxiones $\frac{o}{h}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{2}{h} \ldots \frac{h}{h}$, exclusis illis omnibus, quæ intra hæc puncta continentur. Quare verum quidem est non nisi per saltum fluxionem continuam determinari posse, sed falsum naturam fluendo per saltum procedere. Quo non animadverso, multa a veritate aliena, obscura multa non solum in analyticis, sed etiam in physicis irrepserunt. Quæ tamen hîc de natura fluxionum, quantum instituti nostri ratio postulat, perstringimus, multum conferre etiam ad *Elementa Calculi differentialis ac integralis* expurganda iisdem male perceptis notionibus contaminata me alias demonstraturum confido, si ætas, otium, & longum sane, quod adhuc restat, iter ferat. Interim quædam & in sequentibus sparsa semina invenies.

§. 13. Quibus omnibus ac singulis jam satis confirmatum & ratum arbitror, quamcumque fluentem utriusque systematis eo modo, quo §. 14. Cap: VII., & alibi docuimus, non additione crescere vel subtractione minui (quod proprium solum est constantium sive protonumeri) sed continuo fluxu augeri vel decrescere: adeoque fluxionem non continua divisione in seriem produci, sed continuo fluxu per varia ac diversa data puncta transeunte, in quibus tantum determinatur, indefinite in seriem promoveri. Hinc illud notatu maxime necessarium consequitur, quod cuicumque fluenti in methodo communi præponendum est $o$: quo uno artificio & quod divisio continua more communi peracta, protonumeri identitate supposita, præstat, obtinetur, & supposita protonumeri diversitate, in seriem nunquam desituram fluxio producitur. Ita erit M $=$

$$\left( o. + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} \right) f = \left( 1 - 1 + 1 - 1 \ldots + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} \right) f$$

$$= \left( 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots\ldots + 1 - \left( \frac{1 - \frac{n}{h}}{\left(1 - \frac{n}{h}\right) + \frac{n}{h}} \right) \right) f$$

$$= \left( 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots\ldots + \frac{\frac{n}{h}}{\frac{n}{h} + \left(1 - \frac{n}{h}\right)} \right) f =$$

(1

$$\left( 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots + 1 - \left( \frac{1 - \frac{n}{b}}{\left(1 - \frac{n}{b}\right) + \frac{n}{b}} \right) \right) f,$$ prout identicus aut diversus protonumerus concipiatur. Primo modo continua divisione non habetur nisi aut una & eadem fluens, aut per suam homologam expressa, ut in formula III.ª vel II.ª §. 3. Secundo modo habetur fluxio continua a puncto A per omnia intermedia data puncta transiens, terminata ab eadem fluente proposita, aut per suam homologam expressa. Methodus tamen vera & ab intima fluxionis natura manans ab uno dato puncto initium sumentis est ea, de qua nunc agimus: qua fit ut fluens quævis solitaria nullo modo fluendo determinari absolute possit, nec limitibus datis absolute coerceri; sed infinitis successive valoribus fluendo obnoxia, non nisi in transitu illorum punctorum successive innotescere possit, quæ a varia suæ formulæ conformatione in indefinita jam linea determinantur. Hæc tamen fluens prout una & eadem eodem = signo cum singulis suis valoribus rite ac necessario conjungenda est. Quod facile consequemur, dummodo caute animadvertamus in fluxu continuo a puncto dato duo data puncta diversa origine & natura distinguenda esse. Primum genus punctorum datorum est illud, quod a successiva protonumerorum systematis, quorum extrema puncta data sunt, coalitione in linea indefinita oritur: quæ puncta eodem manente protonumero, utpote ejus extrema, ita necessario data ac determinata sunt, ut nullo modo mutari possint. Alterum genus punctorum datorum originem ducit a denominatore $b$ coefficientis numerici fluentis, qui quidem denominator datus sumendus est, ut innotescat in quot partes datas protonumerum quemvis dividere oporteat, sed arbitrio nostro relinquitur: quo fit ut manentibus necessario determinatis punctis, quæ a singulis protonumeris excipiuntur, singuli ipsi protonumeri in partes medias plures paucioresve datas dividi arbitrio possint.

§. 14. Ut horum diversi generis punctorum datorum diversam œconomiam diligentius investigemus, sumpta linea indefinita zZ (*Fig.* 14.) & divisa utrinque a puncto A, quod initium fluxionis ponitur, in tot partes necessario datas AB, BC, CD . . . KL, Ab, bc, cd . . . kl æquales singulas protonumero $f$, & sumpta formula generali fluentis $M = \frac{\frac{n}{b}}{\frac{n}{b} + \left(1 - \frac{n}{b}\right)} f$ ponatur primum $b = 1$, ut sit $M = \frac{\frac{n}{1}}{\frac{n}{1} + \left(1 - \frac{n}{1}\right)} f$. In hac suppositio-

tione quisque videt fluentem $n$ successive per omnia infinita puncta intra $o$ & $1$ fluere quidem posse, sed non posse determinari nisi in punctis extremis $n=o$, $n=1$, atque ideo ex infinitis fluentibus intra hæc puncta constitutis non haberi nisi $M = \frac{\frac{o}{1}}{\frac{o}{1}+\left(1-\frac{o}{1}\right)} f = A$; $M = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\left(1-\frac{1}{1}\right)} f = AB$: si igitur vocetur F fluxio continua ab A usque ad Z, hæc non poterit determinari nisi in punctis A, B, C, D, E ... K; A, b, c, d, e ... k, eritque $F = \left(\frac{\frac{o}{1}}{\frac{1}{1}} + \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} + \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} + \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} + \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} \ldots + \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}}\right) . \pm f$

$$= \left(\frac{o\,AB}{AB} + \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AB} + \frac{DE}{AB} \ldots + \frac{KL}{AB}\right) AB = AL; \text{ vel } F$$

$$= \left(\frac{o\,Ab}{Ab} + \frac{bc}{Ab} + \frac{cd}{Ab} + \frac{de}{Ab} \ldots + \frac{kl}{Ab}\right) Ab = Al;$$

fluxio determinata in tot punctis datis divisa, quot sunt partes $= f$, in quas dividitur AL & Al. Huic si addatur L P' vel l p' minor protonumero, hæc erit in nostro casu necessario indeterminata, nisi fluendo fiat $= LP' = f$, vel $= lp = f$. Universim igitur erit

$$F = \left(\frac{o}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \ldots + \frac{1}{1} + \frac{\frac{o}{1}}{\frac{o}{1}+\left(1-\frac{o}{1}\right)}\right) . \pm f$$

$$= o\,AB + BC + CD + DE \ldots + KL + \frac{\frac{o}{1}}{\frac{o}{1}+\left(1-\frac{o}{1}\right)} LP$$

$$\text{vel} = o\,Ab + bc + cd + de \ldots + kl + \frac{\frac{o}{1}}{\frac{o}{1}+\left(1-\frac{o}{1}\right)} lp:$$

& hæc erit formula generalis fluxionis a puncto A ad infinitum utrinque excurrentis, quæ non determinatur nisi in punctis necessario datis ab extremitate pro-

protonumerorum constitutis. Hoc posito si ab hac formula ad infinitum progrediente ex infinitis fluentibus a communi puncto A prorumpentibus, quæ nequeunt determinari, illas tantum, quæ datæ sunt, sumere & in serie ordinata disponere velimus, vocatis singulis istis fluentibus, quas quærimus, M, erit

$$M + M + M + M \ldots + M + M = \frac{o}{1} . \pm f + \left(\frac{o}{1} + \frac{1}{1}\right) . \pm f + \left(\frac{o}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) . \pm f + \left(\frac{o}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) . \pm f \ldots\ldots + \left(\frac{m-1}{1}\right) . \pm f + \frac{\frac{o}{1}}{\frac{o}{1} + \left(\frac{1-o}{1}\right)} . \pm f$$

(posito $m$ numero terminorum seriei) sive

$$M + M + M + M \ldots + M = \frac{o}{1} . \pm f + \frac{1}{1} . \pm f + \frac{2}{1} . \pm f + \frac{3}{1} . \pm f + \frac{4}{1} . \pm f \ldots + \left(\frac{m-1}{1}\right) . \pm f + \frac{o}{1} . \pm f$$

$$= A + AB + AC + AD + AE \ldots + AL + L = A + Ab + Ac + Ad + Ae \ldots + Al + l.$$

Series hæc est Series arithemetica numerorum naturalium, quæ continet fluentes omnes necessario determinatas a punctis extremis singulorum protonumerorum sibi invicem succedentium, exclusis cæteris intermediis numero infinitis nunquam in hac hypothesi denominatoris $b = 1$ determinandis. Series hæc nullo limite neutra in parte puncti A terminari potest, atque ideo ultimo termino addendum est $\frac{\frac{o}{1}}{\frac{o}{1} + \left(1 - \frac{o}{1}\right)} . \pm f$, ut intelligatur augeri semper posse ad infinitum quacumque fluente indeterminata. Series igitur hæc arithemetica numerorum naturalium jure dicenda est necessaria & continua, quia quicumque diversus sumatur protonumerus, series coefficientium, qui protonumero applicantur, erit semper eadem, mutata tantum inter hæc puncta distantia a magnitudine protonumeri statuta, sive mutata *specie* systematis: sed semper universim & abstracte repræsentabit seriem successivam punctorum datorum primi generis, quæ a protonumero necessario determinantur.

§. 15. Nunc denominator $b$ fractionis $\frac{n}{b}$ ponatur $= 2$; & formula ge-

neralis fluentis erit $M = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + \left(1 - \frac{n}{2}\right)} f$ ( omitto brevitatis gratia $- f$: idem enim evenire in parte opposita jam satis superius constat ), & fluxio continua in hoc casu punctorum datorum erit $F = \frac{0}{2} f + \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f \ldots + \frac{1}{2} f + \frac{\frac{0}{2}}{\frac{0}{2} + \left(1 - \frac{0}{2}\right)} f$; & series fluentium determinatarum $M + M + M \ldots = \frac{0}{2} f + \frac{1}{2} f + \frac{2}{2} f + \frac{3}{2} f + \frac{4}{2} f + \frac{5}{2} f + \frac{6}{2} f \ldots\ldots + \left(\frac{m' - 1}{2}\right) f + \frac{\frac{0}{2}}{\frac{0}{2} + \left(1 - \frac{0}{2}\right)} f$. Series hæc est ipsa arithemetica continua, cujus numeratores in seriem numerorum naturalium progredientes singuli communi denominatore 2 afficiuntur: quo ostenditur seriem hanc inter quævis duo puncta necessario data primi generis continere & unam mediam datam secundi generis a denominatore $b = 2$ exhibitam eo modo arbitrariam, quo est $b = 2$. Si enim poneretur $b = 3$, tunc esset $F = \frac{0}{3} f + \frac{1}{3} f + \frac{1}{3} f + \frac{1}{3} f + \frac{1}{3} f + \frac{1}{3} f \ldots + \frac{1}{3} f + \frac{\frac{0}{3}}{\frac{0}{3} + \left(1 - \frac{0}{3}\right)} f$; & series fluentium determinatarum $M + M + M \ldots\ldots = \frac{0}{3} f + \frac{1}{3} f + \frac{2}{3} f + \frac{3}{3} f$
+

$$+ \frac{4}{3} f + \frac{5}{3} f + \frac{6}{3} f \ldots + \left(\frac{m'-1}{3}\right) f + \frac{\frac{o}{3}}{\frac{o}{3} + \left(1 - \frac{o}{3}\right)} f \text{; in}$$

quo casu inter duo puncta necessario determinata continentur insuper duo media arbitrio data a denominatore $b$ arbitrario $= 3$ constituta: & universim

$$F = \left( \frac{o}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ldots + \frac{1}{b} + \frac{\frac{o}{b}}{\frac{o}{b} + \left(1 - \frac{o}{b}\right)} \right) f \text{, erit}$$

vero $M + M + M \ldots\ldots$

$$= \left( \frac{o}{b} + \frac{1}{b} + \frac{2}{b} + \frac{3}{b} \ldots + \frac{b}{b} + \left(\frac{b+1}{b}\right) + \left(\frac{b+2}{b}\right) + \left(\frac{b+3}{b}\right) \ldots\ldots + \left(\frac{b+b}{b}\right) + \left(\frac{m'-1}{b}\right) \right) f$$

series arithemetica continens fluentes illas omnes determinatas tam a punctis necessario datis protonumerorum, quam ab illis, quæ interjacent inter hæc puncta, determinatis a denominatore $b$ arbitrio sumpto. Quæ puncta secundi generis tot sunt, quot unitates continentur in numero $b - 1$, a quibus totidem mediæ secundi generis arbitrio datæ constituuntur.

§. 16. Ut vero a formula generali fluxionis $\left( \frac{\frac{m'-1}{b}}{\frac{m'-1}{b} + \left(1 - \left(\frac{m'-1}{b}\right)\right)} \right) f$ ( polito $m'$ numero terminorum seriei, a qua exhibetur quævis fluens tam necessario determinata, quam quævis intermedia ) separentur puncta primi generis a punctis secundi, animadvertatur oportet coefficientem $\frac{m'-1}{b}$ tunc in punctum necessario determinatum incidere, quando fluendo fit numerus integer, in quo casu series punctorum primi generis coefficientis $\frac{m-1}{1}$ §. 14. coincidit cum punctis primi generis coefficientis $\frac{m'-1}{b}$. Si itaque fiat $\frac{m-1}{1}$

$= \frac{m'-1}{h}$ invenies $m' = \frac{(m-1)h+1}{1}$ numerum integrum, qui dabit numerum terminorum, quibus opus est ut fluxio $\left(\frac{m'-1}{h}\right) f$ coincidat cum punctis primi generis fluxionis $\left(\frac{m-1}{1}\right) f$ : atque ideo dato $m$, termini seriei fluxionis $\left(\frac{m'-1}{h}\right) f$ tot erunt, quot unitates continentur in numero integro $\frac{(m-1)h+1}{1}$. Itaque si fiat $m = 1$, quando scilicet fluxio nulla primi generis $= \frac{o}{1} f$, & terminus seriei 1, erit item $m' = 1$, & fluxio $\frac{o}{h} f$ item nulla, & utraque coincidit in punctum A necessario determinatum utpote primum protonumeri punctum, a quo fluxio initium sumit: licet vero utraque sit zero, tamen coefficientes $\frac{o}{1}$, $\frac{o}{h}$ natura differre censendi sunt. Facto $m = 2$, erit $m' = \frac{(2-1)h+1}{1} = h + 1$, qui erit numerus terminorum necessarius, ut fluxio $\left(\frac{m'-1}{h}\right) f$ æquetur fluxioni $\left(\frac{m-1}{1}\right) f$ in altero puncto necessario B extremo protonumeri AB. Et universim facto $m - 1 = g$, erit $m' = \frac{gh+1}{1}$ numerus terminorum necessarius, antequam fluxio $\left(\frac{m'-1}{h}\right) f$ attingat extremum punctum fluxionis $\left(\frac{m-1}{1}\right) f$, posito numero terminorum $m = g + 1$. Quare

I. $m' = \frac{(m-1)h+1}{1}$ dabit numerum terminorum sive fluentium determinatarum seriei coefficientis $\frac{m'-1}{h}$, antequam hic coefficiens integer fiat æqualis

$m-1$.

$\frac{m-1}{1} = \frac{(g+1)-1}{1}$, & fluxio incidat in punctum necessarium utrique commune: Secunda vero æquatio

II. $\frac{m'-1}{b} = \left(\frac{m-1}{1}\right) \frac{b}{b} = g \frac{b}{b}$ dabit coefficientem integrum utrique communem:

III. $m'-2 = \left(\frac{m-1}{1}\right) b - 1$ dabit numerum mediarum determinatarum secundi generis inter extremas primi generis interjacentium: in qua tamen formula $m'$ non potest esse minor 2. Nam facta $m = 1$, erit $m'-2 = ob-1$, & $(m'+1) - 2 = o$, sive numerus mediarum nullus, cum extremæ hîc non nisi ad unam $\frac{o}{1} f$ reducantur: & ipsa mediarum notio duas extremas datas inter se distinctas primum requirat.

§. 17. Ut igitur in quacumque suppositione valoris denominatoris $b$ inveniatur formula generalis, qua liceat puncta determinata primi generis a punctis secundi generis dignoscere atque separare, fluens quævis M hisce duabus sequentibus formulis efferatur

$$1.^a\ M = \left(\frac{\frac{m-1}{1}}{\frac{m-1}{1} - \left(-1 + \frac{m-1}{1}\right)}\right) f + \left(\frac{\frac{m'-1}{b}}{\frac{m'-1}{b} + \left(1 - \left(\frac{m'-1}{b}\right)\right)}\right) f$$

$$2.^a\ M = \left(\frac{\frac{m-1}{1}}{\frac{m-1}{1} - \left(-1 + \frac{m-1}{1}\right)}\right) f - \left(\frac{\frac{m'-1}{b}}{\frac{m'-1}{b} + \left(1 - \left(\frac{m'-1}{b}\right)\right)}\right) f$$

in quibus $m$ est numerus terminorum seriei §. 14. puncta tantum determinata primi generis exhibentis: $m'$ vero est numerus terminorum datorum, qui a punctis secundi generis determinatur, fluente $m'$ ab 1 usque ad $b$, ut habeantur tantum mediæ omnes successive in fluxu determinatæ a punctis secundi generis. In formula $1.^a$ minimus terminus $m' = 1$, quando scilicet fluxus primi generis $\frac{o}{1} f$ nullus est in puncto A, a quo determinatur initium fluxus: & facto $m' = 1$ valori minimo, erit fluxus nullus secundi generis $\frac{o}{b} f$, qui

coin-

coincidit cum primo in punctum commune A: est enim $\frac{o}{1} = \frac{o}{h} = o =$ A: & fluens M $= \frac{o}{1}f + \frac{o}{h}f$, quæ in duas fluentes dividitur utrasque ab eodem puncto A prorumpentes, scilicet M $= \frac{o}{1}f$, M $= \frac{o}{h}f$. Fluente $m'$ ab 1 usque ad $h$, & manente constanti $\frac{o}{1}f$ determinantur in fluxu successive fluentes omnes mediæ secundi generis inter $\frac{o}{1}f = \frac{o}{h}f$, & $\frac{h}{h}f$: facto $m' = h + 1$, cum sit $\frac{h}{h}f = \left(\frac{(h+1)-1}{h}\right)f = \left(\frac{(1+\frac{1}{h})-\frac{1}{h}}{1}\right)f$

$$= \left(\frac{(1+1)-1}{1}\right)f = \left(\frac{2-1}{1}\right)f = \frac{1}{1}f = AB:$$

$$\& M = \left(\frac{\frac{1-1}{1}}{\frac{1-1}{1} - \left(-1+\frac{1-1}{1}\right)}\right)f + \left(\frac{\frac{(h+1)-1}{h}}{\frac{(h+1)-1}{h} + \left(1-\left(\frac{(h+1)-1}{h}\right)\right)}\right)f$$

$$= \left(\frac{\frac{2-1}{1}}{\frac{2-1}{1} - \left(-1+\frac{2-1}{1}\right)}\right)f + \left(\frac{\frac{1'-1}{h}}{\frac{1'-1}{h} + \left(1-\left(\frac{1'-1}{h}\right)\right)}\right)f$$

$$= \frac{1}{1}f + \left(\frac{\frac{m'-1}{h}}{\frac{m'-1}{h} + \left(1-\left(\frac{m'-1}{h}\right)\right)}\right)f.$$ Quare facto $m' = 2$, erit $\left(\frac{m-1}{1}\right)f = \frac{1}{1}f =$ AB secundum punctum primi generis, & facto $m' = 1$, fit $\left(\frac{m'-1}{h}\right)f = \frac{o}{h}f =$ B alteri extremo protonumeri AB, quocum commiscetur. Manente constanti $\left(\frac{2-1}{1}\right)f =$ AB, fluat nunc $m'$ ab 1 us-

usque ad $b$, habentur fluentes omnes intermediæ inter $\frac{1}{1}f$, & $\frac{1}{1}f$

$$+\left(\frac{\frac{(b+1)-1}{b}}{\frac{(b+1)-1}{b}+\left(1-\left(\frac{(b+1)-1}{b}\right)\right)}\right)f = 2\,\frac{\frac{b}{b}}{\frac{b}{b}}f = 2\,\frac{1}{1}\,.\,f;$$ & for-

mula fit $$M = \left(\frac{\frac{2-1}{1}}{\frac{2-1}{1}-\left(-1+\frac{2-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{m'-1}{b}}{\frac{m'-1}{b}+\left(1-\left(\frac{m'-1}{b}\right)\right)}\right)f$$

& sic ad infinitum successive progrediendo ex formula $\left(\frac{m-1}{1}\right)f$ habentur puncta data generis primi, cum $m-1$ in fluxu suo non determinetur nisi successive a serie numerorum naturalium $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ : & ex formula $\frac{\left(\frac{m'-1}{b}\right)}{1}f$, fluente $m'$ ab $1$ usque ad $b+1$, transitus fit successive per seriem $\frac{0}{b}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b} \ldots \frac{(b+1)-1}{b}$ a fluente $\left(\frac{m-1}{1}\right)f$ ad fluentem $\left(\frac{m-1}{1}\right)f + \frac{b}{b}f = \frac{m}{1}f$, & sic ad infinitum fluendo transitus fit a primo puncto determinato A primi generis ad secundum, & inde ad tertium &c. per omnia puncta intermedia secundi generis ope formulæ superioris 1.ª cujus

fluens $\left(\frac{\frac{m-1}{1}}{\frac{m-1}{1}-\left(-1+\frac{m-1}{1}\right)}\right)f$ dat successive omnia puncta data primi

generis: fluens vero $\left(\frac{\frac{m'-1}{b}}{\frac{m'-1}{b}+\left(1-\left(\frac{m'-1}{b}\right)\right)}\right)f$ omnia puncta data generis secundi.

§. 18. Hisce præmissis facta tam $m$, quam $m'$ minima $=1$ valori minimo, quem suscipere potest utraque series, fiat primum

M=

$$M = \left( \frac{\frac{1-1}{1}}{\frac{1-1}{1} - \left(-1 + \frac{1'-1}{1}\right)} + \frac{\frac{1'-1}{1}}{\frac{1'-1}{1} + \left(1 - \left(\frac{1'-1}{1}\right)\right)} \right) f$$ ſumpto conſtanti $m = \frac{1'-1}{1}$, & $m'$ ab 1 uſque ad $b + 1$ fluente, a qua exhibetur fluxio continua ab A incipiens

$$F = \left( \frac{\frac{o}{1}}{1} + \frac{\frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{b}}{1} \ldots\ldots + \frac{\frac{1}{b}}{1} \right) f$$

quæ a puncto A per omnia intermedia puncta tranſiens in ſingulis determinatur uſque ad B : hæc dabit ſeriem fluentium illarum omnium determinatarum tam primi generis quam ſecundi, quibus fluxus continuus puncti ab A uſque ad B fluentis occurrit. Series vero fluentium determinatarum a communi puncto A originis prorumpentium erit ſequens M + M + M . . . . . . .

$$= \left( \left( \frac{o}{1} + \frac{o}{b} \right) + \left( \frac{o}{b} + \frac{1}{b} \right) + \left( \frac{o}{b} + \frac{2}{b} \right) + \left( \frac{o}{b} + \frac{3}{b} \right) + \left( \frac{o}{b} + \frac{4}{b} \right) + \left( \frac{o}{b} + \frac{5}{b} \right) \ldots\ldots\ldots + \left( \frac{o}{b} + \frac{b}{b} \right) \right) f$$

$= \left( \frac{o}{b} + \frac{1}{b} + \frac{2}{b} + \frac{3}{b} + \frac{4}{b} + \frac{5}{b} \ldots + \frac{b}{b} \right) f$ 1.ª Ex iſtis fluentibus prima $M = \frac{o}{b} f$ minima, quæ coincidit cum $\frac{o}{1} f$, & maxima $\frac{b}{b} f = \frac{1}{1} f$ erunt determinatæ primi generis neceſſariæ, incidens prima in punctum A, ſecunda in punctum B protonumeri A B extrema : intermediæ ſingulæ erunt determinatæ ſecundi generis, quæ ſimul cum ſuperioribus dant tot fluentes utriuſque generis, quot ſunt unitates in $b + 1$, a quo numero ſi dematur prima & ultima, remanent mediæ numero $(b + 1) - 2 = b - 1$, & ſeries mediarum incipit ab $\frac{1}{b} f$, & deſinit in $\left(\frac{b-1}{b}\right) f$. Extremæ vero cum intermediis dant ſeriem arithemeticam continuam $\left( \frac{o}{b} + \frac{1}{b} \ldots\ldots \frac{b}{b} \right) f$ differentia conſtanti $\frac{1}{b}$. Sumatur nunc extrema $M = \frac{b}{b} f = \frac{1}{1} f$

=

$$=\left(\frac{\frac{2-1}{1}}{\frac{2-1}{1}-\left(-1+\frac{2-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{1'-1}{h}}{\frac{1'-1}{h}+\left(1-\left(\frac{1'-1}{h}\right)\right)}\right)f,$$ & posita

prima $\frac{1}{1}f$ constanti, fluat secunda ut in casu superiori, ut sit

$F=\left(\frac{1}{1}+\frac{o}{h}+\frac{1}{h}+\frac{1}{h}+\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\right)f$, & series fluentium $M+M+M\ldots$

$$=\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{o}{h}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{h}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{h}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{3}{h}\right)\ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{1}+\frac{(h+1)-1}{h}\right)\right)f=\left(\frac{1}{1}+\left(1+\frac{\frac{2'-1}{h}}{1}\right)+\left(1+\frac{\frac{3'-1}{h}}{1}\right)+\left(1+\frac{\frac{4'-1}{h}}{1}\right)\ldots\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{(h+1)-1}{h}\right)\right)f=\left(\frac{h}{h}+\frac{h+1}{h}+\frac{h+2}{h}+\frac{h+3}{h}+\frac{h+4}{h}\ldots\ldots\ldots,\right.$$

$\left.+\frac{h+h}{h}\right)f$ 2.ª in qua extremæ determinatæ primi generis sunt $AB$, $AB+BC$ $=AC$; & mediæ numero $h-1$ ( incipiente $\frac{o}{h}f$ hîc a puncto B ) interjacent cum suis extremis punctis intra B & C, diviso protonumero BC in tot æquales partes, ut supra, quot unitates habet $h$. Hinc si 1.ª & 2.ª series addantur, constituent eamdem Seriem arithmeticam differentia $\frac{1}{h}$, nempe

$$M+M+M\ldots=\left(\frac{1-1}{h}+\frac{2-1}{h}+\frac{3-1}{h}+\frac{4-1}{h}+\frac{5-1}{h}+\frac{6-1}{h}\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(h+1)-1}{h}+\frac{(h+2)-1}{h}+\frac{(h+3)-1}{h}+\frac{(h+4)-1}{h}\ldots+\frac{(h+h+1)-1}{h}\right)f,$$

in qua inter $\frac{o}{h}$ & $\frac{h}{h}$ tot mediæ determinatæ secundi generis inveniuntur, quot inter $\frac{h}{h}$, & $\frac{2h}{h}$. Sed quoniam sumpta

$$\mathrm{M} = \left( \frac{\frac{2-1}{1}}{\frac{2-1}{1} - \left( -1 + \frac{2-1}{1} \right)} \right) f + \left( \frac{\frac{1'-1}{h}}{\frac{1'-1}{h} + \left( 1 - \left( \frac{1'-1}{h} \right) \right)} \right) f, \text{ in}$$

loco $\frac{o}{h}$, quivis terminus $\frac{o}{l}$ utpote æqualis ſubſtitui poteſt, ſi fiat M

$$= \frac{1}{1} f + \left( \frac{\frac{1'-1}{l}}{\frac{1'-1}{l} + \left( 1 - \left( \frac{1'-1}{l} \right) \right)} \right) f, \text{ invenies feriem fluentium}$$

determinatarum ſequentem $\mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{M} \ldots = \left( \frac{(l+1)-1}{l} + \frac{(l+2)-1}{l} \right.$

$$\left. + \frac{(l+3)-1}{l} + \frac{(l+4)-1}{l} \ldots + \frac{(l+l+1)-1}{l} \right) f$$

$= \left( \frac{l}{l} + \frac{l+1}{l} + \frac{l+2}{l} + \frac{l+3}{l} \ldots + \frac{2\,l}{l} \right) f$, quæ eſt ſeries arithmetica differentiæ conſtantis $\frac{1}{l}$, quæ nullo modo cum ſuperiori conjungi poteſt, utpote omnino ab ea diverſa.

§. 19. Hinc conſequitur (quod multum intereſt advertere) fluentes intermedias determinatas ſecundi generis inter quaſvis duas datas primi generis eamdem ſeriem arithmeticam continuam producere, utpote genitam a formula M

$= \left( \frac{m-1}{1} \right) f + \left( \frac{\frac{m'-1}{h}}{\frac{m'-1}{h} + \left( 1 - \left( \frac{m'-1}{h} \right) \right)} \right) f$, cujus denominator $h$ arbitrio ſumptus in prima fluxione $\left( \frac{\frac{1'-1}{h}}{1} \right) f = \frac{o}{h} f$ idem perſeveret neceſſe eſt in ſequentibus terminis, donec fiat $m' = (h+1) - 1$: in quo caſu $\left( \frac{(h+1)-1}{h} \right) f = \frac{h}{h} f = \frac{1}{1} f = \frac{g}{g} f$, &c.: atque ideo tam loco $\frac{1}{1} f$

+

$$+ \frac{\frac{o}{h}}{\frac{o}{h}+\left(1-\frac{o}{h}\right)} f$$ , quæ est minima data primi generis, quam loco

$$\frac{1}{1} f + \frac{h}{h} f = \frac{2}{1} f + \frac{\frac{o}{l}}{\frac{o}{l}+\left(1-\frac{o}{l}\right)} f$$ extrema maxima generis primi, quævis diversa series arithmetica sumi potest, sumpta vel minima M

$$= \frac{1}{1} f + \frac{\frac{1'-1}{l}}{\frac{1'-1}{l}+\left(1-\left(\frac{1'-1}{l}\right)\right)}) f$$ , vel maxima $= \frac{1}{1} f$

$$+ \left( \frac{\frac{(h+1)-1}{h}}{\frac{(h+1)-1}{h}+\left(1-\left(\frac{(h+1)-1}{h}\right)\right)}\right) f = \frac{3-1}{1} f + \frac{\frac{o}{g}}{\frac{o}{g}+\left(1-\frac{o}{g}\right)} . f.$$

At in casibus intermediis $\frac{m'-1}{h} = \frac{2}{h} = \frac{3}{h} = \frac{n}{h}$ est fractio a quavis alia fractione diversi denominatoris valore diversa, quæ retento eodem numeratore $m' - 1 = n$ non potest alteri ejusdem valoris subrogari. Intra igitur duo extrema puncta data primi generis quævis sed semper eadem series arithmetica fluentium determinatarum secundi generis existat oportet, quibus prætergressis diversa subsequi vel anteire intra duo alia primi generis rite potest. Quare si in formula generali 1.ª fluentium §. 17. quæ a puncto quovis primi generis B vel C &c. successive ad alterum C vel D &c. fluendo determinantur in punctis intermediis secundi generis, fiat numerus terminorum primæ seriei $m = g+1$, cujus minimus valor 1 quando $g = o$, procedente $g$ per seriem numerorum naturalium $o$, 1, 2, 3 . . . . . & numerus terminorum $m'$ secundæ seriei ponatur $= n + 1$, fluente $n$ per seriem $o$, 1, 2, 3 . . . . $h$ usque ad $h$,

erit formula $$M = \frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\left(\frac{(g+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+1)-1}{1}\right)\right)} f$$



+

$$+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h}+1-\left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)}\right)f$$: in qua $g$ sumendus est constans, dum interim $n$ a $o$ usque ad $h$ fluendo pervenit. Hæc enim in limite minimo, quando $n = o$, & $m' = n + 1 = 1$, est $M = gf$ minima; in limite maximo, quando $n = h$, & $m' = h + 1$, fit $gf + \frac{h}{h} f = (g+1) f$ maxima; & in casibus mediis habentur successive fluentes datæ secundi generis inter $gf$ & $(g+1) f$. Hisce vero limitibus transgressis, aucta $g$ unitate, habentur fluentes mediæ inter $(g+1) f$ & $(g+2) f$, & sic successive & indefinite per partes progrediendo (punctis primi generis manentibus semper iisdem utpote necessariis) habentur inter hæc utraque proximiora quotvis mediæ datæ secundi generis numero $h - 1$ ad libitum, cum denominator $h$ intra hosce limites ab arbitrio nostro pendeat.

§. 20. Cum fluens formulæ superioris M fit $= \left(\frac{g+\frac{n}{h}}{1}\right) f$ sponte sua traducitur ad sequentem $\left(\frac{g+1-\left(1-\frac{n}{h}\right)}{1}\right) f$, fitque fluens

$$M = \left(\frac{\frac{(g+2)-1}{1}}{\frac{(g+2)-1}{1}-\left(-1+\frac{(g+2)-1}{1}\right)}\right)f - \left(\frac{\frac{((h-n)+1)-1}{h}}{\frac{((h-n)+1)-1}{h}+1-\left(\frac{((h-n)+1)-1}{h}\right)}\right)f,$$

quæ in locum primæ, utpote huic æqualis, rite quidem substitui potest. Sed facta hac transformatione fluentes hujusce ultimæ formulæ inverso modo fluendo procedunt, quo in prima progrediebantur. In illa enim a minima $\frac{gf}{1}$ incipientes progrediebantur fluxu positivo usque ad maximam $\left(\frac{g+1}{1}\right) f$: in hac a maxima $= \left(\frac{g+1}{1}\right) f$ fluxu contrario retrocedentes usque ad minimam $\frac{gf}{1}$ descendunt.

dunt. Nam in hac numerus terminorum seriei est $m = g+2$: ergo minimus $m = 2$, quando $g = o$, & facto $m' = b - n + 1 = 1$, hoc est $n$ maximo $= b$, M fit minima $= \frac{gf}{1}$. Ergo in prima formula numerus terminorum $m' = n + 1$ successive augetur per Seriem $o, 1, 2, 3 \ldots$ usque ad $b$; in secunda numerus terminorum $m' = (b-n) + 1$ successive minuitur per eamdem seriem sed inversam $b, b-1, b-2 \ldots$ usque ad $b-b$ $= o$. Itaque posita A B $= \frac{gf}{1}$ (*Fig.* 15.) erit in prima M $= \left(\frac{gf}{1} + \frac{n}{b}\right)f =$ AB+Be: in secunda M$= \left(\left(\frac{g+1}{1}\right) - \left(\frac{b-n}{b}\right)\right) f$ $=$ AC $-$ (CB $-$ Be) $=$ AC $-$ Ce $=$ Ae eadem ac prima: sed in prima fluxio minima $=$ AB a puncto B crescendo fluit usque ad maximam in C; in secunda contra fluxio, quæ est maxima in C, retrocedendo decrescit usque ad minimam AB in B. Quare formulæ 1.ª & 2.ª §. 17. (ut suo muneri singulæ satisfaciant, quin quantitas fluxus singularum immutetur, & ut proinde alterutra sumi ad libitum possit) erunt sequenti modo efferendæ

$$\text{I.}^{a}\ M = \left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right)f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{b}}{\frac{(n+1)-1}{b} + \left(1 - \left(\frac{(n+1)-1}{b}\right)\right)}\right)f$$

$$\text{II.}^{a}\ M = \left(\frac{\frac{(g+2)-1}{1}}{\frac{(g+2)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+2)-1}{1}\right)}\right)f - \left(\frac{\frac{((b-n)+1)-1}{b}}{\frac{((b-n)+1)-1}{b} + \left(1 - \left(\frac{((b-n)+1)-1}{b}\right)\right)}\right)f.$$

§. 21. Ex istis formulis generalibus quædam Corollaria notatu digna sunt eruenda.

Coroll. 1. Posita in utraque formula eadem constante $g$, & crescente in utraque $n$ a $o$ usque ad $b$, vel in utraque decrescente ab $b$ usque ad $o$, fluens M in utraque formula est æqualis & eadem: sed in primo casu utraque fluendo crescit, & viceversa; in secundo utraque fluendo decrescit: facta igitur

$$\text{III.}^{a}\ M = \left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right)f + \left(\frac{\frac{(b-n+1)-1}{b}}{\frac{(b-n+1)-1}{b} + \left(1 - \left(\frac{(b-n+1)-1}{b}\right)\right)}\right)f$$

IV.ª

$$\text{IV.}^{a}\ M = \left( \frac{\frac{(g+2)-1}{1}}{\frac{(g+2)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+2)-1}{1}\right)} \right) f - \left( \frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h} + \left(1 - \left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)\right)} \right) f ;$$

& in singulis quatuor formulis fluente $n$ a $o$, 1, 2, 3 . . . . . usque ad $h$, fluentes in I.$^a$ & II.$^a$ fluendo crescunt, in III.$^a$ & IV.$^a$ fluendo decrescunt; contra vero fluente $n$ ab $h$, $h-1$, $h-2$ . . . . . . usque ad $h-h=o$, III.$^a$ & IV.$^a$ fluentes crescunt fluendo, in I.$^a$ & II.$^a$ decrescunt. Itaque crescente I.$^a$ æquali intervallo decrescit III.$^a$ ita ut posita I.$^a$ $M = AB + Be$, erit III.$^a$ $M = AB + BC - Ce'$: in quibus $Be = Ce'$ utpote $= \frac{n}{h} f$, sed non identicus: & facta I.$^a$ maxima $AB + BC = AC$, erit III.$^a$ $= AB + BC - CB = AB$ minima: & viceversa facta I.$^a$ minima $= AB + oB$, erit III.$^a$ maxima $= AB + BC - oC = AC$. Idem eveniet formulis II.$^a$ & IV$^a$. Quare I.$^a$ & III.$^a$, nec non II.$^a$ & IV$^a$, vel I.$^a$ & IV$^a$, II.$^a$ & III.$^a$ quæ nunquam inter se æquales fiunt, nisi in unico casu quando $n = \frac{h}{h}$, dicuntur a nobis jure homologæ: erunt vero æquales & identicæ I.$^a$ & II.$^a$; III.$^a$ & IV$^a$.

§. 22. Coroll. 2. Quod si ponatur in I.$^a$ fluere successive $n$, in secunda vero $h-n$ per eamdem seriem $o$, 1, 2, 3 . . . . . $h$: vel in hac II.$^a$ $n$ per seriem $h$, $h-1$, $h-2$ . . . $h-h$: aut viceversa tam $n$ in I.$^a$, quam $h-n$ in II.$^a$ per seriem $h$, $h-1$, $h-2$ . . . . $h-h$; I.$^a$ & II.$^a$ non amplius sunt æquales, sed fiunt homologæ. Et in primo casu fluens M I.$^a$ a minima $gf$ crescit usque ad maximam $(g+1)f$; fluens vero M II.$^a$ a maxima $(g+1)f$ usque ad minimam $gf$ decrescit. In casu vero secundo fluens I.$^a$ M a maxima $(g+1)f$ decrescit usque ad minimam $gf$, & viceversa II.$^a$: permutantur itaque in hoc secundo casu fluentes, & I.$^a$ fit II.$^a$; II.$^a$ vero convertitur in I$^{am}$. At I.$^a$ & III.$^a$; II.$^a$ & IV.$^a$ fiunt æquales, quæ erant homologæ in suppositione §. superioris. Hoc posito (ut brevitatis gratia in una tantum suppositione me contineam) ponatur tam $n$ in I.$^a$, quam $h-n$ in II.$^a$ successive & continuo fluere per seriem $o$, 1, 2, 3 . . . . . usque ad $h$; erit series I.$^a$ fluentium datarum tam primi generis, quam secundi a puncto originis A prorumpentium intra limites a formula I.$^a$ constitutos sequens.

$$M + M + M \ldots = \left( \left(g + \frac{o}{h}\right) + \left(g + \frac{1}{h}\right) + \left(g + \frac{2}{h}\right) + \left(g + \frac{3}{h}\right) \ldots + \left(g + \frac{h}{h}\right) \right) f \;(P)$$

& se-

& series fluentium intra limites a formula II.ª jussos

$$M+M+M\ldots=\left(\left((g+1)-\frac{o}{h}\right)+\left((g+1)-\frac{1}{h}\right)+\left((g+1)-\frac{2}{h}\right)\right.$$
$$\left.+\left((g+1)-\frac{3}{h}\right)\ldots+\left((g+1)-\frac{h}{h}\right)\right)f(Q).$$

Sumpta serie fluentium P, quæ continet fluentes intra $g$ minimam, & $g+1$ maximam, si in singulis ejus terminis ponatur successive $g=o, 1, 2, 3\ldots\infty$ seriei scilicet numerorum naturalium nullo termino definitæ, haberentur posito primum $g=o$, fluentes singulæ secundi generis a minimo $o$ usque ad $1$ maximum: deinde facto $g=1$, fluentes singulæ intra $1$ & $2$, & sic successive usque ad $\infty$ per partes procedendo obtinebimus fluentes secundi generis successive crescentes, ab A singulas prorumpentes, illas primum, quæ continentur intra A, & AB; secundo intra AB & BC, & sic successive ad infinitum. At sumpta serie Q, in qua a maxima fluente progredimur usque ad minimam, numerus constans $g$ quocumque dato major sumi potest, per $1$ successive descendens. Itaque $g$ per seriem $\infty+1$, $\infty$, $\infty-1$, $\infty-2\ldots\ldots g+1$, $(g+1)-1$, $(g+1)-2$, $(g+1)-3\ldots\ldots(g+1)-(g+1)$ usque ad $o$ successive procedit, & series Q continebit fluentes singulas datas secundi generis a quacumque maxima $(\infty+1)f$ usque ad $o$ decrescentes successive intra limites primi generis $(\infty+1)f$, $\infty f$, $(\infty-1)f$, $(\infty-2)f\ldots(\infty-(\infty-g+1))f=(g-1)f$, $(\infty-(\infty-g+2))f=(g-2)f\ldots\ldots$ usque ad $(g-g)f=of$.

§. 23. Coroll. 3. Quare Series successiva & continua omnium fluentium datarum primi & secundi generis formulæ I.ª a $o$ usque ad quemvis terminum datum, sive ad quodvis punctum datum ad libitum profluentium sic per partes erit eruenda

$$g=o;\ M+M\ldots=\left(\left(o+\frac{o}{h}\right)+\left(o+\frac{1}{h}\right)+\left(o+\frac{2}{h}\right)+\left(o+\frac{3}{h}\right)\ldots\right.$$
$$\left.+\left(o+\frac{h}{h}\right)\right)f=\left(\frac{o}{h}+\frac{1}{h}+\frac{2}{h}+\frac{3}{h}\ldots+\frac{h}{h}\right)f;$$

$$g=1;\ M+M\ldots=\left(\left(1+\frac{o}{h}\right)+\left(1+\frac{1}{h}\right)+\left(1+\frac{2}{h}\right)+\left(1+\frac{3}{h}\right)\ldots\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{h}{h}\right)\right)f=\left(\frac{h}{h}+\frac{h+1}{h}+\frac{h+2}{h}+\frac{h+3}{h}\ldots+\frac{2h}{h}\right)f;$$

$$g=2;\ M+M\ldots=\left(\left(2+\frac{o}{h}\right)+\left(2+\frac{1}{h}\right)+\left(2+\frac{2}{h}\right)+\left(2+\frac{3}{h}\right)\ldots\right.$$
$$\left.+\left(2+\frac{h}{h}\right)f=\left(\frac{2h}{h}+\frac{2h+1}{h}+\frac{2h+2}{h}+\frac{2h+3}{h}\ldots+\frac{3h}{h}\right)f\right.$$

$g=\infty$ :

$$g=\infty;\ M+M\ldots=\left(\left(\infty+\frac{o}{h}\right)+\left(\infty+\frac{1}{h}\right)+\left(\infty+\frac{2}{h}\right)+\left(\infty+\frac{3}{h}\right)\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\infty+\frac{h}{h}\right)\right)f=\left(\frac{\infty h}{h}+\frac{\infty h+1}{h}+\frac{\infty h+2}{h}+\frac{\infty h+3}{h}\ldots+\frac{\infty+h}{h}\right)f$$

& sic successive progrediendo, facto $g=\infty+1$; $g=\infty+2\ldots.$ $g=\infty+\infty$; $g=2\infty+1\ldots.$ $g=3\infty$; $g=3\infty+1\ldots.$ obtinebitur series fluentium a puncto A fixo ac determinato prorumpentium, quæ fluendo nullo unquam quovis limite coerceri possunt; semper enim hac methodo cuicumque $g=K\infty$ semper addi posse 1 quis non videt? Series vero fluentium quæ exhibentur a formula II.ª fluente successive $h-n$ per seriem $o$, 1, 2... usque ad $h$, erit sequens, posito $K\infty$ quovis termino tamquam ultimo ad libitum sumpto,

$$g=K\infty;\ M+M\ldots.=\left(\left(K\infty-\frac{o}{h}\right)+\left(K\infty-\frac{1}{h}\right)+\left(K\infty-\frac{2}{h}\right)\right.$$
$$\left.+\left(K\infty-\frac{3}{h}\right)\ldots+\left(K\infty-\frac{h}{h}\right)\right)f=\left(\frac{K\infty h}{h}+\frac{K\infty h-1}{h}+\frac{K\infty h-2}{h}\right.$$
$$\left.+\frac{K\infty h-3}{h}\ldots+\frac{K\infty h-h}{h}\right)f$$

$$g=K\infty-1;\ M+M\ldots\ldots=\left(\left((K\infty-1)-\frac{o}{h}\right)+\left((K\infty-1)-\frac{1}{h}\right)\right.$$
$$\left.+\left((K\infty-1)-\frac{2}{h}\right)+\left((K\infty-1)-\frac{3}{h}\right)\ldots\ldots+\left((K\infty-1)-\frac{h}{h}\right)\right)f$$
$$=\left(\frac{(K\infty-1)h}{h}+\frac{(K\infty-1)h-1}{h}+\frac{(K\infty-1)h-2}{h}+\frac{(K\infty-1)h-3}{h}\ldots\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(K\infty-1)h-h}{h}\right)f$$

& sic successive posito $g=K\infty-2$, $K\infty-3\ldots.$ $K\infty-(\infty-1)=(K-1)\infty+1\ldots.$, $K\infty-(K\infty-l)\ldots.$ ac tandem $g=(K-K)\infty=o$.

$$g=o;\ M+M\ldots=\left(\left(1-\frac{o}{h}\right)+\left(1-\frac{1}{h}\right)+\left(1-\frac{2}{h}\right)+\left(1-\frac{3}{h}\right)\ldots\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{h}{h}\right)\right)f=\left(\frac{h}{h}+\frac{h-1}{h}+\frac{h-2}{h}+\frac{h-3}{h}+\frac{h-h}{h}\right)f.$$

Itaque si fiat $K\infty-(K\infty-l)=K\infty-(K\infty-(g+1))$, erit in formula II.ª

(po-

( posito $g = K\infty - (K\infty - (g+1)) = g+1$ ) series fluentium M+M...

$$= \left(\left((g+1) - \frac{o}{h}\right) + \left((g+1) - \frac{1}{h}\right) + \left((g+1) - \frac{2}{h}\right) + \left((g+1) - \frac{3}{h}\right) \ldots + \left((g+1) - \frac{h}{h}\right)\right) f \text{ ; \& M+M} \ldots$$

$$= \left(\frac{(g+1)h}{h} + \frac{(g+1)h-1}{h} + \frac{(g+1)h-2}{h} + \frac{(g+1)h-3}{h} \ldots + \frac{(g+1)h-h}{h}\right) f$$

vel si ponatur in formula II.ª $n = h - n$, fluente $n$ a $o$ usque ad $h$ ut sit formula II.ª

$$M = \left(\frac{\frac{(g+2)-1}{1}}{\frac{(g+2)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+2)-1}{1}\right)}\right) f - \left(\frac{\frac{h-(h-n)}{h}}{\frac{h-(h-n)}{h} + 1 - \left(\frac{h-(h-n)}{h}\right)}\right) f$$

se se offert eadem fluentium series descendens M + M .....

$$= \left(\frac{(g+1)h}{h} + \frac{(g+1)h-1}{h} + \frac{(g+1)h-2}{h} + \frac{(g+1)h-3}{h} \ldots + \frac{(g+1)h-h}{h}\right) f :$$

qua a maxima fluente $\frac{(g+1)}{1} f$ usque ad minimam $\frac{gf}{1}$ fit descensus. At si fluat $n$ ab $h$ per seriem $h-1$, $h-2$, ... usque ad $h-h=o$ fit a minima $\frac{gf}{1}$ usque ad maximam $\frac{\left(\frac{(g+1)h}{h}\right)}{1} f = \left(\frac{g+1}{1}\right) f$ ascensus.

§. 24. Coroll. 4. Ex quibus elegans & apprime necessaria ad tollendas gravissimas difficultates, quibus implicatur Analysis vetus, exsurgit methodus; qua licet eamdem seriem fluentium determinatarum primi & secundi generis invenire tam illarum, quæ a $o$ usque ad $\infty$ progrediuntur, quam quæ ab $\infty$ ad $o$ inverso fluxu descendunt. Series in primo casu continet fluentes determinatas primi & secundi generis, quæ a puncto fixo ac dato A incipientes successive & ordine usque ad infinitum nullo modo limitandum procedunt. In secundo vero casu series fluentes continet, quæ a quavis magna fluente determinata primi generis initium sumentes ( cum $\infty$ abstracte sumptum nihil aliud significet, nisi quod nullo modo fluxus crescens ultimo determinari potest ) continuo inverso fluxu decrescunt. Quod ut facile consequamur, sumatur formula I.ª generalis fluentis §. 20, scilicet M

$$=\left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h}+\left(1-\left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)\right)}\right)f:$$

quæ singillatim dat fluentes intra limites $gf$ minimum, & $(g+1)f$ maximum constitutas, in qua, quando $g=o$, est minima $=\frac{o}{h}f$, posito $n=o$; nec non formula generalis IV.ª §. 21. fluentis M $=$

$$\left(\frac{\frac{(g+2)-1}{1}}{\frac{(g+2)-1}{1}-\left(-1+\left(\frac{(g+2)-1}{1}\right)\right)}\right)f-\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h}+1-\left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)}\right)f:$$

a qua singillatim inveniuntur fluentes intra maximam $\left(\frac{g+1}{1}\right)f$ & minimam $\frac{gf}{1}$, & in qua, posito $g=o$, est fluens $\frac{1}{1}f$ minima maximarum, & $\frac{o}{1}f$ minima minimarum inter puncta determinata primi generis existentium, in quarum utraque $n$ per seriem punctorum datorum $o, 1, 2, 3 \ldots h$ fluendo transiens in casibus mediis determinatur. In hac suppositione diximus §. 21. fluentem singulam formulæ I.ª nullo modo æquari posse cum formula IV.ª atque ideo homologas appellavimus, eo quia exhausta tota series singularum fluentium formulæ I.ª æquatur seriei omnium fluentium formulæ IV.ª Nam erit series fluentium formulæ I.ª $M+M+M \ldots = \left(\left(g+\frac{o}{h}\right)+\left(g+\frac{1}{h}\right)+\left(g+\frac{2}{h}\right)+\left(g+\frac{3}{h}\right) \ldots\ldots\ldots + \left(g+\frac{h}{h}\right)\right)f = \left(\left(g+\frac{h-h}{h}\right)+\left(g+\frac{h-(h-1)}{h}\right)+\left(g+\frac{h-(h-2)}{h}\right)+\left(g+\frac{h-(h-3)}{h}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(g+\frac{h-(h-h)}{h}\right)\right)f$; & series fluentium formulæ II.ª $M+M+M \ldots = \left(\left(g+\frac{h-o}{h}\right)+\left(g+\frac{h-1}{h}\right)+\left(g+\frac{h-2}{h}\right)+\left(g+\frac{h-3}{h}\right) \ldots\ldots\ldots +$

$$+\left(g+\frac{b-b}{b}\right)\Big)f=\left(\left(g+\frac{b-(b-b)}{b}\right)+\left(g+\frac{b-(b-b+1)}{b}\right)\right.$$
$$\left.+\left(g+\frac{b-(b-b+2)}{b}\right)\ldots\ldots+\left(g+\frac{b-(b-b+b)}{b}\right)\right)f$$

in quibus fluens prima I.$^a$ æquatur ultimæ IV,$^a$ & prima IV.$^{a}$ æquatur ultimæ I.$^a$ & sic successive: ita ut series I.$^a$ sit eadem ac series IV$^a$, sed inverso modo procedens. Quare nisi singulæ series exhauriantur inter hasce, æqualitatem frustra quæsiveris: exhauriuntur vero quando $n$ ponitur $= b$ ultimo termino seriei, ad quem pervenire potest, & series singula terminis numero $b+1$ constat, ac mediis numero $b-1$; cum $n+1$ sit numerus terminorum, & $(n+1) - 1 = n$ numerator fractionis respectivus.

§. 25. Coroll. 5. Si ad series ab utraque formula I.$^a$ & IV.$^a$ erutas attendamus, noverimus in singulis terminis seriei numerum $g$ semper constantem perseverare, fluere $\frac{n}{b}$. Sed $g$ est numerus integer indeterminatus, qui unum aut alterum ex terminis seriei $o, 1, 2, 3 \ldots \infty$ numerorum naturalium nunquam exhauriendæ repræsentat, & a quo numero $g$ determinatur numerus protonumerorum $f$, qui antecedunt punctum fluens secundi generis $\frac{n}{b} f$, fluente $n$ per seriem $o, 1, 2, 3 \ldots$ usque ad $b$, a quo habentur mediæ datæ intra limites $\frac{gf}{1}, \left(\frac{g+1}{1}\right) f$ in I$^a$; & inverso modo $\left(\frac{g+1}{1}\right) f$, $\frac{gf}{1}$ in IV$^a$. Ergo in utraque formula si $g$ determinetur, determinatur linea A B + B C + C D .... (*Fig*: 16.) in tot æquales partes $f$ divisa, quot unitates continentur in numero integro $g$, atque ideo determinantur puncta necessaria primi generis A, B, C, D .. cui $g$ si addatur successive series $\frac{o}{b}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b} \ldots \frac{b}{b}$ in I.$^a$, vel si in IV.$^a$ dematur successive eadem series, habentur successive mediæ omnes secundi generis, quæ intra limites necessarios $\frac{gf}{1}, \left(\frac{g+1}{1}\right) f$ continentur, quæ ostendunt in quot partes divisum velimus protonumerum ultimum $f$ a numero $g$ indicatum. Igitur manente eodem protonumero $f$ distantiæ punctorum primi generis A, B, C, D .... sunt necessariæ: mediæ vero pendent magnitudine, & numero a denominatore $b$, qui arbitrio relinquitur. In formulis igitur superioribus §§. 20. & 21 primus terminus, qui determinat puncta primi generis nihil pendet a termino secundo $\frac{n}{b} f$, neque influit in ipsum, qui viceversa nihil pendet a

 pri-

primo, nec in ipsum influit: atque ideo invicem separari possunt. Illud tamen est advertendum, quod in IV.$^a$ terminus constans $g$ non potest esse *zero* minor: si enim fieret $g = -1$, formula esset $\left(\frac{(-1+2)-1}{1}\right) f - \frac{n}{h} f = \left(\frac{(o+1)-1}{1}\right). - f + \left(\frac{(n+1)-1}{1}\right). - f$ quæ recidit in I.$^{am}$ mutata tantum protonumeri $f$ in oppositam plagam directione: & hæc fuit ratio, cur primum terminum IV.$^z$ per $\left(\frac{(g+2)-1}{1}\right) f$ exhibuimus: in qua si fiat $g = o$, erit minimus numerus terminorum seriei $= o + 2 = 2$, & minimus ipsius valor $= 1. f$.

§. 26. Coroll. 6. Illud etiam evincitur, nihil omnino immutari in supradictis formulis si loco $g$ ponatur in istis symbolum $\infty$, quod vulgo dicitur in genere infinitum. Numerus enim $\frac{g}{1}$ qui, ut vidimus, licet sit indeterminatus, tamen ob denominatorem 1 non nisi unum aut alterum terminum seriei $o$, 1, 2, 3 ... $\infty$, $\infty + 1$, $\infty + 2$ ..., $\infty + \overset{2}{\infty}$, .... singillatim significare potest, ipsum etiam quodcumque $\infty$ repræsentet oportet, dummodo numerus integer seriei superioris concipiatur. Quinimo symbolo hoc $\infty$, si recte advertas, nihil aliud intelligi debet, nisi numerus quicumque integer indeterminatus cujusvis magnitudinis, quod rectius per $g$ ad tollendas ambiguitates omnes exprimitur, cum universim $g$ per omnes magnitudines a $o$ usque ad quodcumque $\infty$ excurrere concipiatur, quod non æque bene τῷ $\infty$ convenit, si communem hujusce symboli $\infty$ notionem minus generalem accipiamus, ob quam intra infiniti limites, ejus valor contineri vulgo supponitur. Verum quicquid tribuitur formulis superioribus symbolo $g$ affectis id ad amussim convenit formulis symbolo $\infty$ in locum $g$ substituto: hac tamen differentia, quod, retenta communi τῷ $\infty$ notione, punctum ultimum, puta K, extremi protonumeri $f$ in serie dispositi, intervallo quovis magno a puncto originis A distare concipitur: & fluens AK in formulis superioribus $= \frac{\infty}{1} f$ infinite distans a puncto originis A est limes minimus, & AK + KL $= \left(\frac{\infty+1}{1}\right) f$ maximus, intra quos, retento eodem $h$, eadem series mediarum determinatarum secundi generis obtinetur, quæ intra limites cujusvis protonumeri $f =$ ex: gr: CD finite a puncto A distantis eruitur. Vel sumpto quovis alio denominatore K tot mediæ datæ invenientur, quot numerus K$-1$ requirit, eodem prorsus modo, quo licet in quovis alio protonumero a puncto A finito intervallo disfito, si denominator

idem

idem K in formula sumatur. Verum quod licet primo termino nostrarum formularum $\frac{(n+1)-1}{1}$ a $o$ usque ad quodvis $\infty$ progredienti, omnino secundo termino formulæ I.ª & IV.ª sive fractioni $\frac{(n+1)-1}{h}$ interdicitur. Ostendimus enim in hoc secundo termino non posse $n$ fluendo per seriem finitam $o, 1, 2, 3 \ldots h$ valorem $h$ excedere: ad quem perventus a secundo termino transit in primum, cui addito augetur primus unitate, fitque $\frac{g+1}{1}$; sed contra facto $\frac{n}{h} = \frac{h}{h} + \frac{o}{h}$, deprimitur ad $\frac{o}{h} f$ secundus terminus, & sic successive. Quare nisi $h$ ponatur $= \infty$, numerator $n$ fractionis $\frac{n}{h}$ nullo modo potest supponi $\infty$. At facto $h = \infty$, $n$ usque ad $\infty$ exsurgere quidem potest, sed medias determinatas secundi generis nullo modo obtineri posse §. 9. Coroll. 5. ostendimus. Qua vero ratione efferendus sit denominator $h$ si supponatur $\infty$, ut mediæ innotescant, Caput XIV. §. 12. & 13. manifeste declarabit.

§. 27. Coroll. 7. Formulæ fluentium superiores §. 20. & 21. eadem forma, qua efferuntur, satis clare ostendunt originem suam ducere a puncto A dato & immoto, ac deinde successive augeri, sive a $o$ ad quantum procedere. Quod si mente concipiatur fluentes hasce origine prorsus opposita a limite $\varpi'$ $\infty$ quavis ratione indeterminato originem sumere, & successive descendere ab hoc ad finitum, & hinc usque ad $o$, formulæ superiores ad aliam formam sunt reducendæ. Hanc vero facile consequimur si I.ª reducatur ad

$$\text{V.}^{am}\, M = \left( \frac{\frac{\infty-(\infty-(g+1))-1}{1}}{\frac{\infty-(\infty-(g+1))-1}{1} - \left(-1 + \left(\frac{\infty-(\infty-(g+1))-1}{1}\right)\right)} \right) f + \left( \frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h} + \left(1 - \left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)\right)} \right) f$$

& IV.ª ad

$$\text{VI.}^{am}\, M = \left( \frac{\frac{\infty-(\infty-(g+2))-1}{1}}{\frac{\infty-(\infty-(g+2))-1}{1} - \left(-1 + \frac{\infty-(\infty-(g+2))-1}{1}\right)} \right) f - \left( \frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h} + \left(1 - \left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)\right)} \right) f$$

Formulæ hujusmodi quoad effectum sunt eædem ac superiores, sed hæ supponuntur ab $\infty$ nullo limite definito prorumpentes saltu prope infinito ad finitum de-

depressæ. Nam in V.ª erit $\frac{\infty}{1}f = AZ$ (*Fig.* 14.), $\frac{\infty}{1}f - \frac{g}{1}f = AZ - AK$; posito $AK = \frac{g}{1}f$, & $\frac{\infty f - (\infty f - gf)}{1} = AZ - (AZ - AK) = AK = \frac{g}{1}f$: & in VI.ª $\frac{\infty f - (\infty f - (g+1)f)}{1} = AZ - (AZ - (AK + KL)) = AK + KL = \left(\frac{g+1}{1}\right)f$: quæ quidem quoad valorem idem significant, sed quoad originem immenso prope spatio nunquam definiendo distant. In V.ª posito $g$ minimo $= o$, erit $\frac{\infty f - (\infty f - (o+1)f)}{1}$ maxima: ergo $\frac{\infty f - (\infty f - of)}{1} = \frac{o}{1}f$ minima; quæ ab $\infty$ valore & positione absolute indeterminato ad $of$, hoc est, ad punctum A positione & valore determinatum descendit. At in VI.ª fluentem minimam $\frac{\infty f - (\infty f - (o+1)f)}{1} = \frac{1}{1}f = AB$ ab eodem $\infty$ positione & valore indeterminato ad AB valore & positione determinatam descendisse intelligendum est. In istis tamen formulis idem ac in primis terminus secundus $\frac{n}{b}f$ quoad formam retineatur oportet: quia jam ostendimus $n$ nullo modo excedere posse finitum valorem $b$, atque ideo absolute respuere valorem infinitum $\infty$.

§. 28. Fluentes determinatæ utriusque generis a formulis §. 20. & 21. methodo superiori evolutæ ita in serie sunt dispositæ, ut & singulæ successive eadem differentia $\frac{1}{b}f$ se mutuo excedant, & fluentes omnes determinatas utriusque generis, nulla excepta, in serie ordinata sibi invicem succedentes repræsentent. Ex prima differentiæ constantis conditione series naturam desumunt illarum, quæ communi vocabulo dicuntur arithmeticæ; ex secunda, ob quam fluentes singulæ, nulla excepta, ordine sibi succedunt, series oriuntur, quæ jure arithmeticæ continuæ appellantur. Hæ a primis sunt distinguendæ, quia non omnes series arithmeticæ eadem differentia constantes, sunt etiam (ut vulgo falso creditur) & continuæ, dummodo singuli seriei termini singulas fluentes exhibere intelligantur. Dari enim posse series arithmeticas ordinatas, quin continuæ sint, sic facile ex antecedentibus, & ex constructione geometrica demonstra-

stratur. Triplicis enim generis series arithmeticæ ex formulis superioribus §. 20. & 21. evolvi possunt, prout unus, aut alter, aut neuter terminus ex duobus, quibus fluens M in formulis effertur, constans intra ejus limites sumitur. Nam revocata formula ex: gr: I.ª, sumi potest I.° terminus $g$ constans & idem, fluente secundo per seriem $\frac{0}{h}, \frac{1}{h}, \frac{2}{h} \ldots \frac{h}{h}$. Vel II.° facto successive $g$ æquali seriei $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$, singulis istis terminis constans & ejusdem semper valoris addatur $\frac{n}{h}$. Vel tandem III.° fluente $g$ per seriem $0, 1, 2, 3 \ldots \infty$ singulis istis terminis singuli termini fluentis $\frac{1}{h}, \frac{2}{h}, \frac{3}{h} \ldots \frac{h}{h}$ applicentur. In suppositione I.ª series evolutæ sunt & *arithmeticæ* & *continuæ*, ut superius demonstravimus. Ad II.ᵃᵐ vero suppositionem quod attinet, series fluentium erit

$$M+M+M \ldots = \left(\left(0+\frac{n}{h}\right)+\left(1+\frac{n}{h}\right)+\left(2+\frac{n}{h}\right)+\left(3+\frac{n}{h}\right)\ldots + \left(\infty+\frac{n}{h}\right)\right) f, \text{ sive}$$

$$= \left(\frac{n}{h}+\frac{h+n}{h}+\frac{2h+n}{h}+\frac{3h+n}{h}\ldots+\frac{\infty h+n}{h}\right) f;$$ cujus singuli termini sunt quidem in serie arithmetica dispositi, quia differunt invicem quantitate constanti $hf$, quæ est conditio necessaria cujusvis seriei arithmeticæ: at nullo modo seriem nec esse nec dici posse continuam facile ex hujusce seriei constructione geometrica evincitur. Nam (*Fig.* 14.) facta $AH = \frac{n}{h} f$, erit series supradicta $= AH+(AB+BH)+(AC+CH)+(AD+DH) \ldots + (AK+KH)$ arithmetica quidem ob differentiam constantem $AB = AC = CD \ldots = f$, sed nullo modo continua dici potest, cum ex hac serie fluentes omnes primi generis a serie $0, 1, 2, 3 \ldots \infty$ evolutis excludantur: sunt enim singulæ fractiones unitate majores (excepta prima fractione unitate minori) & singulæ non nisi unam ex intermediis intra puncta data A, B, C, D ... K in serie successive repræsentant, cæteris, quæ ordine sibi succedunt, exclusis. Series vero a suppositione III.ª erit

$$M+M+M\ldots = \left(\left(0+\frac{1}{h}\right)+\left(1+\frac{2}{h}\right)+\left(2+\frac{3}{h}\right)+\left(3+\frac{4}{h}\right)\ldots\right.$$

+

$$+\left((h-1)+\frac{h}{h}\right)+\left(h+\frac{h+1}{h}\right)+\left(h+1+\frac{h+2}{h}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left(h+h-1+\frac{h+h}{h}\right)\ldots\Big)f=\left(\frac{1}{h}+\frac{h+2}{h}+\frac{2h+3}{h}+\frac{3h+4}{h}\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{hh}{h}+\frac{hh+h+1}{h}+\frac{hh+2h+2}{h}+\frac{hh+3h+3}{h}\ldots+\frac{hh+hh+h}{h}\right)f$$

quæ est series arithmetica differentiæ constantis $h+1$, at nullo modo continua, cum fluentes ejus non excipiant nisi eas fluentes primi generis quæ respondent suis integris, ac non nisi unam ex intermediis secundi generis intra quasvis fluentes primi generis complectantur. Quo vero titulo hujusmodi series non continuæ, dum singulis terminis singulæ fluentes a puncto communi manantes applicantur, continuæ censendæ sunt §. 37. ac seqq. docebunt.

§. 29. Ut doctrina hæc quæ viam sternit ad graviora in seqq. Capp: investiganda exemplorum appositione illustretur, sumpta formula I.ª §. 20.

$$M=\left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{h}}{\frac{(n+1)-1}{h}+\left(1-\left(\frac{(n+1)-1}{h}\right)\right)}\right)f,$$

evolvatur primum series fluentium arithmetica continua termini primi $\left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{1}\right)f$, in qua denominator fractionis est 1 ponendo $g$ successive $=o, 1, 2, 3, 4\ldots\ldots\ldots\infty$, quæ erit (*Fig.* 16.) $M+M+M\ldots$

$$=\left(\frac{o}{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\frac{5}{1}+\frac{6}{1}+\frac{7}{1}+\frac{8}{1}\ldots+\frac{(\infty+1)-1}{1}\right)f$$

$1.^a = A+AB+AC+AD+AE+AF+AG+AH+AI\ldots+AL$ posito $AK=\left(\frac{\infty-1}{1}\right)f$ numero integro & $+f=AB$: vel sumpto $-f=-AB=Ab$, erit series eadem in parte opposita $=A+Ab+Ac+Ad+Ae+Af+Ag+Ah+Ai\ldots+Al$. Series hæc dabit fluentes omnes determinatas primi generis in punctis A, B, C, D . . . successive desinentes; quæ puncta, ut diximus, sunt necessaria utpote a protonumeris AB, BC . . . vel Ab, bc, . . . $=f$ constituta: atque ideo series hæc ad infinitum nullo limite coercenda progreditur. Determinetur nunc ex: gr:

$h=5$,

$b = 5$, qui ab arbitrio nostro pendet, ac singuli termini seriei superioris 1.ª dividantur per 5, ut exsurgat series 2.ª M + M + M . . . . . .

$$= \left( \frac{0}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} + \frac{6}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{10}{5} + \frac{11}{5} + \frac{12}{5} + \frac{13}{5} + \frac{14}{5} + \frac{15}{5} + \frac{16}{5} \ldots + \frac{(\infty + 1) - 1}{5} \right) f.$$

Hac divisione peracta augetur series intermediis fluentibus secundi generis numero $5 - 1 = 4$ intra quævis puncta fixa primi generis A & B; B & C; C & D; &c. singulis protonumeris AB, BC, CD . . . KL in partes quinque divisis, & series erit sequens 2.ª $A + A1 + A2 + A3 + A4 + AB + (AB + B1) + (AB + B2) + (AB + B3) + (AB + B4) + AC + (AC + C1) \ldots + (AK + K1) \ldots$ Collata hac serie cum 1.ª quatuor medias inter A & AB; inter AB & AC &c. exortas invenies, quæ non reperiuntur in 1.ª ita ut terminus in 1.ª in ordine sextus $\frac{5}{1} f = AF = 5AB$ sit in 2.ª $= AB$ æqualis scilicet primo protonumero: similiter terminus undecimus in 1.ª qui est $= 10\,AB$, fit in 2.ª $= AB + BC = AC$; & sic dicas de reliquis. Quo magis igitur augebitur denominator $b$, eo magis crescet numerus intermediarum inter quosvis protonumeros AB, BC, CD; & numerator fractionis, qui in 1.ª determinabat numerum protonumerorum a serie illimitata AZ excerptorum, determinat in 2.ª numerum intermediarum intra quosvis protonumeros. Ita ut si ponatur $b = \infty$, terminus $\frac{\infty}{1} f$ qui in 1.ª indicabat infinitum numerum protonumerorum; in 2.ª cum fluentes procedant per $\frac{0}{\infty}, \frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}, \frac{3}{\infty} \ldots \frac{\infty}{\infty}$, quarum maxima non excedit AB, donec numerator fractionis est finitus, unam ex illis minimis fluentibus infinitis designat, in quas protonumerus AB divisus concipitur, qui positus $= \infty$ protonumerum $AB = \frac{\infty}{\infty} f$ ad summum exhaurit. Series igitur quæ in 1.ª ad quodvis infinitum extendebatur, & dicebatur infinita, tota inter primum protonumerum compendio prorsus mirabili concluditur. Hæc animadversa mirum inservient ad *Principia Calculi differentialis* vulgo usurpata in Cap: ultimo excutienda.

§. 30. Series igitur 1.ª non est nisi evolutio formulæ M =

$$\left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right)f=\frac{n}{1}f,$$

ex qua ob denominatorem 1 determinari nequeunt nisi puncta necessaria a serie protonumerorum constituta. Series vero 2.ª oritur ab evolutione fluentis M =

$$\left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{\frac{(n+1)-1}{5}+\left(1-\left(\frac{(n+1)-1}{5}\right)\right)}\right)f$$

hac methodo, ut primæ sex fluentes a formula M =

$$\left(\frac{\frac{(o+1)-1}{1}}{\frac{(o+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(o+1)-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{\frac{(n+1)-1}{5}+\left(1-\left(\frac{(n+1)-1}{5}\right)\right)}\right)f$$

eruantur, posito successive $n = o, 1, 2, 3, 4; 5$: sintque intra puncta A & B contentæ. Fluentes sex secundæ incipiendo a $\frac{5}{5}$ evolvuntur a formula M =

$$\left(\frac{\frac{(1+1)-1}{1}}{\frac{(1+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(1+1)-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{\frac{(n+1)-1}{5}+\left(1-\left(\frac{(n+1)-1}{5}\right)\right)}\right)f,$$

& desinunt intra puncta B & C, & sic per partes procedendo si dicatur $g=5$, erit M =

$$\left(\frac{\frac{(5+1)-1}{1}}{\frac{(5+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(5+1)-1}{1}\right)}\right)f+\left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{\frac{(n+1)-1}{5}+\left(1-\left(\frac{(n+1)-1}{5}\right)\right)}\right)f,$$

& fluentes educentur a minima = AF = $5f$ usque ad maximam AG $=\frac{5}{1}f+\frac{5}{\frac{5}{1}}f=6f.$

§. 31.

§. 31. Donec fluentes formulæ supradictæ intra limites extremarum continentur, nullo modo licet valorem $b$ primo sumptum ( hîc 5) immutare, cum $\frac{n}{b}$ non nisi in punctis datis $o$, 1, 2, 3 . . . . $b$ successive possit determinari. Verum si intermediæ non eodem essent singulæ denominatore affectæ, mutaretur ejusdem protonumeri divisio, & puncta intermedia simul ac limites confunderentur. Ita si fieret $\frac{n}{b}$ successive $\left(\frac{o}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{6}, \frac{5}{5}\right) f$, fluens secunda erit $\frac{1}{5} f$; tertia $\frac{1}{2} f$; quarta caderet in B, in quod desinit extrema $\frac{5}{5} f$; quinta $\frac{4}{6} f = \frac{2}{3} f$ iterum intra A B desineret. Quare non licet intra extremos limites formulæ I.ª diversum denominatorem $b$ sumere ab illo, quod initio in formula statutum fuerit, qui tamen initio arbitrio relinquitur, sed semel assumptus idem intra limites perseveret necesse est. Exhaustis vero intermediis & renovata formula M, quamvis fractionem $\frac{n}{l} f$ diversi denominatoris tam in limite minimo $M = \frac{g}{1} f + \frac{o}{l} f$, quam in limite maximo $M = \frac{g}{1} f + \frac{l}{l} f$ sumere licet. Nam in primo casu $\frac{o}{b} f = \frac{o}{l} f = \frac{o}{d} f$ . . . . semper *zero*, & in secundo $\frac{b}{b} f = \frac{l}{l} f = \frac{d}{d} f$ . . . . semper $= f$. Ita in nostro casu fluentes omnes evolutæ a formula

$M = \left(\frac{(o+1)-1}{1}\right) f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{1}\right) f$ erunt $\left(\frac{o}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5}\right) f$ : ab

$M = \left(\frac{(1+1)-1}{1}\right) f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{1}\right) f$ erunt $\left(\frac{5}{5} + \frac{6}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{10}{5}\right) f$ : ab

$M = \left(\frac{(2+1)-1}{1}\right) f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{5}}{1}\right) f$ erunt $\left(\frac{10}{5} + \frac{11}{5} + \frac{12}{5} + \frac{13}{5} + \frac{14}{5} + \frac{15}{5}\right) f$ :

 & sic

& sic successive ad infinitum. Hoc modo per partes oritur una & eadem series arithmetica & continua, cujus differentia constans $= \frac{1}{5}$. Verum quoniam maxima primæ $M = \frac{5}{5} f = \frac{7}{7} f$, si fiat in secunda $M = \left(\frac{(1+1)-1}{1}\right) f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{7}}{1}\right) f$, erunt fluentes omnes $\left(\frac{7}{7} + \frac{8}{7} + \frac{9}{7} + \frac{10}{7} + \frac{11}{7} + \frac{12}{7} + \frac{13}{7} + \frac{14}{7}\right) f$, & intermediæ numero & valore a primis diversæ: atque ideo abrumpitur series prima, & in ejus locum succedit altera, differentia constanti $\frac{1}{7}$, quæ dat fluentes secundi generis terminatas intra extremam primi protonumeri AB in puncto B, & extremam secundi protonumeri BC in puncto C, & protonumerus BC qui primo dividebatur in partes quinque, nunc in septem partes a denominatore 7 dividitur. Hæc tamen series fluentium facile ad punctum originis A completur traducta fluente ad oppositam plagam ad infinitum, si sumpta formula nostra IV.ª $M =$

$$\left(\frac{\frac{(1+1)-1}{1}}{\frac{(1+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(1+1)-1}{1}\right)}\right) f - \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{7}}{\frac{(n+1)-1}{7} + \left(1 - \left(\frac{(n+1)-1}{7}\right)\right)}\right) f,$$

fiat $n$ successive $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, illique addatur series fluentium $\left(\frac{0}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}\right) f$: quod idem est ac si sumpta I.ª $M =$

$$\left(\frac{\frac{(0+1)-1}{1}}{\frac{(0+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(0+1)-1}{1}\right)}\right) f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{7}}{\frac{(n+1)-1}{7} + 1 - \left(\frac{(n+1)-1}{7}\right)}\right) f$$

producatur $n$ usque ad 6. Hinc concluditur fluentes determinatas primi generis mutari non posse quin mutetur protonumerus; atque ideo constantes sunt reputandæ; intermedias vero secundi generis inter illas primi generis collocatas, mutari ad libitum posse, ac proinde fluentium naturam induere.

§. 32.

§. 32. Nunc ab exemplo Serierum continuarum arithmeticarum ad exempla aliarum serierum, quarum formulas generales §. 28. tradidimus, accedentes, si ponatur in istis $b=5$, inveniemus series exhibitas a formula §. 28

ª
$$\left\{\begin{array}{ll} 0+\frac{1}{5},\ 1+\frac{1}{5},\ 2+\frac{1}{5},\ 3+\frac{1}{5},\ 4+\frac{1}{5}\ldots\infty+\frac{1}{5}\ldots=\frac{1}{5}+\frac{6}{5}+\frac{11}{5}+\frac{16}{5}+\frac{21}{5}+\frac{26}{5}\ldots\frac{\infty\cdot 5+1}{5}\ \ldots\ldots & 1.^{a} \\ 0+\frac{2}{5},\ 1+\frac{2}{5},\ 2+\frac{2}{5},\ 3+\frac{2}{5},\ 4+\frac{2}{5}\ldots\infty+\frac{2}{5}\ldots=\frac{2}{5}+\frac{7}{5}+\frac{12}{5}+\frac{17}{5}+\frac{22}{5}+\frac{27}{5}\ldots\frac{\infty\cdot 5+2}{5}\ \ldots\ldots & 2.^{a} \end{array}\right\}\ dif:\ \frac{5}{5}$$

I.ª
$$\left\{\begin{array}{ll} 0+\frac{1}{5},\ 1+\frac{2}{5},\ 2+\frac{3}{5},\ 3+\frac{4}{5},\ 4+\frac{5}{5},\ 5+\frac{6}{5}\ldots\infty+\frac{\infty}{5}\ldots=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}+\frac{13}{5}+\frac{19}{5}+\frac{25}{5}+\frac{31}{5}\ldots\frac{\infty\cdot 5+\infty}{5}\ \ldots\ldots & 3.^{a} \\ 0+\frac{2}{5},\ 1+\frac{3}{5},\ 2+\frac{4}{5},\ 3+\frac{5}{5},\ 4+\frac{6}{5},\ 5+\frac{7}{5}\ldots\infty+\frac{\infty+1}{5}\ldots=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}+\frac{14}{5}+\frac{20}{5}+\frac{26}{5}+\frac{32}{5}\ldots\frac{\infty\cdot 5+\infty+1}{5}\ \ldots\ldots & 4.^{a} \end{array}\right\}\ dif:\ \frac{6}{5}$$

posito vero $b=6$

ª
$$\left\{\begin{array}{ll} 0+\frac{1}{6},\ 1+\frac{1}{6},\ 2+\frac{1}{6},\ 3+\frac{1}{6},\ 4+\frac{1}{6},\ 5+\frac{1}{6},\ 6+\frac{1}{6}\ldots\infty+\frac{1}{6}\ldots=\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+\frac{13}{6}+\frac{19}{6}+\frac{25}{6}+\frac{31}{6}+\frac{37}{6}\ldots\frac{\infty\cdot 6+1}{6}\ \ldots\ldots & 5.^{a} \\ 0+\frac{2}{6},\ 1+\frac{2}{6},\ 2+\frac{2}{6},\ 3+\frac{2}{6},\ 4+\frac{2}{6},\ 5+\frac{2}{6},\ 6+\frac{2}{6}\ldots\infty+\frac{2}{6}\ldots=\frac{2}{6}+\frac{8}{6}+\frac{14}{6}+\frac{20}{6}+\frac{26}{6}+\frac{32}{6}+\frac{38}{6}\ldots\frac{\infty\cdot 6+2}{6}\ \ldots\ldots & 6.^{a} \end{array}\right\}\ dif:\ \frac{6}{6}$$

II.ª
$$\left\{\begin{array}{ll} 0+\frac{1}{6},\ 1+\frac{2}{6},\ 2+\frac{3}{6},\ 3+\frac{4}{6},\ 4+\frac{5}{6},\ 5+\frac{6}{6},\ 6+\frac{7}{6}\ldots\infty+\frac{\infty}{6}\ldots=\frac{1}{6}+\frac{8}{6}+\frac{15}{6}+\frac{22}{6}+\frac{29}{6}+\frac{36}{6}\ldots\ldots\frac{\infty\cdot 6+\infty}{6}\ \ldots\ldots & 7.^{a} \\ 0+\frac{2}{6},\ 1+\frac{3}{6},\ 2+\frac{4}{6},\ 3+\frac{5}{6},\ 4+\frac{6}{6},\ 5+\frac{7}{6},\ 6+\frac{8}{6}\ldots\infty+\frac{\infty+1}{6}\ldots=\frac{2}{6}+\frac{9}{6}+\frac{16}{6}+\frac{23}{6}+\frac{30}{6}+\frac{37}{6}+\frac{44}{6}\ldots\frac{\infty\cdot 6+\infty+1}{6}\ \ldots & 8.^{a} \end{array}\right\}\ dif:\ \frac{7}{6}$$

Nulla fluens seriei 1.ª, 2.ª; & 5,ª 6.ª desinit in punctum constans primi generis, cum fluentes ab istis seriebus comprehensæ sint in 1.ª & 5.ª A 1, AB + B 1, AC + C 1..... posita in 1.ª $A1=\frac{1}{5}$; in 5.ª $A1=\frac{1}{6}$: & in 2.ª & 6.ª sint fluentes A 2, AB + B 2, AC + C 2.... posita in 2.ª $A2=\frac{2}{5}$; in 6.ª $A2=\frac{2}{6}$, quæ reducitur ad integram $\frac{1}{3}$ sublato puncto 1. Hujusmodi fluentes singulæ desinunt successive intra puncta A, B, C.... a quibus respective æque distant: atque ideo fractiones ab hisce fluentibus indicatæ nunquam ad numerum integrum reduci possunt: & series hujusmodi sunt quidem arithmeticæ, sed non continuæ, cum seriem intermediarum continuam non exhauriant, sublatis fluentibus omnibus primi generis, atque omnibus intermediis, excepta prima post quodvis punctum datum. At in serie 3.ª & 4ª; 7.ª & 8.ª fluentes desinunt

in

in puncta primi generis B, vel C, vel D... toties, quoties fluens ad integrum numerum reducitur. Ita in 3.ª fluentes $\frac{25}{5}, \frac{55}{5}, \frac{85}{5}, \frac{115}{5} \dots = 5$, 11, 17, 23.... & prima desinit in punctum datum quintum post primum originis A; secunda post undecimum a puncto A &c. Verum in 4.ª fluentes integræ $\frac{20}{5}, \frac{50}{5}, \frac{80}{5}, \frac{110}{5} \dots = 4, 10, 16, 22 \dots$ quæ series eamdem habent differentiam 6, sed fluentes desinunt in puncta singulæ diversa. Similiter in 7.ª $\frac{36}{6}, \frac{78}{6}, \frac{120}{6}, \frac{162}{6} \dots = 6, 13, 20, 27 \dots$ in 8.ª $\frac{30}{6}, \frac{72}{6}, \frac{114}{6}, \frac{156}{6} \dots = 5, 12, 19, 26 \dots$ ejusdem quidem differentiæ 7, sed non ejusdem limitis. Singulæ istiusmodi series sunt arithmeticæ, sed non continuæ, ut ostendimus.

§. 33. Series arithmeticæ, si earum termini singuli singulas fluentes ab eodem originis puncto successive prorumpentes indicare ponantur, repræsentant series fluentium sibi invicem ordine succedentium a formulis generalibus §. 20, & 21 procedentium, quarum termini successivi, si unitate differant, constituunt series arithmeticas, quas continuas appellavimus, cum in hoc casu formula M + M + M.... fluentes omnes successive, nulla intermedia excepta, æquali differentia $\frac{1}{b}$ sese mutuo excedentes, complectatur. Quod si differentia terminorum sibi invicem succedentium sit major unitate, vidimus §. 28. fluentes seriei M + M + M... nullo modo constituere posse series continuas, si termini singuli ad unam tantum fluentem significandam traducantur: atque exempla harum Serierum §. 32 superiori exhibuimus. Verum ut harum secundi generis serierum naturam intimius assequamur, & quomodo ad continuitatem reducantur intelligamus, demonstrandum est terminos singulos serierum hujusmodi non fluentes singulas, ut in primis, repræsentare, sed singulos earum terminos summam plurium fluentium significare: ita ut in istis formula generalis singulorum terminorum non per M + M + M + M.... sed per S + S + S + S.... sit efferenda, quovis symbolo S indicante summam plurium fluentium, quæ in unum tantum terminum seriei coalescunt. Ut id clare percipiatur, revocandum est quod docet Analysis communis, *summam* scilicet *cujuscumque seriei arithmeticæ æqualem esse producto termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum seriei ducti*, cum jam notum sit summam extremorum æqualem esse summæ termini primum proxime subsequentis & termini ultimum proxime antecedentis: ea enim differentia, qua secundum excedit primum, eadem penultimus deficit ab ulti-

ultimo. Itaque data serie $\frac{o}{h}+\frac{1}{h}+\frac{2}{h}\ldots+\frac{h-1}{h}+\frac{h}{h}+\frac{h+1}{h}+\frac{h+2}{h}\ldots$ $+\frac{2h}{h}\ldots$, & vocato $\frac{n}{h}$ ultimo seriei termino, & consequenter numero terminorum $n+1$, erit $\frac{o}{h}+\frac{n}{h}=\frac{1}{h}+\frac{n-1}{h}=\frac{2}{h}+\frac{n-2}{h}\ldots$ & sic successive: atque ideo summa omnium terminorum extremis computatis erit in primo casu $S=\left(\frac{o}{h}+\frac{n}{h}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)$; in secundo $S=\left(\frac{1}{h}+\frac{n-1}{h}\right)\frac{n}{2}$; in tertio $S=\left(\frac{2}{h}+\frac{n-2}{h}\right).\left(\frac{n-1}{2}\right)$: cum in primo casu sit numerus terminorum $n+1$; in secundo $n$; in tertio $n-1$, ut ex doctrina communi jam constat.

§. 34. Hoc posito quærenda sit in quavis serie arithmetica continua $\frac{o}{h}+\frac{1}{h}+\frac{2}{h}\ldots+\frac{h}{h}\ldots+\frac{2h}{h}\ldots+\frac{3h}{h}\ldots+\frac{gh}{h}$ summa omnium fluentium, quæ intra puncta data primi generis $\frac{o}{h}$, $\frac{h}{h}$, $\frac{2h}{h}$, $\frac{3h}{h}\ldots\frac{gh}{h}$ continentur. Ut id obtineatur animadvertendum est fluentem ultimam $\frac{h}{h}$ fluentium intra $\frac{o}{h}$ & $\frac{h}{h}$ esse primam fluentium inter $\frac{h}{h}$ & $\frac{2h}{h}$; & similiter $\frac{2h}{h}$ ultimam intra puncta $\frac{h}{h}$ & $\frac{2h}{h}$ esse primam intra puncta $\frac{2h}{h}$ & $\frac{3h}{h}$, & sic successive. Ergo ne bis repetantur puncta data primi generis inter primum $\frac{o}{h}$ & ultimum $\frac{gh}{h}$, quærenda est summa fluentium omnium intra $\frac{o}{h}$ & $\frac{h}{h}$ excepta hac ultima, quæ est prima inter $\frac{h}{h}$ & $\frac{2h}{h}$, & summa omnium fluentium inter $\frac{h}{h}$ & $\frac{2h}{h}$ hac ultima excepta, & sic ordine procedendo. Itaque divisa indefinita AZ (*Fig.* 17.) in partes AB, BC, CD, DE.... æquales singulas protonumero $f$, & iterum divisa quævis hæc in partes $h$, erit sum-

ſumma fluentium inter A & B excepta ultima $S=\left(\frac{b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f$; ſumma fluentium inter B & C $S=\left(\frac{b}{b}+\frac{2b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f$; ſumma fluentium inter C & D $S=\left(\frac{2b}{b}+\frac{3b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f$; ac univerſim poſito $g$ numero punctorum primi generis incipiendo a ſecundo B, atque ideo creſcente $g$ per ſeriem numerorum 1, 2, 3, 4 . . . a minimo 1 uſque ad infinitum, obtinebitur Series, cujus ſinguli termini ſummam omnium fluentium inter ſua reſpective puncta exhibebunt. Formula vero generalis ſingulorum terminorum, ſeu ſingulæ ſummæ fluentium intermediarum erit

I.ª $S=\left(\frac{(2g-1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f$: ita poſito $g=1$, erit primus terminus $S=\left(\frac{b-1}{b}\right)\frac{b}{2}.f$; poſito $g=3$, erit tertius ſeriei terminus $S=\left(\frac{5b-1}{b}\right)\frac{b}{2}.f$ ſumma fluentium a puncto originis A incipientium, & intra puncta C, D terminantium, excepta ultima A D. Quare quemadmodum §. 22. & ſeqq. ex evolutione formulæ §. 20. & 21. deduximus ſeriem arithmeticam ſingulas fluentes ſingulis terminis ſucceſſive exhibentem, ſic ex evolutione formulæ I.ª generalis hujus orietur ſeries, cujus ſinguli termini ſummam omnium fluentium intermediarum, ut diximus, ordine ac ſucceſſive repræſentabunt. Hujuſmodi igitur Series erit $S+S+S+S+S\ldots=\left(\left(\frac{b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{3b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{5b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{7b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{9b-1}{b}\right)\frac{b}{2}\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{(2g-1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}\right)f$. Facile eſt cognoſcere Seriem hanc eſſe & ipſam ſeriem arithmeticam, cujus differentia conſtans eſt $\frac{2b}{b}$, quæ exhibet ſummam ſummarum omnium fluentium inter puncta data primi generis A, B, C, D. . . uſque ad punctum ordine $g$ poſt B, excepta ultima ſumma $\frac{(2g-1)b}{b}.\left(\frac{b+1}{2}\right)f=(2g-1).\left(\frac{b+1}{2}\right)f$. Huic ſeriei ſi poſt ultimum $\left(\frac{(2g-1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f$

adda-

addatur $\left(\frac{2gh+(n+1)-1}{h}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)$ habetur etiam summa tot fluentium intermediarum inter punctum $g$ & subsequens $g+1$, quot unitates continentur in numero terminorum $n+1$: hac tamen additione series abrumpitur, nec ultra produci potest.

§. 35. In superiori serie evoluta a formula generali I.ª $S=\left(\frac{(2g-1)h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f$ summa fluentium cujusvis termini conflatur a majori fluente primum sumpta, cui additur minor: ita ut in primo termino sit intra A & B summa fluentium $\left(\frac{h-1}{h}\right)f+\frac{o}{h}f$; in secundo intra B & C sit fluentium summa $\left(\frac{2h-1}{h}\right)f+\frac{h}{h}f$; & sic ordine procedendo evoluta fuit a formula generali Iª series arithmetica superior. Verum summa intermediarum $S=\left(\frac{2gh+n}{h}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)f$ quam addidimus ultimo termino (progrediente $n$ per $o$, 1, 2, 3... usque ad $h$) inverso modo fluit a minori ad majorem, contrario modo, quo fluens prima cujusvis termini Seriei procedit, atque ideo non ita recte hæc cum formula generali I.ª consociatur. Ut vero formula generalis S eo ordine fluendo procedat a minori scilicet ad majorem, quo S fluentium intermediarum, invertatur ordo summæ superioris cujusvis termini, ac fiat in primo termino $S=\left(\frac{o}{h}+\frac{h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f$; in secundo $S=\left(\frac{h}{h}+\frac{2h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f$; in tertio $S=\left(\frac{2h}{h}+\frac{3h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f$, & sic successive, ut habeatur terminus generalis Seriei II.ª $S=\left(\frac{gh}{h}+\frac{(g+1)h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f=\left(\frac{(2g+1)h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f$, progrediente $g$ per seriem numerorum naturalium indefinitam $o$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... cui si addatur $S=\left(\frac{(2g+2)h+n}{h}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)f$, hæc dabit summam fluentium intermediarum intra punctum $g$ & proxime sequens, in qua si fiat $n=h-1$, erit $S=\left(\frac{((2g+2)+1)h-1}{h}\right)\frac{h}{2}f$, terminus generalis seriei proxime sequens terminum constantem S seriei. Licet igitur tam

tam formula generalis I.ª § superioris, quam hæc II.ª æque satisfaciat ad inveniendas summas singulorum terminorum seriei; tamen hæc II.ª cum formula S optime consociatur. Itaque si fiat formula generalis III.ª $S+s=\left(\frac{(2g+1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f + \left(\frac{(2g+2)b+n}{b}\right)\frac{b}{2}f$, ex formula S ponendo successive $g=0, 1, 2, 3 \ldots$ obtinentur termini singuli seriei arithmeticæ summas fluentium omnium intra puncta A, B; B, C; C, D &c. continentes usque ad penultimam, quorum ultimo si addatur s habetur summa fluentium intermediarum quotlibet proxime sequens ultimum seriei terminum, & facto $n=b-1$, fit $s=\left(\frac{((2g+2)+1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}f$, qui fit terminus seriei immediate sequens terminum S. Formula igitur hæc III.ª erit I.ª anteferenda: quam tamen recensendam duxi, ut intelligatur quantum aliquando intersit in concinnandis calculis unam potius quam alteram inire viam, quæ tamen promiscue nullo discrimine vulgo adhibetur.

§. 36. Evolutio igitur formulæ generalis III.ª summam fluentium ab eodem originis puncto manantium, & inter duo quævis puncta data primi generis desinentium, continentis a serie sequenti repræsentatur: nempe (F) $S+S+S+S\ldots+S+s=\left(\left(\frac{b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{3b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{5b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{7b-1}{b}\right)\frac{b}{2} \ldots\ldots + \left(\frac{(2g+1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{(2g+2)b+n}{b}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)f$, cujus termini, excepto ultimo, seriem constituunt arithmeticam differentiæ constantis $\frac{2b}{b}$: ultimus vero dat summam fluentium inter duo ultima puncta primi generis interjacentium, quorum numerus $n+1$ æquatur: quod si fiat $n=b-1$, habetur $\left(\frac{((2g+2)+1)b-1}{b}\right)\frac{b}{2}$ summa fluentium omnium, ut in cæteris terminis, inter hæc duo ultima puncta præter ultimam: atque ideo augetur series arithmetica novo termino, & sic successive nullo necessario limite definienda. Ut quædam exempla producantur: sit

Ex: I. $b=1$, & posito $n=b-1=1-1=0$, invenietur series $S+S+S\ldots+S+s=\left(\left(\frac{0}{1}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{3-1}{1}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{5-1}{1}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{7-1}{1}\right)\frac{1}{2}\ldots\ldots + \left(\frac{(2g+1)-1}{1}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{(2g+2)+n}{1}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)f=\left(\frac{0}{2}+\frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}\right.$

+

$+ \frac{8}{2} \ldots + \frac{2g}{2} + \left(\frac{(2g+2)1+n}{1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)\Big) f$, in qua cum ex dictis duo tantum sint valores $n$, nempe $o$, $1$, minimus & maximus, si fiat $n=o$, ulterius producitur series arithmetica; at facto $n=1$ abrumpitur series, & ultimus terminus dat fluentes omnes inter duo ultima puncta intermedias, non excepta ultima in punctum ultimum datum desinente. Series hæc coincidit cum serie arithmetica continua evoluta a formulis §§. 20, 21, posita $b=1$, cujus singuli termini singulam fluentem repræsentant, cum in hac suppositione, in qua nullum punctum intermedium datum sit, sive nulla sit protonumeri $f$ divisio, idem sit $S+S+S \ldots\ldots + S = \left(\frac{o}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{8}{2} \ldots\right.$ $\left. + \frac{2g}{2}\right) f$, & $M+M+M \ldots = \left(\frac{o}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} \ldots + \frac{g}{1}\right) f$.

§. 37. Ex: II. Sit $b=4$, erit $S+S+S+S \ldots\ldots\ldots + S + s$
$= \left(\left(\frac{4-1}{4}\right)\frac{4}{2} + \left(\frac{3\cdot 4-1}{4}\right)\frac{4}{2} + \left(\frac{5\cdot 4-1}{4}\right)\frac{4}{2} + \left(\frac{7\cdot 4-1}{4}\right)\frac{4}{2} \ldots\right.$
$\left. + \left(\frac{(2g+1)4-1}{4}\right)\frac{4}{2} + \left(\frac{(2g+2)4+n}{4}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)\right) f$, &

$S+S+S+S \ldots + S = \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{2} + \frac{19}{2} + \frac{27}{2} + \frac{35}{2} \ldots\ldots\right.$ $\left. + \frac{(2g+1)4-1}{2}\right) f$. In hac serie quivis protonumerus dividitur in partes quatuor æquales, & $n$ successive determinatur in punctis intermediis $\frac{o}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}$, eritque (*Fig.* 18.), posito $g = o$, primus seriei terminus $\frac{3}{2} f = A1 + A2 + A3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) f = \frac{3}{2} f = \frac{3}{2} AB$: posito $g = 1$, $\frac{11}{2} f = AB + (AB + B1) + (AB + B2) + (AB + B3)$
$= \left(1 + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(1 + \frac{2}{4}\right) + \left(1 + \frac{3}{4}\right)\right) f = \left(4 + \frac{6}{4}\right) f = \frac{11}{2} f$
$= \frac{11}{2} AB$ secundus seriei terminus: posito $g = 2$, erit terminus tertius

feriei $\frac{19}{2} f = AC + (AC + C1) + (AC + C2) + (AC + C3)$

$= \left(2+\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(2+\frac{2}{4}\right)+\left(2+\frac{3}{4}\right)\right) f = \left(8+\frac{6}{4}\right) f = \frac{19}{2} f$

$= \frac{19}{2} AB$; & sic successive: ita ut series hæc, cujus differentia constans $\frac{4}{2} f$

dat summam fluentium omnium sibi invicem ordine succedentium, nempe $A1+A2+A3+AB+AB1+AB2+AB3+AC+AC1+AC2+AC3$ &c. hac ratione continua censenda sit; licet si singulis terminis, ut fecimus §. 28, singula fluens applicetur, sitque $M + M + M$ .......

$= \left(1+\frac{1}{2}\right) f + \left(5+\frac{1}{2}\right) f + \left(9+\frac{1}{2}\right) f \ldots\ldots = (AB + B2)$

$+ (AF + F2) \ldots$ &c., series hæc nullo modo continua dicenda sit.

§. 38. Ex: III. Sit tandem $b=5$, quæ dat seriem $S+S+S \ldots + S+s$

$= \left(\left(\frac{5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{3\cdot 5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{5\cdot 5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{7\cdot 5-1}{5}\right)\frac{5}{2}\ldots\right.$

$\left.+\left(\frac{(2g+1)5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{(2g+2)5+n}{5}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)\right) f$, & $S+S+S \ldots$

$+ S = \left(\frac{4}{2}+\frac{14}{2}+\frac{24}{2}+\frac{34}{2}\ldots+\frac{(2g+1)5-1}{2}\right) f$: fintque valores

dati ipsius $n$ successivi $o, 1, 2, 3, 4, 5$; posito $g=o$, erit (*Fig.* 16.) $\frac{4}{2} f$

$= A1 + A2 + A3 + A4 = \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right) f = \frac{2}{1} f = 2AB$;

posito $g = 1$, erit $\frac{14}{2} f = AB + (AB + B1) + (AB + B2)$

$+ (AB + B3) + (AB + B4) = 5\, AB + \frac{10}{5} AB = 7 AB$, & sic

successive. Quamobrem hujusmodi series, quarum differentia constans excedit unitatem, componuntur terminis, quorum singuli, si recte advertas, non unam fluentem tantum, ut in seriebus, quas §. 28. continuas diximus, exhibent; sed singuli summam fluentium repræsentant, quo nomine vere seriem continuam constituunt, cujus summa erit summa summarum omnium fluentium ordine sibi succedentium, quæ a singulis terminis complectuntur: ejusque summa generalis seriei (F) erit

(G)

(G) $S = S+S+S+S\ldots = \left( \left(\frac{h-1}{h}\right) \frac{h}{2} + \left(\frac{(2g+1)h-1}{h}\right) \frac{h}{2} \right) . \left( \frac{g+1}{2} \right) f$

$= (gh+h-1) . \left(\frac{g+1}{2}\right) . f$, $g+1$ numero terminorum. Ita posito $g=4$, erit $g+1 = 5$; & facta $h = 4$, erit summa seriei Ex: II. $S = 19 \frac{5}{2} f = \frac{95}{2} f$: facta $h=5$, $g=4$, erit summa seriei Ex: III. $S = 24 \frac{5}{2} f = 12 . 5 . f = 60 f$. Ac tandem posita $h = 1$, erit summa seriei Ex: I. $S = g \left(\frac{g+1}{2}\right) f$, quæ est summa seriei numerorum naturalium a $o$ incipientis.

§. 39. In istis seriebus a formula generali F exhibitis, quando $h$ est numerus par, singuli termini divisore 2 necessario afficiuntur: quando vero $h$ est numerus impar singuli ad integrum reducuntur: quo arguitur singulos terminos in primo casu desinere in punctum datum medium sui protonumeri: in secundo desinere in unum ex punctis datis primi generis, principium protonumeri sequentis. Facile tamen est in primo casu terminos singulos ad integrum reducere, si loco protonumeri $f = AB$ sumatur protonumerus $\frac{f}{2} = \frac{AB}{2}$: quo facto series constant terminis integris desinentibus singulis in punctum aliquod initium protonumeri sequentis.

§. 40. Vidimus Seriem F §. 36. ita esse ordinatam, ut fluentes quarum summa a quovis termino complectitur, ab eodem communi puncto A originem ducant. Verum Series hæc F sequenti modo poterat efferri, scilicet

$$S = S+S+S+S \ldots\ldots + S+S = \left(\frac{h-1}{h}\right)\frac{h}{2} f + \left(\frac{3h-1}{3h}\right)\frac{3h}{2} f + \left(\frac{5h-1}{5h}\right)\frac{5h}{2} f + \left(\frac{7h-1}{7h}\right)\frac{7h}{2} f \ldots + \left(\frac{(2g+1)h-1}{(2g+1)h}\right).\left(\frac{(2g+1)h}{2}\right) f + \left(\frac{(2g+2)h+h-1}{(2g+2)h+h}\right).\left(\frac{(2g+2)h+h}{2}\right) f$$

, posito in ultimo termino seriei F loco $n$, $h-1$, ut habeatur terminus seriei arithmeticæ proxime sequens terminum $\left(\frac{(2g+1)h-1}{(2g+1)h}\right).\left(\frac{(2g+1)h}{2}\right) f$, & sic successive series (*Fig*: 18.)

(H) $S+S+S\ldots+S+S = \left(\frac{h-1}{h}\right)\frac{h}{2} AB + \left(\frac{3h-1}{3h}\right)\frac{3h}{2} BC + \left(\frac{5h-1}{5h}\right)\frac{5h}{2} CD$

+

$+ \left(\frac{7h-1}{7h}\right) \frac{7h}{2} DE \ldots + \left(\frac{(2g+1)h-1}{(2g+1)h}\right) \cdot \left(\frac{(2g+1)h}{2}\right) PQ$

$+ \left(\frac{(2g+2)h+h-1}{(2g+2)h+h}\right) \cdot \left(\frac{(2g+2)h+h}{2}\right) QR$. In hac Serie singulæ fluentes cujuscumque termini a punctis A, B, C, D, E ... P, Q originem sumunt, estque in singulis diversa protonumeri $f$ divisio, prout singulorum diversus est divisor, qui indicat in quot partes divisus intelligendus sit protonumerus, cui applicatur. Erit tamen secundus terminus seriei F æqualis secundo termino seriei H, hoc est $\left(\frac{3h-1}{h}\right) \frac{h}{2} AB = \left(\frac{3h-1}{3h}\right) \frac{3h}{2} BC$: sive summa fluentium a puncto originis A prorumpentium, cujus protonumerus divisus est in partes $h$, erit æqualis summæ fluentium a puncto B prorumpentium, cujus protonumerus BC divisus sit in partes $3h$. Ita posita $h=5$, & $g=1$, erit $\left(\frac{3\cdot 5-1}{5}\right) \frac{5}{2} AB = \left(AB + \frac{0AB}{5}\right) + \left(AB + \frac{1AB}{5}\right)$

$+ \left(AB + \frac{2AB}{5}\right) + \left(AB + \frac{3AB}{5}\right) + \left(AB + \frac{4AB}{5}\right) = 5AB + \frac{10}{5} AB$

$= 7AB = 7f$; & $\left(\frac{15-1}{15}\right) \frac{15}{2} BC = \left(\frac{0}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15}\right.$

$\left. + \frac{5}{15} + \frac{6}{15} + \frac{7}{15} + \frac{8}{15} + \frac{9}{15} + \frac{10}{15} + \frac{11}{15} + \frac{12}{15} + \frac{13}{15} + \frac{14}{15}\right) BC = \frac{105}{15} BC$

$= 7BC = 7f$; & sic progrediendo singuli termini seriei F æquantur singulis terminis seriei H, ac eadem series utrobique se se offert, nempe (2, 7, 12, 17 ...) $f$: sed series F multum differt, si naturam spectes, a serie H. Nam in F. in quovis termino eadem est protonumeri divisio, nempe 5: verum in H protonumerus primi termini dividitur in partes 5, protonumerus secundi termini in partes 15, tertii in partes 25 &c.: ita ut prima series F vere censenda sit continua, cum successive & ordine fluentes omnes a puncto A ortæ, quæ determinantur a communi divisione singulorum protonumerorum in partes 5, eamdem seriem arithmeticam constituant. At series H ita est constituta, ut in singulis terminis protonumerus, cui applicantur, diversam subeat divisionem, atque ideo series arithmetica fluentium singularum in quovis termino diversa omnino sit. Et sane in serie arithmetica F series singularum fluentium successive & ordine ab eodem puncto A manantium erit sequens

$\frac{0}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \left(1 + \frac{0}{5}\right) + \left(1 + \frac{1}{5}\right) + \left(1 + \frac{2}{5}\right) + \left(1 + \frac{3}{5}\right)$

$+ \left(1 + \frac{4}{5}\right) \ldots + \&c. = \frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9}{5} \ldots\ldots, \&c.,$

cu-

cujus numeratores constituunt seriem continuam numerorum naturalium a *o* incipientem. Verum series singularum fluentium seriei H erit sequens

$$\frac{0}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{0}{15}+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}+\frac{6}{15}+\frac{7}{15}$$

$$+\frac{8}{15}+\frac{9}{15}+\frac{10}{15}+\frac{11}{15}+\frac{12}{15}+\frac{13}{15}+\frac{14}{15}\ldots\ldots\ \&c.,$$

quæ si reducatur ad eumdem denominatorem 15, erit

$$\frac{0+3+6+9+12+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14\ldots}{15}$$

quæ est complexus duarum serierum arithmeticarum diversæ naturæ, ac differentiæ constantis, licet singularum termini seriei F $\frac{10}{5}AB+\frac{35}{5}AB+$ &c. $=$ singulis $\frac{30}{15}AB+\frac{105}{15}BC+$ &c. seriei H.

§. 41. In hoc superiori exemplo singuli termini ejusdem seriei 2, 7, 13, 17, 22... repræsentant tam summam fluentium, quæ eodem denominatore affectæ & ab eodem puncto originis A ortum ducentes ac per unitatem invicem successive sese excedentes in eadem serie arithmetica numerorum naturalium progrediuntur; quam summam earum fluentium, quæ successive a punctis primi generis A, B, C, &c. prorumpentes, ac in singulis seriei terminis diverso denominatore affectæ, in singulis terminis in diversa serie arithmetica disponuntur. Series enim superior facile ad formulam F reducitur, si fiat 2, 7, 12, 17, 22

$$=\left(\frac{5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{3\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{5\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{7\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{9\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}\ldots$$

in qua $h=5$ est communis factor singulorum terminorum: ita ut si valorem spectes, idem sit ex: gr: tertius terminus

$$\left(\frac{5\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}f=\frac{4\cdot5}{2\cdot5}+\left(\frac{5-1}{5}\right)\frac{5}{2}f=2\cdot5f+2f=12\ AB;$$

quam $\left(\frac{25-1}{25}\right)\frac{25}{2}f=\frac{24}{25}\cdot\frac{25}{2}$ CD sive summa fluentium orta a divisione protonumeri CD in partes 25: sed tamen idem numero terminus a diversa fluentium summa componitur. Quæ prima conditio nisi in serie arithmetica proposita adimpleatur, singuli seriei termini a singulis summis fluentium a diversa serie arithmetica procedentium ortum tantum ducere possunt. Hinc seriei 1.ª §. 32. 1, 6, 11, 16 ... singuli termini summam fluentium di-

diversæ naturæ continent, quia reducta series hæc, ut docuimus §. 40. erit

$$\left(\frac{3-1}{3}\right)\frac{3}{2}f+\left(\frac{13-1}{13}\right)\frac{13}{2}f+\left(\frac{23-1}{23}\right)\frac{23}{2}f+\left(\frac{33-1}{33}\right)\frac{33}{2}f+\ldots\ldots$$

in cujus singulis terminis denominatores 3, 13, 23, 33 ... diversi diversam indicant protonumeri, cui respective applicantur, divisionem, nec ad eamdem reduci possunt, sive ad formulam F, cum sint singuli numeri primi nullo communi factore affecti. Series igitur hæc erit (*Fig.* 19.)

$$\left(\frac{3-1}{3}\right)\frac{3}{2}AB+\left(\frac{13-1}{13}\right)\frac{13}{2}BC+\left(\frac{23-1}{23}\right)\frac{23}{2}CD$$

$$+\left(\frac{33-1}{33}\right)\frac{33}{2}DE+\ldots\ldots\ldots\ldots=\left(\frac{0}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)AB$$

$$+\left(\frac{0}{13}+\frac{1}{13}+\frac{2}{13}+\frac{3}{13}+\frac{4}{13}+\frac{5}{13}+\frac{6}{13}+\frac{7}{13}+\frac{8}{13}+\frac{9}{13}+\frac{10}{13}+\frac{11}{13}+\frac{12}{13}\right)BC$$

$$+\left(\frac{0}{23}+\frac{1}{23}+\frac{2}{23}\ldots+\frac{22}{23}\right)CD+\left(\frac{0}{33}+\frac{1}{33}+\frac{2}{33}\ldots+\frac{32}{33}\right)DE+\ldots$$

$$=(A+A1+A2)+(B+B1+B2+B3\ldots+B12)+(C+C1+C2+C3\ldots+C22)$$

$$+(D+D1+D2\ldots+D32)+\&c.=AB+6BC+11CD+16DE\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In hac primus terminus, diviso protonumero AB in partes 3, est summa trium fluentium: secundus, diviso protonumero BC in partes 13, est summa fluentium numero 13: tertius summa fluentium numero 23, diviso protonumero CD in partes 23; & sic successive procedendo, incipiendo semper in singulis a fluente zero. Quibus evincitur series fluentium intra quævis duo puncta primi generis nullam omnino cum aliis fluentium seriebus societatem habere. Et sane si duo primi termini ad eumdem denominatorem reducantur,

dabunt $\dfrac{(0+13+26)AB+(0+3+6+9+12\ldots+36)BC}{3\cdot 13}$ : in primo series arithmetica est differentiæ constantis 13; in secundo differentiæ constantis 3, inter se diversæ: quibus si addas tertium terminum, series fluentium cujuscumque termini magis semper & differentia constanti & numero fluentium invicem dissociantur.

§. 42. At Series 2.ª §. 32., nempe (2, 7, 12, 17 ...) $f$ duplici modo præparari potest. Primo modo facile reducitur ad formulam F, si fiat

$$\left(\left(\frac{5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{3\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{5\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\left(\frac{7\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{9\cdot5-1}{5}\right)\frac{5}{2}+\ldots\ldots\right)f$$

=

$$=\left(\left(\frac{0}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{5}+\frac{6}{5}+\frac{7}{5}+\frac{8}{5}+\frac{9}{5}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{10}{5}+\frac{11}{5}+\frac{12}{5}+\frac{13}{5}+\frac{14}{5}\right)+\left(\frac{15}{5}+\frac{16}{5}+\frac{17}{5}+\frac{18}{5}+\frac{19}{5}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{20}{5}+\frac{21}{5}+\frac{22}{5}+\frac{23}{5}+\frac{24}{5}\right)+\ldots\ldots\right)f$$

$=(2+7+12+17+22+\ldots\ldots)\,f$ eujus singulæ fluentes, a quarum summis quivis seriei terminus conflatur, in eadem serie arithmetica continua $o$, $1$, $2$ ... procedunt ob eumdem in singulis denominatorem $5$, & singuli seriei termini a summa quinque fluentium successive per unitatem crescentium conflantur. Hæc tamen series eodem modo, ac superior §. 41, ad formulam H reduci poterat: in quo casu erit series

$$\left(\frac{5-1}{5}\right)\frac{5}{2}f+\left(\frac{15-1}{15}\right)\frac{15}{2}f+\left(\frac{25-1}{25}\right)\frac{25}{2}f+\left(\frac{35-1}{35}\right)\frac{35}{2}\;f+\ldots\ldots$$

$$=\left(\frac{0}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)AB+\left(\frac{0}{15}+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}\right.$$

$$\left.+\frac{5}{15}+\frac{6}{15}+\frac{7}{15}+\frac{8}{15}+\frac{9}{15}+\frac{10}{15}+\frac{11}{15}+\frac{12}{15}+\frac{13}{15}+\frac{14}{15}\right)BC$$

$$+\left(\frac{0}{25}+\frac{1}{25}\ldots+\frac{24}{25}\right)CD+\left(\frac{0}{35}+\frac{1}{35}\ldots+\frac{34}{35}\right)DE$$

in qua si duo primi termini ad eumdem denominatorem reducantur, dabunt $\frac{(0+3+6+9+12)AB+(0+1+2+3+4\ldots+14)}{15}$ BC: & fluentes singulorum terminorum in serie arithmetica diversæ differentiæ constantis progrediuntur, atque ideo invicem dissociantur.

§. 43. Quæ cum ita sint statuendum est, quamcumque seriem arithmeticam cujusvis differentiæ constantis tanquam aggregatum terminorum considerari posse, quorum singuli ad summam fractionum fluentium unitate se se excedentium, & ejusdem denominatoris constantis continendam reduci possunt, si ad formulam F §. 36, quando licet, vel ad formulam H §. 40., quod semper licet, singuli termini præparentur, & ut eorum diversa præparatio requirit, construantur. Denominator vero fractionis constans ostendit in quot partes divisus supponatur protonumerus, cui fractio applicatur; qui denominator si in singulis fluentibus, a quibus componitur quivis terminus, sit idem, series omnium fluentium a $o$ ordine progredientium ( a quarum summis singuli termini seriei seorsim coalescunt ) erit una & eadem; si diversus in singulis terminis sit fluentium denominator, series fluentium cujusvis termini erit diversa, prout est di-

versa in singulis protonumeri respectivi divisio. Porro series arithmetica numerorum naturalium $o$, $1$, $2$, $3$, $4$ . . . facile ad utramque formulam reduci poterit, & utroque modo ad constructionem perduci. Si enim fiat, ut jubet formula F $(o+1+2+3+4+\dots)f$

$$=\left(\frac{(2.o+1)-1}{1}\right)\frac{1}{2}f+\left(\frac{1.3-1}{1}\right)\frac{1}{2}f+\left(\frac{1.5-1}{1}\right)\frac{1}{2}f+\left(\frac{1.7-1}{1}\right)\frac{1}{2}f$$

$+\left(\frac{1.9-1}{1}\right)\frac{1}{2}f+\dots$ denominator constans communis $1$ ostendit protonumerum in singulis terminis integrum & indivisum sumendum esse, ac seriem esse

$$\frac{\left(o+\frac{1-1}{2}\right)}{1}f+\frac{\left(1+\frac{1-1}{2}\right)}{1}f+\frac{\left(2+\frac{1-1}{2}\right)}{1}f+\frac{\left(3+\frac{1-1}{2}\right)}{1}f+\frac{\left(4+\frac{1-1}{2}\right)}{1}f+\dots$$

$$=\left(\frac{o+o}{1}\right)f+\left(\frac{1+o}{1}\right)f+\left(\frac{2+o}{1}\right)f+\left(\frac{3+o}{1}\right)f+\left(\frac{4+o}{1}\right)f+\dots=\frac{o}{1}f+\frac{1}{1}f$$

$$+\frac{2}{1}f+\frac{3}{1}f+\frac{4}{1}f+\dots$$

$$=\frac{oAB}{1}+\frac{AB+oAB}{1}+\frac{2AB+oAB}{1}+\frac{3AB+oAB}{1}+\frac{4AB+oAB}{1}+\dots$$

$$=A+(AB+B)+(AC+C)+(AD+D)+(AE+E)+\dots$$

$$=A+AB+AC+AD+AE+\dots$$

Quod si referatur ad formulam H, erit $(o+1+2+3+4+\dots)f$

$$=\left(\frac{(2.o+1)-1}{1}\right)\frac{1}{2}f+\left(\frac{3-1}{3}\right)\frac{3}{2}f+\left(\frac{5-1}{5}\right)\frac{5}{2}f+\left(\frac{7-1}{7}\right)\frac{7}{2}f+\left(\frac{9-1}{9}\right)\frac{9}{2}f+\dots$$

$$=\frac{o}{1}AB+\left(\frac{o}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)AB+\left(\frac{o}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)BC$$

$$+\left(\frac{o}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}\right)CD+\left(\frac{o}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}\right)DE\dots$$

$$=\frac{o}{1}AB+\frac{3}{3}AB+\frac{10}{5}BC+\frac{21}{7}CD+\frac{36}{9}DE+\dots$$

$$=A+AB+2BC+3CD+4DE+\dots$$

$$=A+AB+AC+AD+AE+\dots$$

in primo termino protonumerus integer sumptus non nisi fluentem primam A com-

complectitur; in secundo protonumerus A B in tres partes divisus summam trium fluentium exhibet; tertius vero terminus est summa fluentium quinque, protonumero B C in partes quinque diviso; & sic de reliquis. Hac secunda methodo continuitatem quamdam inter fluentes facile est cognoscere in singulis terminis seorsim sumptis, licet inter se singuli dissocientur: quam continuitatem fluentium series etiam illæ, quarum termini singuli eamdem fluentium seriem simul servare nequeunt, neque ad formulam F reduci, semper tamen in singulis seorsim sumptis retinent.

§. 44. Vidimus §. 32. in seriebus illis, quarum termini denominatore aliquo constanti unitate majori afficiuntur, atque ideo vere fractiones sunt, hujusmodi terminos aut nunquam (ut in 1ª, 2ª; 5ª, 6ª) aut datis intervallis (ut in 3ª, 4ª; 7ª, 8ª) in puncta data primi generis desinere: quod universim contingere nequit nisi seriebus illis, quarum termini non nisi denominatore 1 afficiuntur. Verum nullo negotio series quæcumque terminorum fractorum in seriem terminorum integrorum convertitur unius tantum protonumeri mutatione. Si enim ex: gr: in proposita serie 1.ª §. 32. $\left(\frac{1}{5}+\frac{6}{5}+\frac{11}{5}+\frac{16}{5}+\frac{21}{5}+\ldots\ldots\right)f$ ducta in protonumerum $f=AB$, cujus termini singuli desinunt in puncta data secundi generis inter puncta A, B, C...... primi generis successive constituta, fiat $(1+6+11+16+21+\ldots.)\ \frac{f}{5}$; $\frac{f}{5}=\frac{AB}{5}$ (quinta pars AB) $=g$, & $\frac{AB}{5}$ loco primi protonumeri sumatur, singuli termini integri hujusce seriei desinunt successive in puncta data primi generis necessaria ut patet.

§. 45. Bene explorata prima serierum arithmeticarum genesi, quas prima methodus continuæ divisionis singularum fluentium utriusque systematis exhibet, illud facile consequitur quemvis a veritate quam longe aberrare, qui sibi suaserit ab hujusmodi serierum terminis intermediis ad infinitum productis ita exhauriri posse valorem fluentis propositæ, ut ultimum harum serierum *complementum* (quod fluentem ipsam primo sumptam, vel ejus homologam referre ostendimus) tamquam evanescens ac nullum legitime omitti possit. In errorem hunc tamen passim incidere Analysim vulgatam Capite sequenti §§. 7 & seqq. ostendam, nunc tantum dicam in hunc prolapsum fuisse Ab. Grandi inter Geometras sui temporis acutissimum, qui ex male cognita harum serierum natura in eam opinionem descendit, ex numero scilicet prorsus infinito terminorum, quorum singuli sunt *zero*, educi aliquid posse: quam sententiam acutissimis a penitiori Geometria haustis argumentis eo quo pollebat ingenii acumine, mordicus defendit in tantum, ut suæ ætatis adversariis negotii multum facesserit, & quibusdam nostris adhuc facessat. Quæ tamen Series eo modo, quo superius diximus, si evolvatur, cum pertineat ad aliquam ex seriebus §. 3. evolutis a coefficiente nume-

numerico abstracto $\frac{m}{m+n} = \frac{1'}{1'+1'}$SA, vel $\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)}$ SY; §. 3. & *6.* aperto in lumine collocatur: quo penitus corruit argumentum illud a serie hac infinita $1-1+1-1+1-\ldots$ desumptum, quo aliquo modo adumbrare sibi persuaserat celebris Auctor Dei infinitatem, qui ex nihilo omnia educere potuit.

§. 46. Hîc non est prætereundum, quod pene non vocâtum se se offert ad confirmandum quicquid Cap: V. §. *19*, & Cap: VII. §. *7*. diximus de differentia quæ intercedit maxima inter *zero* numericum & inter *zero* geometricum, hoc est, inter $o$ . A B, quod est *zero* abstractum applicatum protonumero lineari A B, & inter punctum A, quod est signum in lineari longitudine definitum. In primo casu $o$. A B a *zero* ad quantum transitum facere potest: & hoc duplici modo. Primo modo, quando eadem quantitas constans geometrica a se ipsa subtrahitur, sive protonumerus a protonumero, ut in exemplo §. *6*, in quo est (*Fig.* 12.) $o = \frac{1}{1}$ B A $-$ $\frac{1}{1}$.B A $= \frac{o}{1}$ B A: sed si fiat $-$ B A $=$ B C, fit B A. $-$ B A $=$ B A $+$ B C $=$ A C $=$ C A, & a differentia ejusdem quantitatis a se ipsa subtractæ ad summam duarum diversarum æqualium transferimur: vel si fiat in differentia $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$ A B, $n=m$, erit $\left(\frac{1-1}{1+1}\right)$ A B $= \frac{o}{1+1}$ A B, in qua $n=1$ est maxima, quæ usque ad *zero* decrescens fractionem a *zero* usque ad A B maximam evehit. Secundo modo a nihilo ad quantum & viceversa fit transitus, si ex: gr: posita fluente $\frac{o}{o+m}$ A B, vel $\frac{o}{m-o}$ A B, in qua fluens in suo originis puncto, quando $n=o$, antequam fluat est *zero*, fluendo convertitur in finitam, vel etiam in secundo casu in infinitam. Hac tamen ratione transeundi a *zero* ad quantum, vel viceversa, ob quam coefficiens tantum numericus a *zero* ad quantum, vel viceversa traducitur, nullum *nihil absolutum* ad quantum evehitur, neque ulla *absolute* annihilatur quantitas geometrica. Manente enim semper intacta quantitate geometrica A B protonumerum referente, coefficiens numericus ad ipsam applicatus determinat quota pars hujusce unitatis a fluente intercipiatur quæ potest esse etiam *zero*, quin ulla pars ipsius A B, ad suam homologam applicata ad nihilum redigatur: eo ferme modo, quo nulla pars datæ alicujus pecuniæ deperit, si nulla mihi detur, sed alibi tota conferatur. Et sane in systemate S A, in quo fluentes sunt $\frac{m}{m+n}$ A B, $\frac{n}{n+m}$ B A, quic-

quid

quid detrahis ex: gr: a prima additur secundæ, & viceversa, intacta semper manente A B: in systemate vero S Y cujus fluentes homologæ sunt $\frac{m}{m-n}$ AB, $\frac{n}{m-n}$ AB quicquid utrisque fluentibus addis, quod ad quamcumque quantitatem indefinitam crescere potest, auget ipsam A B; at maximum quod detrahi potest tunc est quando $n=o$, & quantitas minima reliqua est ipsa A B: nunquam igitur a nihilo ad quantum fit accessus, nec a quanto ad nihilum regressus. Quare quæ in calculo evanescunt quantitates, evanescente tantum coefficiente, qui ipsis applicatur, satis clare ostendunt nihil absolute evanescere, cum aliæ in ipsarum locum semper subrogentur, quæ quod primæ amittunt assumentes protonumerum primo sumptum simul inviolatum servant. Hinc palam se prodit necessitas illarum duarum fluentium homologarum, ne a nihilo ad quantum, & viceversa, præcipiti prorsus saltu in devia deferamur. Quod absurdum nunquam evitare potest Analysis communis, quæ ab uno tantum puncto, utpote ab una tantum fluente $x$ originem dimensionis desumens gigni putat ex nihilo eam quantitatem geometricam, & in nihilum item reduci, quæ in principio suæ inquisitionis sumenda erat tamquam data & constans.

§. 47. Hæc enim natura sua in utroque systemate eadem perseverans si in principio nulla, vere *zero* geometricum repræsentans, sumatur, semper in quacumque fluentium homologarum vicissitudine nulla manebit. Nam si seriebus §. 3. applicetur protonumerus A, hoc est punctum nullius dimensionis, series ex: gr: I.ª & II.ª fient

$$\frac{m}{m+n}\,A=A-A+A-A\ldots+A-\frac{n}{n+m}\,A=A-A+A-A\ldots+\frac{n}{m+n}\,A,$$

vel ex §. 6.

$$\frac{m}{m+n}A=A+A+A+A\ \ldots\ +A-\frac{n}{n+m}\,A=A+A+A+A\ldots+\frac{m}{m+n}\,A:$$

in quibus punctum A semel sumptum ut protonumerus idem semper perseverat, & singula fluens in dimensione semper nulla, licet coefficientes numerici easdem vices subeant, quibus afficiuntur applicati ad protonumerum A B datæ magnitudinis. Quamobrem manifeste patet, quod quantitas quæcumque geometrica cujuscumque magnitudinis ac dimensionis initio sumatur, semel sumpta unitatis vicem gerens, ( sit etiam nulla sive punctum ) in eodem systemate inviolata manet, neque unquam in aliam magnitudinem ac dimensionem converti potest: coefficientes vero numerici singularum fluentium homologarum continuo fluxui obnoxii a *zero* ad quantum & viceversa singillatim traduci possunt, prout systema, in quo sunt, requirit. Ratio vero hujusce diversitatis in eo sita est, quod constituto jam systemate quantitas geometrica ( sive proto-

tonumerus ) una & indiviſa reperitur nulli alteri comparanda : coefficientes vero homologi , qui bini bini neceſſario concurrunt ad ſyſtema conſtituendum , ſinguli continuo fluxu valorem mutent oportet , atque etiam , ſi res fert , nulleſcant , & ad infinitum evehantur : dummodo inter ſe comparati ſummam in S A , differentiam in S Y ſemper unitati abſtractæ numericæ æqualem ſervent , ut quod uni demitur , alteri addatur , & viceverſa , ne hujuſce unitatis abſtractæ pars ulla pereat . Quare demum a noſtra tantum Theoria inviolatum ſervatur axioma :

*Ex nihilo nihil* vel *in nihilum nil poſſe reverti*.



CAPUT

# CAPUT XII.

*De continua Fluentium abſtractarum utriuſque Syſtematis diviſione vulgo uſurpata', ac de vera ſerierum geometricarum origine & natura.*

§. I. EXplorata in Capite ſuperiori natura ſerierum arithmeticarum, quæ a noſtra continuæ diviſionis Fluentium methodo ortum ducunt, tranſeamus in hoc Capite ad ſecundam continuæ diviſionis methodum excutiendam, quæ una vulgo uſurpatur, ut originem ac naturam Serierum geometricarum intimius aſſequamur. Ac primum fluentes homologæ abſtractæ utriuſque ſyſtematis $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{n+m}$; $\frac{m}{m-n}$, $\frac{-n}{m-n}$ continua diviſione uſu recepta ad ſequentes ſeries reducuntur:

$$1.^{a}\ \frac{m}{m+n}=\frac{1}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1}{1}-\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}-\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1}\ldots\pm\frac{(\frac{n}{m})^{(g+1)-1}}{1}\mp\frac{(\frac{n}{m})^{g+1}}{1+\frac{n}{m}}$$

$$2.^{a}\ \frac{n}{n+m}=\frac{1}{1+\frac{m}{n}}=\frac{1}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1}\ldots\pm\frac{(\frac{m}{n})^{(g+1)-1}}{1}\mp\frac{(\frac{m}{n})^{g+1}}{1+\frac{m}{n}}$$

$$3.^{a}\ \frac{m}{m-n}=\frac{1}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1}\ldots+\frac{(\frac{n}{m})^{(g+1)-1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{g+1}}{1-\frac{n}{m}}$$

$$4.^{a}\ \frac{-n}{-n+m}=\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{1}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1}\ldots+\frac{(\frac{m}{n})^{(g+1)-1}}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{g+1}}{-1+\frac{m}{n}}$$

Sin-

Singulæ hujuſmodi Series duobus elementis conſtant, numero ſcilicet indefinito terminorum ejuſdem denominatoris 1, & complemento, quod a ſerie antecedenti terminorum eſt probe diſtinguendum, quo licet ſeries ſingulas continua diviſione ad infinitum producere. Quare aggregatum terminorum ejuſdem denominatoris 1 vocabitur a nobis in poſterum abſolute Series, terminus ſequens *complementum*: $g+1$ indicat numerum terminorum ſeriei æqualem numero diviſionum procedente $g$ per ſeriem numerorum naturalium $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$: $(g+1)-1=g$ exponentem ultimi termini Seriei, $g+1$ exponentem complementi repræſentabit. In duabus primis Seriebus termini exponente pari, non excepto *zero*, præditi ſunt ſigno poſitivo, qui vero impari gaudent, ſigno negativo afficiuntur: complemento vero ſignum contrarium ultimo ſeriei termino præponitur. Verum 3.ª terminis ſingulis poſitivis una cum complemento conſtat: 4.ª vero (quæ negativa eſt) habet terminos ſingulos ſeriei poſitivos, negativum complementum. Ex ſola inſpectione hujuſmodi Serierum manifeſte patet, eſſe ſingulas (ſi ſigna in duabus primis excipias) illius naturæ, quæ Series geometricæ vulgo appellantur, cum termini ſinguli inter ſe ſint in ratione $1 : \frac{n}{m}$. Series vero 1.ª ſi ponatur $m>n$, erit decreſcens, creſcens 2.ª, vel viceverſa ſi $n>m$: 3.ª ſemper decreſcens; 4.ª ſemper creſcens: quia in hoc Syſtemate SY $m$ ſemel major $n$, ſemper major ſervatur.

§. 2. Hoc poſito facile eſt demonſtrare perfectam intercedere æqualitatem inter ſingulas fluentes abſtractas primi membri; & earum evolutionem in ſecundo membro peractam, producatur licet ad infinitum diviſio: dummodo ſingulis terminis non æqualis ſed idem protonumerus applicandus intelligatur. Nam ſi loco denominatoris conſtantis 1, quo afficitur quivis ſeriei terminus, ſubſtituatur in 1.ª

$$\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}, \text{ cui æquatur; } \frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}} \text{ in } 2.^a; \ \frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}} \text{ in } 3.^a; \text{ ac tandem in } 4.^a \ \frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}};$$

facta hac ſubſtitutione invenies

$$1.^{am} \ \frac{1}{1+\frac{n}{m}} = \frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{n}{m}\right)-\left(\frac{n}{m}+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{n}{m}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^3\right)-\left(\left(\frac{n}{m}\right)^3+\left(\frac{n}{m}\right)^4\right)\ldots\pm\left(\left(\frac{n}{m}\right)^g+\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}\right)\mp\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}}{1+\frac{n}{m}}$$

$$2.^{am} \ \frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{m}{n}\right)-\left(\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{m}{n}\right)^2+\left(\frac{m}{n}\right)^3\right)-\left(\left(\frac{m}{n}\right)^3+\left(\frac{m}{n}\right)^4\right)\ldots\pm\left(\left(\frac{m}{n}\right)^g+\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}\right)\mp\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{1+\frac{m}{n}}$$

3.ª$^{m}$

$$3.^{am}\ \frac{1}{1-\frac{n}{m}} = \frac{\left(\frac{1}{1}-\frac{n}{m}\right)+\left(\frac{n}{m}-\left(\frac{n}{m}\right)^{2}\right)+\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{2}-\left(\frac{n}{m}\right)^{3}\right)+\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{3}-\left(\frac{n}{m}\right)^{4}\right)\ldots+\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{g}-\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}\right)+\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}}{1-\frac{n}{m}}$$

$$4.^{am}\ \frac{-1}{-1+\frac{m}{n}} = \frac{\left(\frac{-1}{1}+\frac{m}{n}\right)+\left(-\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^{2}\right)+\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^{2}+\left(\frac{m}{n}\right)^{3}\right)+\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^{3}+\left(\frac{m}{n}\right)^{4}\right)\ldots+\left(-\left(\frac{m}{n}\right)^{g}+\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}\right)-\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{-1+\frac{m}{n}}$$

Idem invenies si more communi termini ad eumdem, ut dicitur, denominatorem reduxeris: quæ methodus nihil aliud est nisi substitutio æqualis $\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$ &c. pro æquali 1. Quod si in istis formulis complementum omittas, quantumlibet minor sit fractio $\frac{n}{m}$, & quantumlibet major sit ultimi termini seriei exponens, numquam series, quacumque evolutione crescat aut decrescat, & quicumque sit terminorum numerus, etiam mente conceptus infinitus, suam fluentem, a qua evolvitur, æquabit, nisi supra indicatam fractionem sibi adsciscat; quo nomine *complementum* appellatur.

§. 3. Ex hoc uno Theoremate quicquid ad Serierum geometricarum originem atque naturam, nec non ad earum proprietates investigandas opus est, non ita difficile erui potest: nos hîc quædam Theoremata magis necessaria ac prima deducemus. Ut hoc perficiamus, recenseamus oportet elementa singula, quæ simul concurrunt ad efformandas series geometricas ab unitate incipientes, quoniam singulæ ad eumdem primum terminum $\frac{1}{1}$ reduci possunt. Quorum 1.$^{um}$ est fluens abstracta utriusque systematis, a qua continua divisione oritur series: 2.$^{um}$ Series geometricæ convergentes aut divergentes a singulis fluentibus evolutæ: 3.$^{um}$ secundus seriei terminus, qui est minimus, ad quem reducitur quæcumque ratio magis composita duorum quorumvis proximiorum terminorum; quæ ratio in nostris formulis est $1 : \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}$. Hic secundus seriei terminus, qui in methodo

communi *exponens* seriei dicitur, a nobis in Capite sequenti per ea quæ dicentur *Basis systematis* vocabitur: 4.um Fluens homologa propositæ: 5.um Series geometrica huic respondens: *6.um complementum seriei*, sive fractio illa, quæ addita vel subtracta a serie fluentem æquat: 7.um numerus terminorum seriei geometricæ cujusvis: 8.um ultimus seriei terminus: ac tandem *9.um* summa totius seriei propositæ. Hic tamen revocetur velim quod alias adverti, me quando aliquid ex istis elementis *datum* dico, intelligere *datum* quidem *forma* non valore, de quo nihil nostra Theoria, ut vidimus, sollicita est, quæ valorum limites tantum considerat, ut ad eam formam generalem reducantur valores peculiares fluentium, quam necessario systema, ad quod pertinent, requirit.

§. 4. Ac primum quomodo datis fluentibus abstractis series geometricæ continua divisione inveniantur §. 1. satis docuit. Hoc tantum est animadvertendum, quod seriei termini denominatore 1 constanti sunt singuli afficiendi, qui ex nostra doctrina æqualis est summæ vel differentiæ fluentium homologarum illius systematis, ad quod fluens pertinet. Denominator hic 1 in methodo communi aut omnino omissus, aut male applicatus, & quod caput est, nunquam intellectus, Analysim vulgatam difficultatibus undique implicatam in deducendis etiam harum Serierum proprietatibus in devia duxit, ut e sequentibus patebit. Hoc bene firmato facile est data fluente invenire seriem, & viceversa data serie invenire fluentem illi respondentem. Si enim fluentes singulæ ad numeratorem 1 reducantur ante Seriei evolutionem, & habeatur fluens major S A, oriri seriem continuo convergentem alternantibus signis formula 1.a §. 1. ostendit, in qua $\frac{n}{m}$ est unitate minor. Contra vero si habeatur fluens minor S A, oritur Series geometrica similis primæ, sed divergens, cum sit $\frac{m}{n}$ secundi termini major unitate. Fluentes vero singulæ S Y exhibent Series 3.am & 4.am ejusdem §. 1; quarum termini singuli simul cum complemento in 3.a signo positivo afficiuntur & series est convergens: 4.a vero series quæ evolvitur a minori fluente negativa, & est divergens, terminis singulis positivis & ipsa afficitur, complemento negativo. Quod si primum propositæ essent series geometricæ, quæ dicta sunt eodem §. 1. ostendent facile fluentem, a qua ortum duxerunt. Si enim series alternantibus signis erit convergens, vel divergens, adde duos primos seriei terminos, quorum summa dabit denominatorem fluentis numeratoris 1, ac ideo fluentem minorem vel majorem S A, ad quam pertinet Series. Verum si Seriei convergentis vel divergentis termini singuli iisdem signis afficiantur, quæ erit convergens positiva pertinet ad fluentem majorem positivam S Y, cujus denominator erit differentia secundi termini a primo $\frac{1}{1}$: quæ vero erit divergens positiva evolvitur a fluente negativa ejusdem systematis S Y, & ejus denominator est differentia primi termini $\frac{1}{1}$ a secundo de-

tra-

tracti. Hujusmodi Series si complemento careant, dato ultimo Seriei termino ex eodem §. facile invenietur.

§. 5. Quemadmodum fluens quævis cum suâ homologa tam necessario vinculo consociatur, ut una sine altera stare nequeat, & data una altera facile inveniatur; ita quævis Series geometrica alteram necessario requirit, quæ simul ob eamdem rationem homologæ jure dicentur, quarum una data altera ex eadem doctrina habetur. Itaque si data quacumque formula §. 1. fractio secundi termini $\frac{n}{m}$ vel $\frac{m}{n}$ exponente $\pm 1$ afficiatur, ab una eademque formula tam fluentes ambæ homologæ, quam Series homologæ cum suis complementis facile obtinentur. Vocata enim M fluente primi membri, fac

$$M = \frac{1^{\pm 1}}{1} - \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{2}}{1} - \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{3}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{4}}{1} \ldots \pm \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{(g+1)-1}}{1} \mp \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{g+1}}{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}}$$

$$M = \frac{1^{\pm 1}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{2}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{3}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{4}}{1} \ldots + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{(g+1)-1}}{1} + \frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{g+1}}{1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}}$$

Et series prima continebit Series homologas convergentem & divergentem cum suis complementis fluentium homologarum S A: secunda Series item homologas cum suis complementis convergentem & divergentem fluentium homologarum S Y, si advertas posito $n<m$ complementum $\frac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{-1}\right)^{g+1}}{1-\left(\frac{n}{m}\right)^{-1}}$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{1-\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{-\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{-1+\left(\frac{m}{n}\right)}$$ fieri negativum, ut ostendit formula 4.ª §. 1.

§. 6. Sed quoniam hac methodo §. 1. in utroque systemate Series homologæ convergens una, divergens altera necessario conjunguntur; nunc ostendendum quomodo quæcumque divergens transformari possit in convergentem, & convergens in divergentem, & quomodo series homologæ vel ambæ in convergentes, vel in divergentes ambæ converti possint. Ut hoc fiat revocetur prima fluentium utriusque systematis necessaria conditio, ob quam cum sit in S A earum summa $\frac{m+n}{m+n}$, est etiam $\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$, vel $\frac{\frac{m}{n}+1}{\frac{m}{n}+1}$: in primo casu erunt fluentes homologæ abstractæ 1.$^a$ M $= \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$; 2.$^a$ N $= \frac{n}{m}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$; in secundo casu 3.$^a$ M $= \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{n}}$; 4.$^a$ N $= \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$, quæ si in seriem transformentur, dabunt

$$1.^{am}\ M = \left(\frac{1}{1}\right) - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3} \ldots\ldots \pm \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{(g+1)-1} \mp \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}}{1+\frac{n}{m}};$$

$$2.^{am}\ N = \frac{n}{m}\left(\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3} \ldots\ldots \pm \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{(g+1)-1} \mp \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}}{1+\frac{n}{m}}\right)$$

$$3.^{am}\ M = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{3} \ldots\ldots \pm \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{(g+1)-1} \mp \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{1+\frac{m}{n}}\right);$$

$$4.^{am}\ N = \frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{3} \ldots\ldots \pm \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{(g+1)-1} \mp \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{1+\frac{m}{n}}$$

Et

Et in systemate S Y cum sit differentia fluentium $\frac{m-n}{m-n}$ in qua semper $m>n$, erit $\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}$, vel $\frac{\frac{m}{n}-1}{\frac{m}{n}-1}$: in primo casu I.$^a$ $M=\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$; II.$^a$ $-N=\frac{-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}.1$: in secundo casu III.$^a$ $M=\frac{-m}{n}.\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}$; IV.$^a$ $-N=\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}$, quarum series erunt

$$\text{I.}^a\ M=\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}\ldots\ldots+\frac{(\frac{n}{m})^{(g+1)-1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{g+1}}{1-\frac{n}{m}};$$

$$\text{II.}^a\ -N=\frac{-n}{m}\left(\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}\ldots+\frac{(\frac{n}{m})^{(g+1)-1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{g+1}}{1-\frac{n}{m}}\right)$$

$$\text{III.}^a\ M=-\frac{m}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}\ldots+\frac{(\frac{m}{n})^{(g+1)-1}}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{g+1}}{-1+\frac{m}{n}}\right);$$

$$\text{IV.}^a\ -N=\frac{1}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}\ldots\ldots+\frac{(\frac{m}{n})^{(g+1)-1}}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{g+1}}{-1+\frac{m}{n}}:$$

In seriebus primis fluentium S A si $m>n$, series geometricæ 1.$^a$ & 2.$^a$ erunt ambæ convergentes, & fluens major M, minor N: divergentes vero quas præbent 3.$^a$ & 4.$^a$: contra vero si ponatur $m<n$. In systemate S Y, in quo $m$ in formulis $>n$ I.$^a$ & II.$^a$ erunt convergentes; III.$^a$ & IV.$^a$ ambæ divergentes.

tes. Quod si in hoc systemate SY velis $n > m$, fac $\frac{m-n}{m-n} = \frac{\frac{m}{-n}+1}{\frac{m}{-n}+1}$

$= \frac{\frac{-m}{n}+1}{\frac{-m}{n}+1}$, ex qua $\frac{n-m}{n-m}$: cætera ut supra. Liberum igitur semper erit fluentes homologas utriusque systematis vel alterutram in divergentem, alterutram in convergentem, vel ambas in convergentes, aut divergentes convertere: ac manifeste colligitur quid facto opus sit, ut a seriebus crescentibus geometricis a vero fluentium valore semper magis divergentibus ad series geometricas convergentes ad fluentium valorem semper magis accedentes transferamur, quem tamen neglecto complemento (ut ostendam) nunquam attingunt. Cognita enim origine & natura harum Serierum, & quæ communi vinculo consociantur, facile est hoc tradito artificio semper inter series geometricas convergentes fluentium evolutionem continere. Quod certe quidem Analysi communi interdicitur, quæ series hasce a sua origine distrahit, ac solitarias semper sumit: quo fit ut ab illis impedimentis, quibus ab angusta nimis & cæca subducendi calculos ratione præpeditur, nunquam sese expedire possit, & ab ambagibus *infiniti & zero* mysterii nomine cohonestatis se liberare, ut inferius semper magis patebit.

§. 7. Et sane diligentissime est animadvertendum, seriem quamvis ortam a continua alicujus fluentis divisione non posse natura sua distrahi a suo complemento, quocum necessario ita conjungitur, ut si nulla sit divisio, nulla sit Series, complementum nullum; si una sit divisio, unus sit seriei terminus cum suo complemento; divisiones duæ duos dent seriei terminos una cum complemento, & sic successive, & indefinite: ergo complementum est elementum ita necessarium seriei geometricæ, ut a serie nunquam natura divelli possit, quo sine series in suspenso manet, & terminis pluribus, paucioribus augeri vel minui potest. Itaque quæcumque Series solitarie sumpta, quemadmodum nunquam valorem fluentis, a qua evolvitur, exhaurire potest, nunquam & ipsa nec in terminis nec in valore absolute poterit determinari: atque ideo & termini & valor arbitrio relinquuntur, nisi suum complementum adjungas, quo tantum determinatur Series, sive numerus terminorum seriei, qui cum suo complemento fluentem exhauriunt quovis modo & numerus terminorum seriei in eadem majori vel minori ratione procedentium, & complementum infinitimode varietur.

§. 8.

§. 8. Nam erit ex: gr: fluens S Y posito $m > n$

$$\frac{1}{1-\frac{n}{m}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{(o+1)-1}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{1}}{1-\frac{n}{m}} = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{0}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2}}{1-\frac{n}{m}} = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{0}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{3}}{1-\frac{n}{m}} \cdots \\ & = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{0}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2}}{1} \ldots\ldots + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{(g+1)-1}}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}}{1-\frac{n}{m}} \\ & -\frac{m}{n}\left(\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{0}}{1} - \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{1}}{-1+\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n}\left(\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{0}}{1} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{1}}{1} - \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2}}{-1+\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n}\left(\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{0}}{1} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2}}{1} - \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{3}}{-1+\frac{m}{n}}\right) \\ & = -\frac{m}{n}\left(\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{0}}{1} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{1}}{1} \ldots\ldots + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{(g+1)-1}}{1} - \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{g+1}}{-1+\frac{m}{n}}\right) \end{aligned} \right.$$

in prima formula Series sunt convergentes, in secunda divergentes, & in utraque termini Seriei ab 1 usque ad infinitum singillatim progredi possunt, procedente $g$ in numero terminorum $g+1$ indefinito successive per $o$, 1, 2, 3, 4 ... ∞. Insuper in formulis superioribus singulis series in terminis vere determinatæ sunt, quia singulæ cum suis complementis exhibentur, quibus sine quovis numero terminorum constent, indeterminatæ vere sunt censendæ. Si enim in una ex Seriebus superioribus ponas ex: gr: ultimum terminum $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{(g+1)-1}}{1}$; atque illi addas complementum $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g+1}}{1-\frac{n}{m}}$; cum exponens complementi $2g+1$ de-

ter-

terminet numerum terminorum feriei, augenda erit feries numero terminorum $g$ antequam determinetur ut fit ultimus ejus terminus $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{(2g+1)-1}}{1}$, & numerus terminorum feriei determinatus $2g + 1$. Contra diminuendus erit numerus terminorum fi exponens complementi minor fit numero terminorum. Hifce animadverfis ftatim patet natura & origio ferierum geometricarum tam convergentium, quam divergentium, & modus, quo inter fe legitime comparari atque confociari poffunt, difficultatibus omnibus evanefcentibus. Quæ omnia ac fingula cum ignoret Analyfis communis in tractandis hujufmodi Seriebus, quas femper a fuo complemento, & a fua origine divellit, hæret dubia, & quo fe vertat nefciens divergentes, quas offendit, gordianum tamquam nodum, a calculo præcidit, quæ tamen & neceffariæ funt, & nihilo plus negotii quam convergentes exhibent, in quas fi libuerit nullo negotio transfmutari, & pro re nata ad ufum traduci, mea Theoria nunc demum docet.

§. *9*. Hifce præmiffis facile erit folvere fequens

## P R O B L E M A.

Cujufcumque feriei geometricæ tam convergentis, quam divergentis fummam invenire.

Ex §. 2. conftat quemvis feriei terminum denominatore 1 affici oportere, qui non eft nifi fumma aut differentia fluentium homologarum prout Seriem evolutam velis a fluente Syftematis S A, vel S Y. Ergo fi in fingulis terminis cujufvis Seriei geometricæ loco denominatoris 1 ponas valorem illum, quem fyftema requirit, reductione facta fummam quæfitam obtinebis. Doctrina hæc applicetur formulis generalibus §. 1, fublato complemento, ut indeterminatæ habeantur: ac primo ponatur non haberi nifi primum terminum $\frac{1}{1}$ feriei ex prima divifione ortum, cujus fumma quæritur, & vocetur S. fumma quævis. Cum ex demonftratis denominator 1 fit æqualis $\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$, vel $\frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}$; vel $\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}$, vel $\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}$, pofita $m > n$, patet feriem unius primi termini $\frac{1}{1}$ omnino

inde-

indeterminatam esse natura, & pertinere posse ad singulas fluentes utriusque systematis; determinatur tamen statim ac loco denominatoris 1 ponatur unus aut alter ex superioribus valoribus. Sumpto primo erit series $S = \frac{1}{1} = 1 \left( \frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}} \right)$, & numerator $1 = (\frac{n}{m})^{0}$; ita ut sit $S = (\frac{n}{m})^{0}$. $\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$. Quoniam ex eodem §. 1. Series quævis cum suo complemento æquatur semper fluenti, a qua evolvitur, consequitur ab hac S demi oportere complementum $\frac{\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$ ut fluentem æquet, ergo Series hæc major fluente a qua evolvitur. Se se offerat nunc series duorum terminorum, nempe $S = \frac{1}{1} - \frac{(\frac{n}{m})}{1}$: in hac numerator secundi termini $\frac{n}{m}$, fractio unitate minor, ostendit seriem esse convergentem, & signum negativum, cui applicatur, docet fluentem, a qua evolvitur, esse majorem S A & esse $\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$. Igitur datis in quavis serie duobus primis terminis & eorum positione, omnino determinatur natura cujusvis seriei geometricæ, quæ nullo negotio indefinite produci poterit. Summa vero Seriei duorum terminorum erit $S = \frac{(\frac{n}{m})^{0}}{1} - \frac{(\frac{n}{m})}{1} = (\frac{n}{m})^{0} \cdot \left( \frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}} \right)$

$$-\frac{n}{m}\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)=\frac{1-(\frac{n}{m})^2}{1+\frac{n}{m}}$$ , quæ deficit a sua fluente per $\frac{(\frac{n}{m})^2}{1+\frac{n}{m}}$ quæ proinde ut complementum addenda est seriei, ut fluentem æquet. Hac methodo in quavis serie §. 1. quotvis terminis prædita summas serierum cujusvis naturæ, prout una aut plures divisiones fluentis institutæ fuerint (hoc est prout uno aut pluribus terminis Series constent) sequentes formulæ ordine dabunt.

§. 10. I.ª $$S=\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1-(\frac{n}{m})^2}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1+(\frac{n}{m})^3}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1-(\frac{n}{m})^4}{1+\frac{n}{m}}\ldots=\frac{1-(\frac{n}{m})^{2g}}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1+(\frac{n}{m})^{2g+1}}{1+\frac{n}{m}}$$

II.ª $$S=\frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}=-\left(\frac{-1+(\frac{m}{n})^2}{1+\frac{m}{n}}\right)=\frac{1+(\frac{m}{n})^3}{1+\frac{m}{n}}=-\left(\frac{-1+(\frac{m}{n})^4}{1+\frac{m}{n}}\right)\ldots=-\left(\frac{-1+(\frac{m}{n})^{2g}}{1+\frac{m}{n}}\right)=\frac{1+(\frac{m}{n})^{2g+1}}{1+\frac{m}{n}}$$

III.ª $$S=\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1-(\frac{n}{m})^2}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1-(\frac{n}{m})^3}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1-(\frac{n}{m})^4}{1-\frac{n}{m}}\ldots=\frac{1-(\frac{n}{m})^{2g}}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1-(\frac{n}{m})^{2g+1}}{1-\frac{n}{m}}$$

IV.ª $$S=\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{-1+(\frac{m}{n})^2}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{-1+(\frac{m}{n})^3}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{-1+(\frac{m}{n})^4}{-1+\frac{m}{n}}\ldots\ldots=\frac{-1+(\frac{m}{n})^{2g}}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{-1+(\frac{m}{n})^{2g+1}}{-1+\frac{m}{n}}$$

In I.ª primus terminus Seriei superat valorem fluentis; duo termini deficiunt a valore fluentis; tres termini superant ejusdem fluentis valorem, & sic alternando summa seriei modo superat fluentis valorem, modo a fluente superatur: idem contingit in II.ª sed hac differentia, quod in I.ª quo major terminorum numerus seriei sumitur, acceditur modo per excessum semper minorem, modo per defectum semper minorem ad valorem fluentis: quo major enim est exponens $g$ fractionis $(\frac{n}{m})^g$ eo minor est fractio. At in II.ª per easdem vices rece-

receditur ſemper magis a fluentis valore: quo major enim eſt exponens $g$ fractionis $\left(\frac{m}{n}\right)^g$, eo major eſt fractio. In III.ª quo major ſumitur terminorum ſeriei numerus ſumma ſemper poſitiva ſemper minus deficit a valore fluentis. Tandem in IV.ª in qua fluens minor evoluta ſumpta fuit negativa, quo major ſumitur numerus terminorum ſeriei, eo magis ſumma ſemper poſitiva excedit valorem fluentis negativæ.

§. 11. Vocato igitur $c$ complemento ſeriei geometricæ cujuſvis, ex formulis ſuperioribus ſequentes formulæ eruuntur in hac re proſpere agenda maxime neceſſariæ

$$\left.\begin{aligned} 1.^a\quad s+c &= \frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}} \\ 2.^a\quad s-c &= \frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)^{2g+1}}{1+\frac{n}{m}} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g+1}}{1+\frac{n}{m}} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$$

$$\left.\begin{aligned} 3.^a\quad -s+c &= -\left(\frac{-1+\left(\frac{m}{n}\right)^{2g}}{1+\frac{m}{n}}\right) + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2g}}{1+\frac{m}{n}} \\ 4.^a\quad s-c &= \frac{1+\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}}{1+\frac{m}{n}} - \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}}{1+\frac{m}{n}} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{1+\frac{m}{n}}$$

$$5.^a\quad \frac{n}{m}(s+c) = \frac{n}{m}\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}}\right) = 3.^a$$

6.ª $\frac{n}{m}(s - c) = \frac{n}{m}\left(\frac{1 + (\frac{n}{m})^{2g+1}}{1 + \frac{n}{m}} - \frac{(\frac{n}{m})^{2g+1}}{1 + \frac{n}{m}}\right) = 4.^{a}$

7.ª $\frac{m}{n}(-s + c) = \frac{m}{n}\left(-\left(\frac{-1 + (\frac{m}{n})^{2g}}{1 + \frac{m}{n}}\right) + \frac{(\frac{m}{n})^{2g}}{1 + \frac{m}{n}}\right) = 1.^{a}$

8.ª $\frac{m}{n}(s - c) = \frac{m}{n}\left(\frac{1 + (\frac{m}{n})^{2g+1}}{1 + \frac{m}{n}} - \frac{(\frac{m}{n})^{2g+1}}{1 + \frac{m}{n}}\right) = 2.^{a}$

9.ª $s + c = \frac{1 - (\frac{n}{m})^{g}}{1 - \frac{n}{m}} + \frac{(\frac{n}{m})^{g}}{1 - \frac{n}{m}} = \frac{1}{1 - \frac{n}{m}}$

10.ª $s - c = \frac{-1 + (\frac{m}{n})^{g}}{-1 + \frac{m}{n}} - \frac{(\frac{m}{n})^{g}}{-1 + \frac{m}{n}} = \frac{-1}{-1 + \frac{m}{n}}$

11.ª $\frac{m}{n}(-s + c) = \frac{m}{n}\left(\frac{1 - (\frac{m}{n})^{g}}{-1 + \frac{m}{n}} + \frac{(\frac{m}{n})^{g}}{-1 + \frac{m}{n}}\right) = 9.^{a}$

12.ª $\frac{-n}{m}(s + c) = \frac{-n}{m}\left(\frac{1 - (\frac{n}{m})^{g}}{1 - \frac{n}{m}} + \frac{(\frac{n}{m})^{g}}{1 - \frac{n}{m}}\right) = 10.^{a}$

Lim

In 1.$^a$ & 2.$^a$ series sunt decrescentes, & termini alternant signa, sed in 1.$^a$ termini sunt numero pares, impares in 2.$^a$: idem de 3.$^a$ & 4.$^a$; sed utræque series sunt divergentes. Formulæ 5.$^a$ & 6.$^a$ dant series convergentes, quæ respondent 3.$^æ$ & 4.$^æ$ divergentibus: 7.$^a$ vero & 8.$^a$ respondent 1.$^æ$ & 2.$^æ$, sed series sunt divergentes. Omnes vero hujusmodi Series sunt evolutæ a fluentibus homologis systematis S A. Quæ remanent quatuor pertinent ad fluentes homologas S Y, in quibus formulæ non immutantur, sit par vel impar exponens complementi, sive numerus terminorum seriei, quia termini singuli serierum sunt positivi. Verum 9.$^a$ est convergens, divergens 10.$^a$, sed hæc in convergentem convertitur ope 12.$^æ$, quemadmodum 9.$^a$ convergens ope 11.$^æ$ transmutari potest in divergentem. Quare tam a crescente serie, quam a decrescente idem scopus obtineri potest, licet in decrescente ad valorem fluentis evolutæ semper magis accedatur; magis semper recedatur in crescente: dummodo tamen intelligatur, hujusmodi prorsus oppositas series non posse simul congruere nisi suo complemento perficiantur. Quo ignorato ignoratur etiam quid sibi velint hujusmodi series crescentes, & qua ratione fieri possit, ut continua divisione unius fractionis enascatur quotiens sive series semper magis ab ejus valore indefinite recedens, & quomodo cum decrescentibus possint conciliari.

§. 12. Harum formularum auxilio, atque earum simul combinatione utilia Theoremata erui possunt geometricis seriebus pro re nata inservientia. Ego quædam tantum magis necessaria hîc innuam, quæ a superiori doctrina sponte manant.

Coroll. 1. Series geometricæ tam crescentes, quam decrescentes ab 1 incipientes superiori methodo evolutæ a coefficiente numerico abstracto fluentium homologarum utriusque systematis originem suam trahunt, quibus applicandus est protonumerus, ut fluentem geometricam repræsentent: atque ideo singuli seriei termini ducendi sunt in communem protonumerum ut series geometrica cum suo complemento æquetur fluenti geometricæ.

Coroll. 2. In formulis superioribus singulis complementum quodcumque additum & subtractum a formula evanescit: ergo quicumque valor huic tribuatur, semper constans erit formula, dummodo $\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}$ sive fluens eadem perseveret. Sed hoc complementum additum vel subtractum a fluente (prout res requirit) seriem geometricam tot terminis conflatam, quot unitates in exponente complementi continentur, æquat; ergo in istis formulis posita constanti fluente abstracta tam complementum, quam series geometrica naturam fluentis acquirunt. Cum vero posita constanti fluente complementum non nisi ob rationem exponentis infinitimode variare possit, atque esse fluens, & series non nisi numero terminorum, atque eorum valore infinitimode variare; consequitur caussam fluxionis in istis formulis in uno exponente complementi sitam esse, ob quem Series geometricæ numero terminorum indefinite variare possunt, manente constanti fluente, & ratione qua termini seriei sese respiciunt sive Seriei natura.

Coroll. 3. Limes minimus exponentis complementi est (*o*), in quo casu (ut vide-

videre est in formulis $1^{a}$, $3^{a}$, $5^{a}$, $7^{a}$, $9^{a}$, $10^{a}$, $11^{a}$, $12^{a}$ posito $g=0$ ) complementum est ipsa fluens: quo indicatur nullam institutam fuisse fluentis divisionem, atque ideo nullum terminum seriei, seriem nullam, complementum nullum cum sit ipsa fluens. Ex hoc vero limite exponens complementi per seriem numerorum naturalium crescere potest indefinite, atque ideo etiam numerus terminorum seriei crescere potest indefinite nullo dato limite coercendus. Hinc series geometricae in formulis §. *9*. tot terminis singillatim constare possunt, quot indicat series $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$, quin ullam in valore subeant mutationem: aggregatum enim seriei & complementi semper constans est & aequale fluenti primum propositae.

§. 13. Coroll. 4. Doctrina §. *9*. & formulis §. 10, & 11. docemur quomodo cujusvis seriei tam convergentis, quam divergentis summa inveniatur. Juvat tamen hoc exemplorum appositione illustrare. Sit igitur proposita series geometrica convergens $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots$ ac velimus invenire summam hujusce seriei dato numero terminorum $2g$ pari, vel $2g+1$ impari conflatae. Scimus §. 1. fractionem, a qua series evolvitur, esse fluentem majorem S A, & aequalem $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$; terminum seriei locum $2g$ occupantem esse $\left(\frac{1}{2}\right)^{2g-1}$, atque seriei complementum $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2g}}{1+\frac{1}{2}}$. Quod si numerus terminorum sit $2g+1$ impar, erit ultimus terminus $\left(\frac{1}{2}\right)^{(2g+1)-1}$, & ejus complementum $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2g+1}}{1+\frac{1}{2}}$. Erit igitur in primo casu

$$\frac{1}{1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1}}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{1} \ldots\ldots - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2g-1}}{1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2g}}{1+\frac{1}{2}} :$$

& in secundo

$\frac{1}{1}$

$$\frac{1}{1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1}}{1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{1}\;\ldots\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2g}}{1}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2g+1}}{1+\frac{1}{2}}$$

posito $\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$ loco denominatoris 1. Posito $2g=0$, series geometrica, ut vidimus, fit nulla, & complementum est ipsa fluens. Quod si ponatur $2g=4$, erit seriei summa $=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{16}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2-\frac{1}{8}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{1}{24}$:

& posito $2g+1=5$, erit summa $=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1+\frac{1}{32}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{48}$. Igitur in primo casu summa deficit a valore fluentis per $\frac{1}{24}$; qui defectus major est defectu $\frac{1}{32}$ seriei sex terminorum; in secundo casu excedit valorem fluentis per $\frac{1}{48}$, qui excessus est minor defectu $\frac{1}{32}$, & est major excessu $\frac{1}{64}$ seriei terminorum septem, & sic successive: ergo defectus vel excessus valoris seriei a vero fluentis valore erit semper minor, quo major terminorum seriei numerus sumatur. Excessus vero maximus hujusce seriei supra fluentem majorem posito $2g+1=1$, & series $=\frac{1}{1}$ primo termino, in quo casu summa $=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2+1}$ æqualis fluenti

ho-

homologæ minori: defectus maximus $\frac{1}{6}$, quando $2g = 2$, & series duorum terminorum $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$. Sit nunc series

$$\frac{1}{1} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^1 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^3 \ldots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^{(g+1)-1}$$

, quam scimus evolutam a fluente majori $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ systematis SY, in qua $g$ tam potest esse par, quam impar, &

$$\frac{1}{1} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^1 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^2 \ldots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^g = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{g+1}}{1+\frac{1}{2}}$$

, quæ semper deficit a valore fluentis, cum sit $= \frac{2}{1} - \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^g$: defectus vero maximus quando $g = 1$, qui est $= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ æqualis fluenti minori. Posito $g = 4$, erit summa $= \frac{2}{1} - \frac{1}{16}$, & posito $g = 5$, erit summa $= \frac{2}{1} - \frac{1}{32}$: & sic successive.

§. 14. Sit nunc series divergens $\left(\frac{1}{1}\right) - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^1 + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^2 - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^3 \ldots\ldots\ldots$ in qua datus numerus terminorum sit $2g$ par, vel $2g+1$ impar. In primo casu

casu erit $\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{2} \ldots\ldots - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{2g-1} = \frac{1}{1+\frac{2}{1}} - \frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{2g}}{1+\frac{2}{1}}$ : in secundo $\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{2} \ldots\ldots + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{(2g+1)-1} = \frac{1}{1+\frac{2}{1}} + \frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{2g+1}}{1+\frac{2}{1}}$. Series hæc oritur ab evolutione fluentis minoris $SA = \frac{1}{1+\frac{2}{1}} = \frac{1}{1+2}$. In primo casu quando termini seriei sunt numero pares, summa seriei erit semper negativa; minima posito $g = 1$, æqualis scilicet fluenti minori negativæ. In secundo casu summa erit semper positiva, & minima posito $g = 0$, æqualis scilicet summæ fluentium 1. Sit in primo casu $2g = 4$, erit

$$\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{3} = \frac{1}{1+\frac{2}{1}} - \frac{16}{1+\frac{2}{1}} = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{15}{3} = -5:$$

posito vero $2g+1 = 4+1 = 5$, erit summa $\frac{1}{1+\frac{2}{1}} + \frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{5}}{1+\frac{2}{1}} = \frac{1}{3} + \frac{32}{3}$ superans fluentem minorem per $\frac{32}{3}$. In utraque quo magis augetur numerus terminorum eo magis a vero valore fluentis minoris abluditur. Sed quando termini sunt numero pares, ultimus, qui afficitur exponente impari, est negativus, & semper major summa antecedentium terminorum, ac proinde summa erit semper negativa. Sumatur nunc Series

$\frac{1}{1} + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{2} + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{3} \ldots\ldots + \left(\frac{\frac{2}{1}}{1}\right)^{g}$ posito $g$ pari vel impari, quæ

est series evoluta a fluente negativa minori $SY = \frac{-1}{-1+\frac{2}{1}}$, & est æqualis $\frac{-1+\left(\frac{2}{1}\right)^{g}}{-1+\frac{2}{1}}$ : posito $g = 1$, est minima æqualis differentiæ fluentium, crescit semper magis crescente $g$ terminorum numero, & facto $g=4$, erit summa $= \frac{-1+16}{1} = 15$; facto $g = 5$, erit summa $= \frac{-1+32}{1} = \frac{31}{1}$, & sic successive, semper magis a valore suæ fluentis abludens.

§. 15. Coroll. 5. Si a nostris seriebus tollatur primus terminus $\frac{1}{1}$, series reliqua cum suo complemento erit æqualis alteri fluenti homologæ. Ita ex: gr: si a serie $\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3} \ldots - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g-1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}}$ tollatur terminus $\frac{1}{1}$, reliqua erit $-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3} \ldots + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g+1}}{1+\frac{n}{m}}\right)$
$= -\frac{n}{m} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} = -\frac{n}{m+n} = -\frac{1}{1+\frac{m}{n}}$ fluenti homologæ negativæ, quæ erit positiva si ducatur in $+\frac{n}{m}$. At a serie

$\frac{1}{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3} \ldots + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{g}}{1-\frac{n}{m}} = \frac{1}{1-\frac{n}{m}}$ si tollatur primus ter-

mi-

minus $\frac{1}{1}$, erit $\frac{n}{m}\left(\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}\ldots\ldots+\frac{(\frac{n}{m})^{g-1}}{1-\frac{n}{m}}\right)=\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$

$=\frac{1}{-1+\frac{m}{n}}$ fluenti minori. Idem obtinebis si series quævis ab unitate incipiens per numeratorem secundi termini $(\frac{n}{m})^{\pm 1}$ multiplicetur. Hoc artificio utrasque fluentes homologas ab eadem serie decrescente (vel si mavis crescente) habere poteris, vel utrasque fluentes homologas in eamdem decrescentem vel crescentem seriem transmutare. Facilis enim ex dictis a data serie crescente ad seriem decrescentem cum suo complemento patet aditus, quarum utraque proinde suo respectivo complemento affecta eidem fluenti æqualis erit. Sit series ex: gr: $\frac{1}{1}-\frac{(\frac{7}{5})^{1}}{1}+\frac{(\frac{7}{5})^{2}}{1}-\frac{(\frac{7}{5})^{3}}{1}\ldots$ quæ, quo magis producitur, eo magis divergit nullo limite coercenda: quam scimus, si terminis numero imparibus constet, esse positivam, negativam si imparibus. Ut itaque in decrescentem transmutetur, suo complemento jungatur, ut sit

$$\frac{1}{1}-\frac{(\frac{7}{5})^{1}}{1}+\frac{(\frac{7}{5})^{2}}{1}-\frac{(\frac{7}{5})^{3}}{1}+\frac{(\frac{7}{5})^{4}}{1}\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{(\frac{7}{5})^{2g+1}}{1+\frac{7}{5}}=$$

$$\frac{1}{1}-\frac{(\frac{7}{5})^{1}}{1}+\frac{(\frac{7}{5})^{2}}{1}-\frac{(\frac{7}{5})^{3}}{1}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(\frac{7}{5})^{2g}}{1+\frac{7}{5}}=\frac{1}{1+\frac{7}{5}}$$; sed etiam

$$\frac{5}{7}\left(\frac{1}{1}-\frac{(\frac{5}{7})^{1}}{1}+\frac{(\frac{5}{7})^{2}}{1}-\frac{(\frac{5}{7})^{3}}{1}+\frac{(\frac{5}{7})^{4}}{1}\ldots\ldots\ldots-\frac{(\frac{5}{7})^{2g+1}}{1+\frac{5}{7}}\right)$$

 =

$$= \frac{5}{7}\left(\frac{1}{1} - \left(\frac{5}{\frac{7}{1}}\right)^{1} + \left(\frac{5}{\frac{7}{1}}\right)^{2} - \left(\frac{5}{\frac{7}{1}}\right)^{3} \ldots + \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^{2g}}{1+\frac{5}{7}}\right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{7}} = \frac{1}{1+\frac{7}{5}} :$$

ergo si loco primæ formulæ sumatur secunda, eamdem fluentem a convergente serie rite completa obtinebis, quam series divergens exhibet. Eodem modo si proposita sit series $\frac{1}{1} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{1} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{2} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{3} \ldots$, ut in decrescentem transmutetur, perficiatur series crescens additione sui complementi, & erit

$\frac{1}{1} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{1} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{2} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{3} \ldots - \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{g}}{-1+\frac{7}{5}}$, quam scimus æquari fluenti minori SY negativæ; & erit $\frac{1}{1} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{1} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{2} + \left(\frac{7}{\frac{5}{1}}\right)^{3} \ldots\ldots - \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{g}}{-1+\frac{7}{5}}$

$$= - \frac{5}{7}\left(\frac{1}{1} + \left(\frac{5}{\frac{7}{1}}\right)^{1} + \left(\frac{5}{\frac{7}{1}}\right)^{2} + \left(\frac{5}{\frac{7}{1}}\right)^{3} \ldots\ldots + \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^{g}}{1-\frac{5}{7}}\right) =$$

$$- \frac{5}{7} \cdot - \frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{1}{-1+\frac{7}{5}}.$$

§. 16. Hisce demonstratis non est amplius cur miremur si sæpe ac sæpius pro varia ratione, qua formulæ analyticæ disponuntur atque dividuntur, ex una eademque origine series modo convergentes, divergentes modo; modo positivæ, modo negativæ; alternantibus modo in signo terminis se se offerant in calculo: quæ series, si ob eam tantum rationem, quia ab eadem fluente manant, antequam compleantur, illi æquentur (ut hactenus in calculo communi factum vides) a veritate quam longissime nos abducunt. Ne tamen putes hujusmodi series additione

ne terminorum longius quotvis productas ad suum complementum perduci aliquando posse: quovis enim numero terminorum indefinite augeantur, nunquam terminari poterunt, nisi illud complementum adjungas, quo uno tantum fit ut series evolutæ convergentes aut divergentes cum suis fluentibus, a quibus manarunt, perfecte congruant: in quo uno casu series pluribus, vel paucioribus terminis constantes vere completæ dicendæ sunt, quia valorem suæ fluentis omnino exhauriunt.

§. 17. Coroll. *6.* Nunc juvat per ea, quæ dicenda sunt, tradere methodum, qua liceat quamvis seriem geometricam in duas series geometricas rite dispertire. Sit primum series evoluta a fluente majori systematis **S A**

I.ª $\frac{1}{1} - \frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1} + \frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1} - \frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1} + \frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1} - \frac{(\frac{n}{m})^{5}}{1+\frac{n}{m}}$ denominatore $1 = \frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$, & facta hac substitutione in singulis terminis, invenies

$$\frac{1+\frac{n}{m}-\frac{n}{m}-(\frac{n}{m})^{1}+(\frac{n}{m})^{2}+(\frac{n}{m})^{3}-(\frac{n}{m})^{3}-(\frac{n}{m})^{4}+(\frac{n}{m})^{4}+(\frac{n}{m})^{5}-(\frac{n}{m})^{5}}{1+\frac{n}{m}}$$

$$=\frac{1+\frac{n}{m}+(\frac{n}{m})^{2}+(\frac{n}{m})^{3}+(\frac{n}{m})^{4}\ldots}{1+\frac{n}{m}}-\frac{\frac{n}{m}\left(1+\frac{n}{m}+(\frac{n}{m})^{2}+(\frac{n}{m})^{3}+(\frac{n}{m})^{4}\right)\ldots}{1+\frac{n}{m}}.$$

Hac vero facta terminorum transpositione series prima dividitur in duas series terminis singulis positivis conflatas, utrasque evolutas, ut vidimus, a fluente majori systematis **S Y** $\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$. In hac ultima formula si seriei primæ addas $\frac{(\frac{n}{m})^{5}}{1-\frac{n}{m}}$, & secundæ demas eamdem $\frac{(\frac{n}{m})^{5}}{1-\frac{n}{m}}$, se se offert

$\frac{1}{1}$

$$\frac{\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{5}}{1-\frac{n}{m}}}{1+\frac{n}{m}}-\frac{n}{m}\frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1-\frac{n}{m}}\right)}{1+\frac{n}{m}},$$

quo facto series utraque suo complemento perficitur, & utraque æqualis est eidem fluenti $\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$. Hac facta substitutione in locum serierum ultima formula erit $= \frac{\frac{1\cdot 1}{1-\frac{n}{m}}-\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{m}}}{1+\frac{n}{m}} = \left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{m}} = \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$. Sit nunc series II.ª $\frac{1}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1}-\frac{(\frac{m}{n})^{5}}{1+\frac{m}{n}}$, quam scimus oriri a continua divisione fluentis $\frac{+1}{+1+\frac{m}{n}}$ minoris S A: atque ideo denominator $1 = \frac{+1+\frac{m}{n}}{+1+\frac{m}{n}}$: quo substituto, habetur

$$\frac{+1+\frac{m}{n}-\frac{m}{n}-(\frac{m}{n})^{2}+(\frac{m}{n})^{2}+(\frac{m}{n})^{3}-(\frac{m}{n})^{3}-(\frac{m}{n})^{4}+(\frac{m}{n})^{4}+(\frac{m}{n})^{5}-(\frac{m}{n})^{5}}{1+\frac{m}{n}}$$

=

$$\frac{= \frac{1}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{5}}{1} \ldots - \frac{m}{n}\left(\frac{1}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1} \ldots\right)}{1 + \frac{m}{n}}$$

& formula dividitur in duas series divergentes, quarum utraque evolvitur a fluente negativa minori S Y, scilicet $\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}$. Compleatur utraque series subtrahendo a prima $\frac{(\frac{m}{n})^{6}}{-1+\frac{m}{n}}$; a secunda $\frac{(\frac{m}{n})^{5}}{-1+\frac{m}{n}}$ (si numerus terminorum esset impar, addendum fuisset primæ ex: gr: $\frac{(\frac{m}{n})^{5}}{-1+\frac{m}{n}}$; & secundæ $\frac{(\frac{m}{n})^{4}}{-1+\frac{m}{n}}$: series enim $\frac{1}{1} + \frac{m}{n} \ldots$ sumpta fuit positiva) & erit hæc ultima formula

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{5}}{1} - \frac{(\frac{m}{n})^{6}}{-1+\frac{m}{n}} - \frac{m}{n}\left(\frac{1}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1} + \frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1} - \frac{(\frac{m}{n})^{5}}{-1+\frac{m}{n}}\right)}{1+\frac{m}{n}}$$

vel

$$\text{vel}\ \frac{\frac{1}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{4}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{5}}{-1+\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{1}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{2}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{3}}{1}+\frac{(\frac{m}{n})^{4}}{-1+\frac{m}{n}}\right)}{1+\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}\cdot\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}}{1+\frac{m}{n}}=\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{n}}=\frac{1}{1+\frac{m}{n}}\ \text{fluenti minori.}$$

§. 18. Sit nunc Series III.ª $\frac{1}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1-\frac{n}{m}}$, quæ est series completa æqualis fluenti majori S Y, & substituto in locum denominatoris 1, $\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}$, erit hæc

$$=\frac{1-(\frac{n}{m})^{1}+(\frac{n}{m})^{1}-(\frac{n}{m})^{2}+(\frac{n}{m})^{2}-(\frac{n}{m})^{3}+(\frac{n}{m})^{3}-(\frac{n}{m})^{4}+(\frac{n}{m})^{4}}{1-\frac{n}{m}}$$

, sive in duas distributa

$$=\frac{1-(\frac{n}{m})^{1}+(\frac{n}{m})^{2}-(\frac{n}{m})^{3}+(\frac{n}{m})^{4}+\frac{n}{m}\left(1-(\frac{n}{m})^{1}+(\frac{n}{m})^{2}-(\frac{n}{m})^{3}\right)}{1-\frac{n}{m}}$$

, quarum utraque pertinet ad fluentem majorem S A, atque ideo complectæ dabunt

$\frac{1}{1}$

$$\frac{\frac{1}{1}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{4}-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{5}}{1+\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}\left(\frac{1}{1}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3}+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{4}}{1+\frac{n}{m}}\right)}{1-\frac{n}{m}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{m}}=\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$$ fluenti majori.

Tandem sit series IV.$^{a}$ $\frac{1}{1}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{3}\ldots+\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}}{-1+\frac{m}{n}}$, quæ est series evoluta a fluente minori negativa S Y, in qua $1=\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}$, & facta substitutione invenies

$$\frac{-1+\frac{m}{n}-\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^{2}-\left(\frac{m}{n}\right)^{2}+\left(\frac{m}{n}\right)^{3}-\left(\frac{m}{n}\right)^{3}\ldots+\left(\frac{m}{n}\right)^{2g}-\left(\frac{m}{n}\right)^{2g}+\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}-\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}}{-1+\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{-\left(1-\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^{2}-\left(\frac{m}{n}\right)^{3}+\left(\frac{m}{n}\right)^{4}\ldots-\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}\right)-\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^{2}-\left(\frac{m}{n}\right)^{3}\ldots-\left(\frac{m}{n}\right)^{2g}\right)}{-1+\frac{m}{n}}$$

quarum utraque est series divergens fluentis minoris S A, & reducta est

$$\frac{-\left(\frac{1}{1}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{3}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{4}\dots-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2g+1}+\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+2}}{1+\frac{m}{n}}\right)-\frac{m}{n}\left(\frac{1}{1}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{3}\dots+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2g}-\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{2g+1}}{1+\frac{m}{n}}\right)}{-1+\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{n}}+\frac{\frac{m}{n}}{+1+\frac{m}{n}}\cdot\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}=\left(\frac{+1+\frac{m}{n}}{+1+\frac{m}{n}}\right)\cdot\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}.$$

In I.ª Series convergens fluentis majoris S A convertitur in differentiam duarum ſerierum convergentium fluentium homologarum S Y. In II.ª Series divergens fluentis minoris S A convertitur in differentiam ſerierum divergentium homologarum ejuſdem S Y: In III.ª Series convergens fluentis majoris S Y convertitur in ſummam duarum ſerierum convergentium fluentium homologarum S A. Ac tandem in IV.ª Series divergens fluentis minoris negativæ S Y convertitur in ſummam ſerierum divergentium fluentium homologarum S A: quarum ſingulæ binæ binæ ſumptæ unitati æquales ducuntur in fluentem, a qua evoluta fuit ſeries prima, cui comparantur. Quemadmodum vero ſingulas ſeries ſuperiores in duas alias homologas diviſimus, ita quævis ex iſtis homologis in alias duas diſpertiri poſſe nemo non videt. Quod cum eadem methodo & iſtas in duas alias liberum ſit dividere, patet quamvis ſeriem geometricam in quemvis numerum ſerierum homologarum indefinitum tranſmutari poſſe.

§. 19. Præterea ſi ſumatur quævis ſeries geometrica ſuo complemento definita, puta Series convergens fluentis majoris S A, ſcilicet

$$\frac{1}{1+\frac{n}{m}}=\begin{cases} s-c=\frac{1}{1}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3}\dots+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g}-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g+1}}{1+\frac{n}{m}} & \text{terminis imparibus, vel}\\ s+c=\frac{1}{1}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3}\dots-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g-1}+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}} & \text{terminis paribus conſtanti}\end{cases}$$

erit

erit $\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{3} \dots + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g+1}}{1+\frac{n}{m}} - \frac{1}{1} - \frac{n}{m}\left(\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} \dots - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g-1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1+\frac{n}{m}}\right)$

$$= \frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} \dots + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g-2} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g-3}}{1+\frac{n}{m}}\right),$$

& sic ad infinitum progrediendo (posito $g$ quovis numero seriei $0, 1, 2, 3 \dots \infty$) series hæc nullis terminis circumscribi poterit, & illum etiam terminum, quem quovis exponente affectum tanquam ultimum seriei assumpseris, semper in seriem terminorum numero indefinitam fas erit ducere; quo terminus, qui erat ultimus, multiplicatur iterum in seriem terminorum numero indefinitam quemcumque limitem respuentem. Erit enim semper

$$\frac{1}{1+\frac{n}{m}} = \left\{\begin{matrix} 1 \; (s \mp c) \\ \\ 1 \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right) \; (s \pm c) \\ \\ 1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} \; (s \pm c) \\ \\ 1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} \end{matrix}\right\} = \dots$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 - \frac{\frac{n}{m}}{1} \dots - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g-1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g} \; (s \pm c) \\ \\ 1 - \frac{\frac{n}{m}}{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} \dots - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g-1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 - \frac{\frac{n}{m}}{1} \dots + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g+1} \; (s \pm c) \\ \\ 1 - \frac{\frac{n}{m}}{1} \dots + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2g+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} \end{matrix}\right\}$$

 Nam

Nam in singulis hujusmodi formulis posito $\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$ loco denominatoris 1, termini omnes licet numero indefiniti præter primum evanescunt: atque ob hanc quidem rationem series convergens ad quemvis numerum terminorum producitur, quin ultimus, ultra quem progredi nequeat, statui possit. Hinc series singulæ hujusmodi, quovis numero terminorum constent, semper aut ad identicam fluentem $\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$ antequam divisio instituta fuerit, vel ad suam æqualem $1 - \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$ post primam divisionem reducuntur. Eadem methodo invenies fluentem minorem $\frac{1}{1+\frac{m}{n}}$ transmutari posse in infinitas numero series divergentes, terminis singulas ab 1 usque ad indefinitum numerum inter se differentes. Idem dicas de seriebus evolutis a fluentibus S Y. Erit enim semper

$$\frac{1}{1-\frac{n}{m}} = \frac{1}{1} + \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{1-\frac{n}{m}} = \frac{1}{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{n}{m}\right)^{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{n}{m}}$$

$$= \frac{1}{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{2} \cdots\cdots + \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g-1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{g}}{1-\frac{n}{m}}$$ fluenti majori.

Et sumpta fluente minori, erit $\frac{1}{-1+\frac{m}{n}} = \frac{-1}{1} + \frac{m}{n} \cdot \frac{+1}{-1+\frac{m}{n}} =$

$$\frac{-1}{1} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} + \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2} \cdot \frac{1}{-1+\frac{m}{n}} = \frac{-1}{1} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2} \cdots - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g-1} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{g}}{-1+\frac{m}{n}},$$

in

in quo casu termini serierum divergentium sunt singuli negativi, atque semper crescunt quemcumque limitem respuentes.

§. 20. Si hujusmodi series, quas numeris Romanis designo, hac communi methodo continua divisione alicujus fluentis evolutæ comparentur cum iis, quas Capite antecedenti §. 3. eruimus numeris arabicis notatas inveniemus

$$\frac{1}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1}{1}-\frac{(\frac{n}{m})^{1}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{2}}{1}-\frac{(\frac{n}{m})^{3}}{1}+\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1}{1+\frac{n}{m}}+\frac{(\frac{n}{m}-\frac{n}{m})}{1+\frac{n}{m}}$$

$$-\left(\frac{(\frac{n}{m})^{2}-(\frac{n}{m})^{2}}{1+\frac{n}{m}}\right)+\left(\frac{(\frac{n}{m})^{3}-(\frac{n}{m})^{3}}{1+\frac{n}{m}}\right)-\left(\frac{(\frac{n}{m})^{4}-(\frac{n}{m})^{4}}{1+\frac{n}{m}}\right)$$

$$=\frac{1+\frac{n}{m}.o-(\frac{n}{m})^{2}.o+(\frac{n}{m})^{3}.o-(\frac{n}{m})^{4}.o}{1+\frac{n}{m}}=\frac{1}{1+\frac{n}{m}}+o-o+o-o\ \text{I.}^{a}$$

$$=1-1+1-1+\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\ \text{I.}^{a}\text{, \& hæc eadem}$$

$$\text{I.}^{a}=1-\frac{n}{m}.\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)+\left(\frac{n}{m}\right)^{2}.\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)-\left(\frac{n}{m}\right)^{3}.\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)+\left(\frac{(\frac{n}{m})^{4}}{1+\frac{n}{m}}\right)$$

$$=1-\frac{\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}-\left(\frac{(\frac{n}{m})^{2}-(\frac{n}{m})^{2}}{1+\frac{n}{m}}\right).+\left(\frac{(\frac{n}{m})^{3}-(\frac{n}{m})^{3}}{1+\frac{n}{m}}\right)-\frac{(\frac{n}{m})^{4}-(\frac{n}{m})^{4}}{1+\frac{n}{m}}$$

$$=\frac{1-\frac{n}{m}-(\frac{n}{m})^{2}.o+(\frac{n}{m})^{3}.o-(\frac{n}{m})^{4}.o}{1+\frac{n}{m}}=1-\frac{(\frac{n}{m})}{1+\frac{n}{m}}-o+o-o\ \text{II.}^{a}$$

$=$

$= 1 - 1 + 1 - \frac{1}{1-\frac{n}{m}}$ 2.ª In evolutione vero fluentium systematis S Y erunt series utræque hac methodo evolutæ $-\frac{1}{1-\frac{n}{m}} = \frac{1}{1-\frac{n}{m}}$

$$+\frac{(\frac{n}{m})^{1}\cdot o + (\frac{n}{m})^{2}\cdot o + (\frac{n}{m})^{3}\cdot o + (\frac{n}{m})^{4}\cdot o}{1-\frac{n}{m}} = \frac{1}{1-\frac{n}{m}} + o + o + o + o \text{ III.ª}$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1-\frac{n}{m}} \text{ 3.ª: vel } \frac{1}{1-\frac{n}{m}}$$

$$= 1 + \frac{n}{m}\cdot\Big(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\Big) + \Big(\frac{n}{m}\Big)^{2}\cdot\Big(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\Big) + \Big(\frac{n}{m}\Big)^{3}\cdot\Big(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\Big) + \Big(\frac{n}{m}\Big)^{4}\cdot\Big(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\Big)$$

$$= 1 + \frac{(\frac{n}{m})^{1} - (\frac{n}{m})^{2}\cdot o - (\frac{n}{m})^{3}\cdot o - (\frac{n}{m})^{4}\cdot o}{1-\frac{n}{m}} = 1 + \frac{\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}} - o - o - o \text{ IV.ª}$$

$= 1 - 1 + 1 + \frac{1}{-1+\frac{m}{n}}$ 4.ª ac tandem $\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}$

$$= \frac{1}{1} + \Big(\frac{\frac{m}{n}}{1}\Big)^{1} + \Big(\frac{\frac{m}{n}}{1}\Big)^{2} + \Big(\frac{\frac{m}{n}}{1}\Big)^{3} - \frac{(\frac{m}{n})^{4}}{-1+\frac{m}{n}} = 1\cdot\Big(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\Big) + \frac{m}{n}\cdot\Big(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\Big)$$

+

$$+\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)^3\cdot\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)-\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^4}{-1+\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{-1+\frac{m}{n}\cdot o+\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot o+\left(\frac{m}{n}\right)^3\cdot o+\left(\frac{m}{n}\right)^4\cdot o}{-1+\frac{m}{n}}=\frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}+o+o+o+o \text{ V.}^a$$

$$=1-1+1-1-\frac{1}{-1+\frac{m}{n}} \quad 5.^a : \text{ vel hæc eadem } \frac{-1}{-1+\frac{m}{n}}$$

$$=1+\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)^3\cdot\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)-\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^4}{-1+\frac{m}{n}}$$

$$=1-\frac{\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot o+\left(\frac{m}{n}\right)^3\cdot o+\left(\frac{m}{n}\right)^4\cdot o}{-1+\frac{m}{n}}=1-\frac{\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}+o+o+o \text{ VI.}^a$$

$$=1-1+1-\frac{1}{1-\frac{n}{m}} \quad 6.^a.$$

Quare utràque hac methodo legitime uti possumus in divisione alicujus fluentis usque ad infinitum producenda. Differentia vero quæ intercedit inter utramque methodum ea est, quod in mea termini omnes antecedentes $1-1\ldots$ numero pares evanescunt, nec remanet nisi ultimus identicus cum fluente proposita (hoc est remanet ipsa identica fluens); vel si $1-1+1\ldots$ sint impares, fluens proposita per suam homologam repræsentatur $1-\frac{1}{1+\frac{m}{n}}$ &c. Verum in communi methodo non nisi primus terminus, facta reductione, vel duo tantum primi ter-

termini ſeriei remanent, cæteris omnibus ſubſequentibus, quotquot ex indefinita diviſione dari poſſunt ſine limite, evaneſcentibus. Quæ vero ex hac diverſa diviſionis methodo ſequantur, præcipua pro re nata attingam.

§. 21. Nunc maxime intereſt advertere quam falſa ſit in hac re opinio quædam omnium conſenſu recepta. Quoniam per §. 10 quo magis producitur ſeries quævis convergens eo minor eſt exceſſus vel defectus ipſius ſeriei a fluente majoris ſyſtematis S A evolutæ, & minor ſemper defectus ab ipſa majori fluente ſyſtematis S Y, in eam Analyſis vetus opinionem deſcendit, ut ſtatueret multiplicata ad infinitum fluentis diviſione, ſive ad infinitum producta ſerie, tandem hujuſmodi differentiam ſeriei a fluente ſive ultimum terminum exponente infinito affectum fieri abſolute nullum, ac proinde ſeriem geometricam decreſcentem infinitis numero terminis penitus exhauſtis exacte cum valore fluentis congruere. Hujuſce tamen opinionis univerſim receptæ falſitatem non difficile eſſet demonſtrare, demonſtrata repugnantia, quæ obſtat ne complementi $\frac{(\frac{n}{m})^{g}}{1+\frac{n}{m}}$ numerator, aut huic proximus ultimus terminus $\frac{(\frac{n}{m})^{g-1}}{1}$, aucto $g$ ad numerum quantumvis magnum, in nihilum tandem abſolutum evaneſcat. Sed quoniam opinio inveterata omnium auctoritate ſuffulta non niſi pluribus momentis evelli poteſt, mecum velim primum cogites, quod ſi poſt infinitas diviſiones liceret hujuſmodi complementum, per quod ſeries differt a fluente, tamquam abſolute nullum omittere in formulis §. 10, liceret etiam eodem jure terminum huic proximum exponente & ipſum infinitum unitate tantum diminuto negligere, & ſic ordinatim decreſcendo terminos ſingulos unitate ſucceſſive diminutos rite poſthabere, donec exponens hac ſucceſſive indefinita diminutione tandem fieret finitus. Sed in hoc caſu ſeries deficit a valore fluentis per complementum finitum, quod nullo modo omitti poteſt: ergo ea ipſa ſuppoſitione, ob quam complementum nullum dicitur, complementum ſit aliquid neceſſe eſt, & ſeriei adjiciendum ſi ſeriem totam exhauſtam ſuæ fluenti, a qua evolvitur, omnino æquari velimus. Hîc adde, manente ſemper in eadem ſerie conſtanti fractione $\frac{n}{m}$, fractionem hanc unitate minorem & finitam decreſcere non poſſe niſi exponens augeatur: quæ ſi, hoc creſcente ad infinitum, tandem omnino evaneſcere poſſet, in formulis homologis fractionem inverſam continentibus, tandem hæc $(\frac{m}{n})^{\infty}$ ad ultimum infinitum,

tum, ultra quod majus dari non posset, elata fuisset oporteret. Sed repugnat hanc ultimam ad illud ultimum absolutissimum infinitum actu pertingere posse ultra quod progredi nequeat: ergo eadem ratione in sua inversa $\frac{n}{m}$, quæ pari passu procedit ac $\frac{m}{n}$, atque eodem semper exponente afficitur, repugnat $\left(\frac{n}{m}\right)^{\infty}$ in ultimum absolutum zero recidere posse, atque omnino evanescere. Nullo modo igitur series decrescens ad absolutum fractionis, a qua evolvitur, valorem pertingere poterit, nisi suo complemento afficiatur.

§. 22. Insuper ostendimus §. 10 summam cujusvis seriei decrescentis quovis numero terminorum conflatæ æquari fluenti $\frac{1}{1\pm\frac{n}{m}} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1\pm\frac{n}{m}}.1$, terminis omnibus intermediis invicem se se destruentibus, quicumque sit exponens $2g$. Sed ostendimus etiam §. 19. $\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}.\frac{1}{1\pm\frac{n}{m}}$ non solum $=\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}.\left(\frac{1}{1}\mp\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2}}{1}\ldots\right)$ sed etiam cuivis termino hujusce seriei iterum in eamdem seriem ad infinitum progredientem ducto, & hoc succesive & indefinite, quin ultimus detur terminus, quem non liceat eidem indefinitæ seriei applicare. Ergo post terminum $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1}$, qui prout ultimus possibilium ponebatur zero, infiniti alii numero termini sine limite succedunt: ergo $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}}{1}$ vere ac natura sua non potest esse ultimus, qui ob hanc unam rationem ex ipsa suppositione in absolutum zero desinere dicebatur. Sed quid plura? §. 11. Corol. 8 demonstravimus quam falsa sit opinio illa, qua putatur fractionem denominatore $\infty$ affectam semper in absolutum zero desinere, nisi numerator fluens absolutum zero ponatur. Porro fractio $\left(\frac{n}{m}\right)^{2g}.\frac{1}{1\pm\frac{n}{m}}$

 est

eſt æqualis $\frac{n^{2g}}{m^{2g} \pm n\,.\,m^{2g-1}}$ : ſed in hac fractione numerator $n^{2g}$ tantum abeſt ut poſſit eſſe zero, quin immo creſcente $g$ & ipſe indefinite creſcit, creſcente denominatore ad infinitum: ergo licet fractio hæc creſcente $2g$ continuo minuatur; tamen in abſolutum zero deſinere nunquam poterit.

§. 23. Quod ſi a me quæras cur Analyſis vetus in ſeriebus decreſcentibus terminum exponente infinito affectum *zero abſolutum* putaverit, fidenter dicam a vera demonſtratione, qua utitur in invenienda ſumma totius ſeriei decreſcentis, in hunc errorem incaute prolapſam fuiſſe. Ipſa enim poſita S ſumma ſeriei quæſita, & 1 primo termino, $u$ ultimo, hanc inſtituit analogiam $1 : \frac{n}{m} :: S-u : S-1$, & $1-\frac{n}{m} : \frac{n}{m} :: 1-u : S-1$, ex qua $S=1+\frac{\frac{n}{m}(1-u)}{1-\frac{n}{m}}$, & poſito $u=0$, $S=1+\frac{\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}$, quæ eſt vera ſumma totius ſeriei decreſcentis ſi evoluta ponatur a fluente majori S Y, cui eſt æqualis: eſt enim

$$S=\frac{1}{1}+\frac{\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1}{1-\frac{n}{m}}.$$

Ex hac legitima tamen demonſtratione conſecutio non legitima deducta fuit. Illud enim caute erat advertendum, terminum ultimum $u$ eſſe univerſim $\left(\frac{n}{m}\right)^{g}$, poſito $g+1$ numero terminorum ſeriei, atque ideo

$$S=1+\frac{\frac{n}{m}(1-u)}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1-\frac{n}{m}u}{1-\frac{n}{m}}=\frac{1}{1-\frac{n}{m}}-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{g+1}}{1-\frac{n}{m}},$$

in qua $u$ nunquam poteſt eſſe abſolutum zero, niſi in caſu ſeriei nullius antequam diviſio fluentis in-

instituatur, ut advertimus §. 12. Coroll. 3. In cæteris casibus nullo alio modo fieri potest zero & expungi a formula, nec series ipsa ad suam absolutam integritatem perduci, nisi suo complemento adjungatur: quo tantum adjuncto series perficitur, & fit $= \frac{1-\frac{n}{m}u}{1-\frac{n}{m}} + \frac{\frac{n}{m}u}{1-\frac{n}{m}} = \frac{1-(\frac{n}{m})^{g+1}}{1-\frac{n}{m}} + \frac{(\frac{n}{m})^{g+1}}{1-\frac{n}{m}}$ (quicumque sit numerus $g$) non quia est zero, sed quia $\frac{-\frac{n}{m}u+\frac{n}{m}u}{1-\frac{n}{m}}$ est zero, utpote numerus identicus a se ipso subtractus. Sed quoniam utroque modo summa hæc obtinetur, Analysis vetus primum amplexa est, nihil sollicita utrum hic repugnans sit, nec ne.

§. 24. Quæ cum ita sint, frustra igitur ac perperam laborat, qui multiplicatione terminorum seriei geometricæ decrescentis tandem ipsam exhaurire penitus posse autumat, & ad verum & integrum valorem fluentis, a qua evolvitur, tandem perducere: nisi suo complemento series afficiatur. Hoc vero simul consociato termini seriei, quicumque sit eorum numerus, facta reductione omnes evanescunt, nec remanet nisi primus identicus cum fluente, vel duo tantum primi fluentem evolutam æquantes. Quo tantum facto series assumpta omnino exhausta censenda est, & ad suum verum valorem, a quo discesserat, restituta, quem frustra, & male multiplicatis ad infinitum terminis requiras. Illud igitur in hoc negotio, meo quidem judicio, mali hactenus accidit, quod scilicet Analysis communis, ignorata natura fluentium, atque earum legitima cum seriebus hisce affinitate, ad series hujusmodi contemplandas a sua vera ac prima origine avulsas accesserit, earumque affectiones seorsim investigaverit, minime intelligens ad quam primum originem referendæ sint, ut intelligeret qua ratione quæ semper in suspenso hærent, perficiantur, & ad primam, a qua deflexerant, originem restituantur, & quo tandem modo in aliis quæstionibus cum utilitate, remoto omni errandi periculo, adhibeantur. Hoc ita verum est ut quoties ipsa in series parallelas aut divergentes forte fortuna incidit, fluctuet incerta, & earum natura & origine ignorata, ignorataque ratione, qua aut compleri possint, aut in decrescentes converti, tanquam inutiles & fallaces a calculo repudiare cogatur.

§. 25. Quæret nec non immerito fortasse quispiam quænam sit ratio, cur hac duplici continuæ divisionis methodo tam diversa serierum natura oriatur, ut ex prima Capitis antecedentis exsurgant series arithmeticæ, at e secunda continuæ divisionis methodo vulgo usurpata, qua in hoc Capite usi sumus, series convergentes aut divergentes se se offerant, quæ geometricæ appellantur, ita

ita inter ſe diverſæ, ut primæ in terminis ſingulis ſibi invicem ſuccedentibus differentiam eamdem conſtantem, quæ intercedit inter primum, & ſecundum requirant: geometricæ vero eam rationem, qua ſe ſe reſpiciunt primi duo ſeriei termini, ordinatim & continuo ſervent. Hujuſce tamen quæſtionis ſane graviſſimæ fruſtra ab Analyſi communi ſolutionem requiras, cui non niſi hæc noſtra Theoria plane ſatisfacere poteſt. Nam ex doctrina communi docemur quidem data ſerie geometrica continua ſingulos terminos & ut antecedentes & ut conſequentes ejuſdem rationis vicem ſubire, atque alternatim antecedentium modo, modo conſequentium naturam induere; ſed nihil ultra quod difficultati propoſitæ pro dignitate occurrat. Verum noſtra Theoria nos ulterius docet, ſingulos hujuſce ſeriei terminos non eſſe niſi numeratores fluentium abſtractarum, quæ ſuo carent denominatore, quo ſine fluentes abſtractæ nequeunt perfici, & ad quæſitum ſyſtema referri. Singuli enim termini ſeriei ex: gr:

$1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{1} + \left(\frac{n}{m}\right)^{2} + \left(\frac{n}{m}\right)^{3} \ldots$ nihil aliud indicant, niſi eam continuam rationem $1 : \frac{n}{m}$, qua ſe ſe reſpicere debent fluentes omnes in ſingulis terminis: quæ vero ſint fluentes ipſæ in quovis termino nullo modo oſtendunt, niſi ſuo legitimo denominatore ſub ea forma, quam requirit ſyſtema, ad quod ipſas referre velis, omnino perficiantur. Porro ſi ad methodum communem, qua ſuperius uſi ſumus in tractandis hujuſmodi ſeriebus attendamus, patebit, nihil aliud propoſitum univerſim fuiſſe, niſi ut ſinguli termini, utpote numeri abſtracti, certa lege in unum reducerentur, vel reducti in ſeriem, quam requirunt, iterum diſtribuerentur. Nam ſingulos denominatore $1 = \frac{1 \pm \frac{n}{m}}{1 \pm \frac{n}{m}}$ diviſimus, quod idem eſt ac ſi more communi ſeries ſuo complemento affecta ad eumdem denominatorem reduceretur: ex quo fit ut nullus ex iſtis terminis ( ſi excipias primum $1 . \left(\frac{1 \pm \frac{n}{m}}{1 \pm \frac{n}{m}}\right) = \frac{1}{1 \pm \frac{n}{m}} \pm \frac{\frac{n}{m}}{1 \pm \frac{n}{m}}$, qui eſt ſumma vel differentia fluentium homologarum ) in veram fluentem convertatur. Hinc veritates, quas ſuperius demonſtravimus, communem methodum ſecuti non niſi numeris abſtracte ſumptis & hoc ordine diſpoſitis applicavimus, nihil ſolliciti de vera forma, quæ ipſis danda eſt, ut veram fluentium utriuſque ſyſtematis naturam induant. Verum in prima methodo Capitis antecedentis, in quo diviſione conti-

tinua seriem successivam unitatum invenimus, quarum singulas $= \frac{1 \pm \frac{n}{m}}{1 \pm \frac{n}{m}}$ positas ad diversum sed æqualem protonumerum applicavimus, singulas ad æquales fluentes homologas utriusque systematis significandas reduximus, & ex istis ad proprietates serierum arithmeticarum inveniendas transitum fecimus.

§. 26. Restat igitur hîc ut inquiramus, quæ transmutatio fiat in istis seriebus geometricis si singuli termini ad veram fluentium utriusque systematis naturam induendam redigantur. Ut hoc consequamur, ponamus primum singulos terminos seriei $1 \pm (\frac{n}{m})^1 + (\frac{n}{m})^2 \pm (\frac{n}{m})^3 \ldots$ esse numeratores fluentium homologarum utriusque systematis suo denominatore carentes, qui ad fluentes singulas abstractas reducendi sint. Ut igitur hujusmodi fluentes abstractæ, quarum respectivos numeratores series proposita continet, rite perficiantur, (vocatis M, N fluentibus, quas quærimus) erunt hujusmodi fluentes $M : N :: 1 : \frac{n}{m}$; quod si fiat ex Cap: VII. & seq. $M : N :: \frac{1}{1+\frac{n}{m}} : \frac{\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$, vel $:: \frac{1}{1-\frac{n}{m}} : \frac{\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}$ posito $m > n$, erunt in primo casu $M = \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$; $N = \frac{\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}$ fluentes abstractæ homologæ S A; in secundo $M = \frac{1}{1-\frac{n}{m}}$; $N = \frac{\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}$ homologæ S Y. Sed in ea ratione $1 : \frac{n}{m}$, in qua est prima fluens ad secundam, debet esse etiam secunda ad tertiam sive ut $\frac{n}{m} : (\frac{n}{m})^2$;

ergo

ergo M : N : : $\frac{n}{m} : (\frac{n}{m})^2$, & facto transitu a ratione ad fluentes abstractas

erit $M = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m} + (\frac{n}{m})^2}$ ; $N = \frac{(\frac{n}{m})^2}{(\frac{n}{m})^2 + \frac{n}{m}}$ in S A ; $M = \frac{\frac{n}{m}}{(\frac{n}{m})^2 - (\frac{n}{m})^2}$ ;

$N = \frac{(\frac{n}{m})^2}{\frac{n}{m} - (\frac{n}{m})^2}$ in S Y : ergo fluens secundi termini $\frac{\frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m}}$ primæ rationis longe diversa est a fluente ejusdem numeratoris in secundo casu, cum secundus terminus ad tertium debeat esse in eadem ratione ac primus ad hunc secundum : ergo ex analogia $1 : \frac{n}{m} : : \frac{n}{m} : (\frac{n}{m})^2$ perficientur fluentes

$\frac{1}{1 \pm \frac{n}{m}} : \frac{\frac{n}{m}}{1 \pm \frac{n}{m}} : : \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m} \pm (\frac{n}{m})^2} : \frac{(\frac{n}{m})^2}{\frac{n}{m} \pm (\frac{n}{m})^2}$. Secundus igitur terminus seriei

$\frac{n}{m}$ est numerator duarum diversarum fluentium, quæ simul nullo modo confundendæ sunt : prima est fluens minor, secunda major : & in primo casu fluentes ut $1 : \frac{n}{m}$ ; in secundo ut $\frac{n}{m} : (\frac{n}{m})^2$, ut eadem ratio $1 : \frac{n}{m}$ perseveret. Ergo in primo casu fluens numeratoris $\frac{n}{m}$ est homologa minor cum fluente majori numeratoris 1 : in secundo casu fluens ejusdem numeratoris $\frac{n}{m}$ est

ho-

homologa major cum fluente minori numeratoris $(\frac{n}{m})^2$ tertii termini seriei. Eodem progressu invenies fluentem numeratoris $(\frac{n}{m})^2$ primum comparatam secundo termino $\frac{n}{m}$ esse minorem $N = \frac{(\frac{n}{m})^2}{\frac{n}{m} \pm (\frac{n}{m})^2}$: comparatam tertio termino $(\frac{n}{m})^2$ esse fluentem majorem $M = \frac{(\frac{n}{m})^2}{(\frac{n}{m})^2 \pm (\frac{n}{m})^3}$. Et hoc pacto invenies singulos seriei terminos ambas fluentes homologas necessario exhibere. Quod cum hujusmodi progressus ultra quoscumque limites produci semper possit, ac in singulis terminis eadem semper lex generalis intacta manere debeat; patet nova ratio, cur hujusmodi series geometricæ nunquam abrumpi & terminari possint.

§. 27. Ut hoc quod intelligo perspicuum fiat, positis fluentibus M : N in ratione $1 : \frac{n}{m}$, si hæc ratio successive multiplicetur tam per communem $\frac{n}{m}$, quam per $\frac{m}{n}$, erit

$$M : N :: \begin{array}{l} 1 : \frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} : (\frac{n}{m})^2 \\ (\frac{n}{m})^2 : (\frac{n}{m})^3 \\ (\frac{n}{m})^3 : (\frac{n}{m})^4 \\ \vdots \quad \vdots \end{array} :: \begin{array}{l} \frac{m}{n} : 1 \\ (\frac{m}{n})^2 : \frac{m}{n} \\ (\frac{m}{n})^3 : (\frac{m}{n})^2 \\ (\frac{m}{n})^4 : (\frac{m}{n})^3 \\ \vdots \quad \vdots \end{array}$$

; & facto transitu ad valorem

ab-

absolutum singularum fluentium homologarum systematis S A , erit

$$M = \frac{1}{1+\frac{n}{m}} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+(\frac{n}{m})^2} = \frac{(\frac{n}{m})^2}{(\frac{n}{m})^2+(\frac{n}{m})^3} = \frac{(\frac{n}{m})^3}{(\frac{n}{m})^3+(\frac{n}{m})^4} \ldots\ldots$$

$$= \frac{(\frac{n}{m})^\infty}{(\frac{n}{m})^\infty+(\frac{n}{m})^{\infty+1}} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{(\frac{m}{n})^2}{(\frac{m}{n})^2+\frac{m}{n}} = \frac{(\frac{m}{n})^3}{(\frac{m}{n})^3+(\frac{m}{n})^2}$$

$$= \frac{(\frac{m}{n})^4}{(\frac{m}{n})^4+(\frac{m}{n})^3} \ldots\ldots\ldots = \frac{(\frac{m}{n})^{\infty+1}}{(\frac{m}{n})^{\infty+1}+(\frac{m}{n})^\infty};$$

$$N = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+1} = \frac{(\frac{n}{m})^2}{(\frac{n}{m})^2+\frac{n}{m}} = \frac{(\frac{n}{m})^3}{(\frac{n}{m})^3+(\frac{n}{m})^2} = \frac{(\frac{n}{m})^4}{(\frac{n}{m})^4+(\frac{n}{m})^3} \ldots\ldots$$

$$= \frac{(\frac{n}{m})^{\infty+1}}{(\frac{n}{m})^{\infty+1}+(\frac{n}{m})^\infty} = \frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+(\frac{m}{n})^2} = \frac{(\frac{m}{n})^2}{(\frac{m}{n})^2+(\frac{m}{n})^3}$$

$$= \frac{(\frac{m}{n})^3}{(\frac{m}{n})^3+(\frac{m}{n})^4} \ldots\ldots\ldots = \frac{(\frac{m}{n})^\infty}{(\frac{m}{n})^\infty+(\frac{m}{n})^{\infty+1}};$$ ex quibus formulis patet

hujusmodi fluentes abstractas M , N licet in quovis termino formam mutent, eamdem semper linearem naturam ac valorem obtinere, & eidem applicatas pro

protonumero easdem, diverso diversas sed æquales fluentes geometricas lineares homologas S A singulas ejusdem respectivi valoris semper repræsentare. Itaque series $1 + \frac{n}{m} + (\frac{n}{m})^2 + (\frac{n}{m})^3 \ldots$ est series decrescens ad infinitum, in qua quivis terminus modo unius, modo alterius fluentis naturam induit, quæ a denominatore, quo afficitur, determinatur, & cum sit $M : N :: 1 : \frac{n}{m}$, erit prima fluens M major, N minor, qua servata successive ratione series decrescat oportet, cum termini successive sequentes semper successive decrescant. Contra vero series $1 + \frac{m}{n} + (\frac{m}{n})^2 \ldots$ divergens erit, cum sit $N : M :: 1 : \frac{m}{n}$: quo invertitur prima ratio, ac ipsæ fluentes. Hæc tamen inversio facile obtinetur, si afficiatur $\frac{n}{m}$ aut $\frac{m}{n}$ exponente negativo. Facto enim $(\frac{n}{m})^{-1}$, prima M convertitur in minorem homologam N, & series quæ erat convergens divergit ad infinitum: contra vero facto $(\frac{m}{n})^{-1}$, fluens prima N minor convertitur in majorem homologam M, & series quæ erat divergens convertitur in convergentem ad infinitum. Quare 1 primus terminus seriei decrescentis est numerator fluentis majoris $M = \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$; contra vero 1 primus terminus seriei divergentis est numerator fluentis minoris $N = \frac{1}{1+\frac{m}{n}}$.

§. 28. Quamobrem male hactenus a communi methodo primus terminus 1 in utraque serie tam convergente, quam divergente, quæ est diversæ naturæ, tamquam identicus sumitur, neglecto semper denominatore, quo perficitur fluens abstracta: quo sine nihil de ipsa solitaria 1, quod cum veritate consentiat, pronunciari potest, ut superius sæpe ac sæpius de quovis numero advertimus. Ex quo errore alius deterior nascitur error, quod scilicet aliorum terminorum

utriuſque ſeriei longe diverſa eſt origo ab ea, quam hiſce terminis tribuit vulgata Analyſis. Hæc enim ut inveniat ex: gr: tertium ſeriei geometricæ terminum

poſt $1 : \frac{m}{n}$, vel $1 : \frac{n}{m}$ hanc inſtituit analogiam $1 : \frac{m}{n} :: \frac{m}{n} : \frac{(\frac{m}{n})^2}{1}$,

vel $1 : \frac{n}{m} :: \frac{n}{m} : \frac{(\frac{n}{m})^2}{1}$, quos ſingulos ut fluentes completas aſſumit: ita

ut tertium terminum tamquam quadratum fluentis mediæ diviſum per primum ſemper reputaverit, atque ut novam fluentem completam aſſumpſerit. Hinc ſemper ſumpta unitate pro primo termino tertium ut quadratum ſecundi, quartum ut cubum, ac univerſim ſingulos terminos ſeriem ſucceſſivam *poteſtatum* conſtituere docet, quorum exponentes in ſerie numerorum naturalium 0, 1, 2, 3 ... progrediuntur. Hæc eſt doctrina communis omnium Analyſtarum conſenſu ſemper & ubique confirmata. Tamen longe aliter rem ſe habere mea Theoria nunc demum demonſtrat, cum completis fluentibus ſuo denominatore, non niſi unam aut alteram fluentem homologam quemvis ſeriei terminum ſignificare oſtenderit: quantum vero hoc interſit animadvertiſſe in ſequentibus Capp: demonſtrabitur.

§. 29. Hiſce demonſtratis facem præeuntibus non erit difficile ſingulos terminos cujuſvis ſeriei geometricæ ab alterutra fluente utriuſque ſyſtematis evolutæ (quam ut aggregatum numeratorum fluentium homologarum abſtractarum conſideravimus) addito denominatore, quem quiſque terminus requirit, ad fluentes completas repræſentandas traducere. Nam ope §. 27. præparata formula generali fluentium

$$M = \left(\frac{(\frac{n}{m})}{(\frac{n}{m})}\right)^{g-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{m}} = \left(\frac{(\frac{m}{n})}{(\frac{m}{n})}\right)^{g-1} \cdot \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}; \ \&N = \left(\frac{(\frac{n}{m})}{(\frac{n}{m})}\right)^{g-1} \cdot \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+1} = \left(\frac{(\frac{m}{n})}{(\frac{m}{n})}\right)^{g-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{m}{n}} \text{ in SA:}$$

$$M = \left(\frac{(\frac{n}{m})}{(\frac{n}{m})}\right)^{g-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{n}{m}} = \left(\frac{(\frac{m}{n})}{(\frac{m}{n})}\right)^{g-1} \cdot \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-1}; \ \&N = \left(\frac{(\frac{n}{m})}{(\frac{n}{m})}\right)^{g-1} \cdot \frac{\frac{n}{m}}{-\frac{n}{m}+1} = \left(\frac{(\frac{m}{n})}{(\frac{m}{n})}\right)^{g-1} \cdot \frac{1}{-1+\frac{m}{n}} \text{ in SY:}$$

ex

ex quibus fit

$$M+N = \left[\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{\left(\frac{n}{m}\right)}\right]^{g-1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{n}{m}} + \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+1}\right) = \left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{\left(\frac{m}{n}\right)}\right]^{g-1} \cdot \left(\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1} + \frac{1}{1+\frac{m}{n}}\right) \text{ in } SA;$$

$$M-N = \left[\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{\left(\frac{n}{m}\right)}\right]^{g-1} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{n}{m}} - \frac{\frac{n}{m}}{-\frac{n}{m}+1}\right) = \left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{\left(\frac{m}{n}\right)}\right]^{g-1} \cdot \left(\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-1} - \frac{1}{-1+\frac{m}{n}}\right) \text{ in } SY;$$

posito $g =$ numero terminorum seriei licebit duplici modo singulos seriei terminos ad fluentes completas reducere. Primo datis seriebus

1.a $1 - \frac{n}{m} + \left(\frac{n}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right)^3 \ldots$; 2.a $1 - \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^2 - \left(\frac{m}{n}\right)^3 \ldots$ evolutis continua divisione a fluentibus homologis SA, ducatur quivis seriei 1.a terminus in suum respectivum factorem $\frac{1}{\left(\frac{n}{m}\right)^{g-1}} \cdot \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)$; & quivis 2.a in

$\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{g-1}} \cdot \left(\frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}\right)$ sequenti modo

$$1.^a\ \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^0}{\left(\frac{n}{m}\right)_0}\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right) - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^1}{\left(\frac{n}{m}\right)_1}\left(\frac{\frac{n}{m}+1}{\frac{n}{m}+1}\right) + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{\left(\frac{n}{m}\right)_2}\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right) - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^3}{\left(\frac{n}{m}\right)_3}\left(\frac{\frac{n}{m}+1}{\frac{n}{m}+1}\right) \ldots\ldots$$

$$= (M+N) - (N+M) + (M+N) - (N+M) \ldots\ldots$$

$$\text{II.}^{a}\ \frac{\overset{0}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{0}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}\right)-\frac{\overset{1}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{1}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{\frac{m}{n}+1}{\frac{m}{n}+1}\right)+\frac{\overset{2}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{2}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}\right)-\frac{\overset{3}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{3}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{\frac{m}{n}+1}{\frac{m}{n}+1}\right)\ldots\ldots$$

$$=(N+M)-(M+N)+(N+M)-(M+N)\ldots:$$

datis vero seriebus evolutis a fluentibus homologis S Y, nempe

$3.^{a}\ 1+\frac{n}{m}+\overset{2}{\left(\frac{n}{m}\right)}+\overset{3}{\left(\frac{n}{m}\right)}\ldots;\ 4.^{a}\ 1+\frac{m}{n}+\overset{2}{\left(\frac{m}{n}\right)}+\overset{3}{\left(\frac{m}{n}\right)}\ldots$ ducantur singuli termini $3.^{e}$ in $\frac{1}{{}_{g-1}\left(\frac{n}{m}\right)}\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)$; & singuli $4.^{e}$ in $\frac{1}{{}_{g-1}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{\frac{m}{n}-1}{\frac{m}{n}-1}\right)$;

& erit

$$\text{III.}^{a}\ \frac{\overset{0}{\left(\frac{n}{m}\right)}}{{}_{0}\left(\frac{n}{m}\right)}\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)+\frac{\overset{1}{\left(\frac{n}{m}\right)}}{{}_{1}\left(\frac{n}{m}\right)}\left(\frac{-\frac{n}{m}+1}{-\frac{n}{m}+1}\right)+\frac{\overset{2}{\left(\frac{n}{m}\right)}}{{}_{2}\left(\frac{n}{m}\right)}\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)+\frac{\overset{3}{\left(\frac{n}{m}\right)}}{{}_{3}\left(\frac{n}{m}\right)}\left(\frac{-\frac{n}{m}+1}{-\frac{n}{m}+1}\right)\ldots$$

$$=(M-N)+(-N+M)+(M-N)+(-N+M)\ldots$$

$$\text{IV.}^{a}\ \frac{\overset{0}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{0}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)+\frac{\overset{1}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{1}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{\frac{m}{n}-1}{\frac{m}{n}-1}\right)+\frac{\overset{2}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{2}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{-1+\frac{m}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right)+\frac{\overset{3}{\left(\frac{m}{n}\right)}}{{}_{3}\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\frac{\frac{m}{n}-1}{\frac{m}{n}-1}\right)\ldots$$

$$=(-N+M)+(M-N)+(-N+M)+(M-N)\ldots\ldots$$

In singulis istis seriebus quivis terminus convertitur in duas fluentes homologas: hac tamen lege, ut in primo termino primum sit fluens major, postea minor: in secundo vero inversa ratione sit primum fluens minor, deinde major: & hoc a nobis factum per ea quæ mox dicemus. Poterat tamen in quovis termino idem fluentium ordo ac in primo retineri. Hac methodo luce clarius patet non posse in decrescentibus seriem natura sua abrumpi, ultimo tandem

eva-

evanescente, cum & hic per suum factorem multiplicatus in easdem fluentes homologas finitas transmutetur oportet.

§. 30. Alter modus in eo positus est, ut quivis terminus seriei bis sumatur, & sequenti ordine in serie distribuatur. Sit namque proposita series

$1 - \frac{n}{m} + (\frac{n}{m})^2 - (\frac{n}{m})^3 \ldots\ldots$ fiat primum $(1 + 1) - (\frac{n}{m} + \frac{n}{m}) + ((\frac{n}{m})^2 + (\frac{n}{m})^2) - ((\frac{n}{m})^3 + (\frac{n}{m})^3) \ldots$ ac singuli suo denominatore in fluentes homologas convertantur, quæ erunt

$$\left(\frac{1}{1+\frac{n}{m}} + \frac{1}{1+\frac{m}{n}}\right) - \left(\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+1} + \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+(\frac{n}{m})^2}\right) + \left(\frac{(\frac{n}{m})^2}{(\frac{n}{m})^2+(\frac{n}{m})^3} + \frac{(\frac{n}{m})^2}{(\frac{n}{m})^2+\frac{n}{m}}\right)$$

$$- \left(\frac{(\frac{n}{m})^3}{(\frac{n}{m})^3+(\frac{n}{m})^2} + \frac{(\frac{n}{m})^3}{(\frac{n}{m})^3+(\frac{n}{m})^4}\right) \ldots$$ quæ facile reducitur ad I.am §. 29. antecedentis: cohæret enim utraque methodus, & una in alteram transmutatur. Si ponatur loco $\frac{n}{m}$ ejus inversa $(\frac{n}{m})^{-1} = \frac{m}{n}$, series numeratorum erit divergens $1 - \frac{m}{n} + (\frac{m}{n})^2 \ldots$ & formula superior fit $\left(\frac{1}{1+\frac{m}{n}} + \frac{1}{1+\frac{n}{m}}\right)$

$$- \left(\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1} + \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+(\frac{m}{n})^2}\right) \ldots\ldots$$ in qua fluentes invertuntur: & hæc reducitur ad II.am §. 29. Quod si in formula superiori loco $+\frac{n}{m}$ ponatur $-\frac{n}{m}$

fiet

fiet formula $\left( \frac{1}{1-\frac{n}{m}} - \frac{1}{-1+\frac{m}{n}} \right) - \left( \frac{-\frac{n}{m}}{-\frac{n}{m}+1} + \frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}-\left(\frac{n}{m}\right)^2} \right)$

$$+ \left( \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right)^3} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{-\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{n}{m}} \right) - \left( \frac{-\left(\frac{n}{m}\right)^3}{-\left(\frac{n}{m}\right)^3 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^3}{\left(\frac{n}{m}\right)^3 - \left(\frac{n}{m}\right)^4} \right) \dots$$

quæ facile reducitur ad III.am; quemadmodum loco $-\frac{n}{m}$ si ponas $-\left(\frac{n}{m}\right)^{-1}$

$= -\frac{m}{n}$, fiet formula $\left( \frac{-1}{-1+\frac{m}{n}} + \frac{1}{1-\frac{n}{m}} \right) - \left( \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-1} - \frac{\frac{m}{n}}{-\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2} \right) \dots$

quæ reducitur ad IV.am §. 29. : dummodo singuli termini in protonumerum diversum ducantur, posito in duobus ultimis superioribus loco $-f$, qui pertinet ad S A, $+f$ S Y, qui in hoc systemate, ut vidimus, est in directione contraria protonumeri $-f$ Systematis S A.

§. 31. Si methodus vulgata in tractandis hujusmodi seriebus cum hac mea conferatur, facile perspicietur quam longe & principiis, quibus utraque nititur, & ratione calculorum subducendorum inter se differant: at non ita facile utra utri sit anteferenda judicium ferri poterit. Quare ut nullus in alterutra eligenda dubitationi locus relinquatur, necessarium judico terminos singulos seriei utraque methodo ortæ a fluentibus abstractis ad fluentes geometricas applicatione sui protonumeri traducere (qui est finis hujusce Scientiæ, de qua agimus) ut quæ ex geometrica utriusque methodi constructione sequuntur ad alterutram amplectendam nos veluti manu ducant. Series itaque

$1-\frac{n}{m}+\left(\frac{n}{m}\right)^2-\left(\frac{n}{m}\right)^3+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^4}{1+\frac{n}{m}}$ cum suo complemento evoluta more communi

a fluen-

a fluente $\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$ ( cui, donec numeris abstractis series constat, æqualem esse Analysis nota docet ) ad eumdem, ut vulgo fit, denominatorem reducatur, & protonumero $f$ applicetur. Facta reductione convertitur in sequentem

$$\text{A} \quad \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)f-\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)\frac{n}{m}f+\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^2f-\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^3f+\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{m}\right)^4f.$$

Nostra vero I.ª §. 29. reducta dabit

$$\text{B} \quad \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)f-\left(\frac{\frac{n}{m}+1}{\frac{n}{m}+1}\right)f+\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)f-\left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)f+\frac{1}{1+\frac{n}{m}}f.$$

Eadem methodo reducta series $1+\frac{n}{m}+\left(\frac{n}{m}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^3+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^4}{1-\frac{n}{m}}$ evoluta a fluente $\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$, cui æquatur, fit sequens

$$\text{C} \quad \left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)f+\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)\frac{n}{m}f+\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^2f+\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^3f+\frac{1}{1-\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{m}\right)^4f;$$

& nostra III.ª

$$\text{D} \quad \left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)f+\left(\frac{-\frac{n}{m}+1}{-\frac{n}{m}+1}\right)f+\left(\frac{1-\frac{n}{m}}{1-\frac{n}{m}}\right)f+\left(\frac{-\frac{n}{m}+1}{-\frac{n}{m}+1}\right)f+\frac{1}{1-\frac{n}{m}}f.$$

§. 32. Hac facta ad geometrica applicatione oculis ipsis patet quemvis terminum seriei tam A, quam B converti in duas fluentes homologas abstractas sy-

ſyſtematis S A æquales invicem, nempe $\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$, $\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+1}$. Verum quæ ſunt in B æquali protonumero $f$ applicantur: quæ vero ſunt in A diverſo & inæquali protonumero ſingula paria afficiuntur. In eadem enim ratione $1 : \frac{n}{m}$ homologæ cujuſvis termini ſe ſe reſpiciunt, ſed prima primi termini fluens continet partes $\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$, ſecunda $\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+1}$ protonumeri $f$, ſive $\frac{m}{m+n}f$, $\frac{n}{n+m}f$: at homologæ ex: gr: tertii termini in eadem ratione $1 : \frac{n}{m}$ ſe ſe reſpiciunt quidem, ſed diverſo applicatæ protonumero $(\frac{n}{m})^2 f$, prima eſt $\frac{m}{m+n}.(\frac{n}{m})^2 f$, ſecunda $\frac{n}{n+m}.(\frac{n}{m})^2 f$, quæ differunt a primis non ratione coefficientis numerici, ſed protonumeri tantum. Sit ex: gr: $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$, erit fluens major primi termini $\frac{3}{5}f$, minor $\frac{2}{5}f$; ſed fluens major tertii termini $\frac{3}{5}.\frac{4}{9}f = \frac{4}{15}f$, minor $\frac{2}{5}.\frac{4}{9}f = \frac{8}{45}f$, ſervata inter ipſas eadem ratione fluentium homologarum primi termini. Cum igitur ſinguli hujuſmodi termini ad fluentes diverſi protonumeri pertineant, non ſunt ſimul commiſcendi, neque invicem ſubtrahendi, aut addendi: atque ideo in ſerie propoſita ſignum negativum non debet afficere coefficientem numericum, ſed ipſum protonumerum, quo indicatur mutandam eſſe protonumeri primo ſumpti directionem: & ſeries A convertendam in ſeriem

$$E \quad \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)f + \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right).-\frac{n}{m}f + \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^2 f + \left(\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\right).-\left(\frac{n}{m}\right)^3 f + \frac{1}{1+\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{m}\right)^4 f$$

quæ

quæ sequenti modo ad constructionem reducenda est, posita $AB = f$ (*Fig.* 20.)

ut sit $-f = -BA$ (procedente $\dfrac{\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}} f$ a B versus A) $= BG$, &

$-\frac{n}{m} f = -\frac{n}{m} BA = \frac{n}{m} BG = BC$, & sic de reliquis, posita $CE$

$= (\frac{n}{m})^2 f$; $EF = (\frac{n}{m})^3 f$; &c. Itaque posita $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$, erit series

$$\left(\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\right) f + \left(\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\right) \frac{2}{3} f + \left(\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\right) \frac{4}{9} f + \left(\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\right) \frac{8}{27} f + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} \cdot \frac{16}{81} f$$

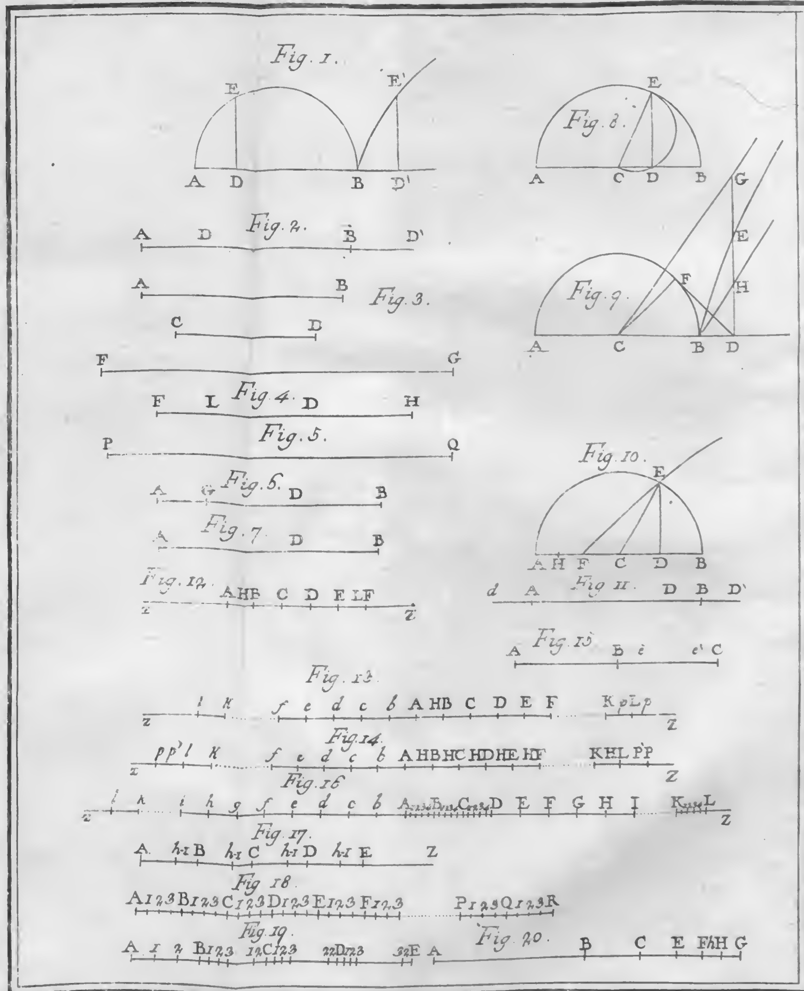
$= AB, + \frac{2}{3} BG = BC, + \frac{4}{9} BG = CE, + \frac{8}{27} BG = EF,$

$+ \frac{3}{5} \cdot \frac{16}{81} BG = Fh, = AB + BC + CE + EF + Fh = Ah.$

In hac tamen constructione singuli termini singula systemata constituunt diversi protonumeri inter se penitus divisa, cum fluentium homologarum ratio in singulis mutari ad libitum possit, quin ullam cæteri in suis fluentibus mutationem patiantur: protonumeri tantum, qui fluere nequeunt, in ratione $1 : \frac{2}{3}$ successive se se respiciunt. Hic non possum quin innuam fluenti $Fh = \frac{3}{5} \cdot \frac{16}{81} f$ protonumeri $FH = \frac{16}{81} f$ respondere suam homologam $\frac{2}{5} \cdot \frac{16}{81} f = \frac{32}{405} f = Hh$, atque esse $Fh : Hh :: 1 : \frac{2}{3} :: 3 : 2$; ac propterea quocumque modo producatur series convergens in methodo vulgata, nunquam ultimus terminus sive complementum nullescere penitus potest; cum nihil aliud sit nisi una fluens, cui deest sua homologa, ad quam in ea ratione sit oportet $1 : \frac{n}{m}$, quam cæteræ singulorum terminorum servant; atque propterea nunquam potest esse zero, quicumque minimus sit protonumerus cui applicatur.

§. 33. Hoc quod dico semper magis elucet sumpta serie C, quæ in geometricas fluentes conversa continet tot paria positiva fluentium homologarum abstractarum æqualium diversis tamen singula protonumeris inæqualibus applicata, quot sunt termini seriei numericæ propositæ, addito complemento, quod est una tantum ex fluentibus homologis solitaria in suum proprium protonumerum ducta: & series illa, quæ numerice tantum sumpta, evanescentibus terminis identicis signo contrario affectis, non nisi $\frac{1}{1-\frac{n}{m}}$ æquabatur, in tot systemata solitaria transformatur nullo necessario vinculo inter se consociata. Quod si ad seriem B & D a nostra methodo continuæ divisionis exhibitam nosmet convertamus, utraque ex dictis §. 13., & seqq. Cap: XI. convertitur in $f+f+f+f+\frac{1}{1+\frac{n}{m}}f$ æqualis protonumeri, quarum naturam ac proprietates in eodem citato Capite enucleavimus. Quare diligenter est distinguenda series abstracta numerorum, in qua termini qui sunt æquales sunt etiam identici, qui propterea, si signo contrario efferuntur, invicem se se destruunt, a serie eadem geometricis lineis applicata, a quibus naturam suam, proprietates, positionem, continuitatem, valorem desumat oportet. Ex iis tamen quæ tam in Cap XI, quam in hoc demonstravimus, patet ex utraque methodo, qua usi sumus ad series numericas in geometricas transformandas, nihil aliud obtinuisse, nisi varias fluentium affectiones pro varia natura systematum in eadem semper linea existentium, a quibus series arithmeticas Capite superiori deduximus. Quomodo vero natura fluentium in ratione geometrica progredientium extra lineam datam opportuna constructione geometrica describatur, ab utraque superiori methodo interdictum omnino fuit. Hoc tamen, quod ad majora ac difficiliora nos vocat, Caput sequens docebit.

CAPUT




A. Buttafoco inc.

primum diligenter investigandæ, ut hisce explicatis, meliori, ac hactenus factum fuerat, successu vestigia ipsius puncti D extra primam positionem basis X Z excurrentis persequerentur. Ut vero finem propositum consequamur ad duo maxime necessaria in hoc negotio singillatim excutienda se convertat primum oportet nostra inquisitio: ad fluxum scilicet æquabilem basis X Z hinc inde a prima positione semper sibi parallelæ indefinite excurrentis, ac duobus tantum punctis determinatis A & B affectæ, a quo fluxu constituitur systema illud, quod dicitur vulgo *Logarithmicum*; & ad legem, qua puncta fluentia D, d communi æquabili ipsius basis X Z motu translata in proprio continuo fluxu reguntur, a qua lege pendet systema, quod dicitur *Exponentiale*: ut hisce singillatim firmatis ad eorum legitimam conjunctionem tuto ac prospere se præstare possit.

§. 3. Ad primum igitur quod spectat: ut fluxus æquabilis basis indefinitæ X Z ( *Fig.* I. ) hinc inde a prima positione A B recedentis certa lege regatur, posito protonumero A B basis $= a$, ac ducta a punctis fixis A & B utraque indefinita M′M, N′N normali basi X Z, dividatur utraque M′M, N′N incipiendo a puncto A & B in partes numero indefinitas hinc inde, nempe A C, C1C, 1C2C &c. B c, c1c, 1c2c &c. quarum singula sit æqualis cuicumque constanti $f$, ut puncta A, C, 1C, 2C &c.; B, c, 1c, 2c &c. fixa ac data constituantur, & distantia puncti A & B fluendo ad hæc puncta perventi necessario determinetur. Hæc puncta a protonumero $f$ successive statuta sunt puncta, quæ §. 13. Cap: XI, manente eodem protonumero, necessaria demonstravimus, ac puncta data primi generis appellavimus: puncta vero intermedia G, $g$, quæ arbitrio tantum determinari possunt, ac in eodem systemate infinitimode variare possunt, secundi generis puncta diximus. Horum autem punctorum diversi generis diversam legem ac œconomiam a §. 14. usque ad finem ejusdem Cap: XI. diligentius investigavimus, atque inde naturam ac proprietates serierum arithmeticarum deduximus: ut ad hoc systema rite firmandum nihil reliqui sit, nisi ut ad ejusdem Capitis doctrinam, quando hîc opus fuerit, confugiamus, & præsertim duas formulas generales §. 20. pro re nata revocemus: ac interim statuamus viam, quam describunt puncta A & B basis indefinitæ X Z, esse illam, quæ in methodo communi *Logarithmum* audit: atque ideo *systema Logarithmicum* nihil aliud esse nisi seriem arithmeticam abstractam quovis protonumero applicatam, iisque legibus moderandam, quas in eodem Cap: XI. statuimus.

§. 4. Nunc igitur restat, ut ad aliud systema determinandum nosmet convertamus: ac primum observandum in basi indefinita X Z præter puncta fixa A & B punctum D fluens intra A, B dividere protonumerum A B in duas fluentes homologas S A, unam majorem puta B D, minorem alteram A D; vel A d majorem, B d minorem: atque ideo in hac suppositione nulla alia fluens concipi potest, nisi quæ a fluente differentia fluentium oritur. Si sumatur itaque in primo casu B d $=$ A D, erit B D $-$ B d $=$ d D, & in secundo sumpta A D $=$ B d, erit A d $-$ A D $=$ D d, differentia fluens fluentium homologarum hujusce systematis S A inter duo puncta fluentia D, d inter-

tercepta. Quod ſi punctum concurſus fluentium homologarum extra puncta A & B vagetur, fluentes homologæ B E, A E; vel A e, B e pertinent ad S Y, & facta B e $=$ A E, erit B E $+$ B e $=$ E e, vel facta A E $=$ B e, erit A e $+$ A E $=$ e E, ſumma fluens fluentium homologarum, ut Cap: IV. §§. 5., 6. oſtendimus. Porro cum tam differentia D d, quam ſumma E e ſit fluens & infinitis valoribus obnoxia, ut Curva regularis & continua deſcribatur, quæ rite reſpondeat & variationi fluentium, & earum translationi, determinanda eſt aliqua certa lex, quæ in motu æquabilis translationis ipſius X Z fluentes homologas ſecum trahentis differentiam vel ſummam fluentium moderetur, ut dato ſpatio a protonumero A B emenſo differentia vel ſumma fluens homologarum fluentium habeatur, & viceverſa data differentia vel ſumma fluentium protonumeri translati ſitus innoteſcat.

§. 5. Quamobrem non eſt difficile cognoſcere nullum aliud elementum fluens in formula differentiæ vel ſummæ fluentium ſumi poſſe, niſi illud quod pendet a via, quam protonumerus conſtans A B æquabiliter fluens deſcribit; cæteris elementis primo ſumptis intactis manentibus. Itaque ſi, poſita $m > n$, primum ſumatur differentia fluentium D d $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right) a$, vel ſumma E e $= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right) a$ (quæ eſt formula completa differentiæ vel ſummæ Cap: III. demonſtrata) hæc utraque in uno eodemque ſyſtemate eadem ſemper perſeveret neceſſe eſt. Nam ſi coefficientes $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{n}$ fluentes ponerentur, Locus geometricus aut nihil a fluxu æquabili baſis penderet, aut ſi hic fluxus differentiam etiam vel ſummam afficeret, Locus tamen nec regularis nec continuus eſſe poſſet, utpote pendens ab alio etiam elemento fluente præter fluxum æquabilem protonumeri A B. Nulla alia igitur ratione hujuſmodi formula, ut quæſito ſatisfaciat, conformari poterit, niſi ipſa eumdem ſemper differentiæ vel ſummæ valorem $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}$ ſervet, ſed ejus fluxus pendeat a fluxu æquabili protonumeri. Porro hæc inter ſe ſimul conciliari nequeunt, niſi ponamus exponentem differentiæ primo ſumptæ $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)$, vel ſummæ $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)$ conſtantis ea lege fluere, quam jubet fluxus æquabilis protonumeri A B.

§. 6.

§. 6. Sumatur itaque arbitrio quævis differentia $Dd = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)$, *a* vel ſumma $Ee = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)$ *a* inverſa primæ, in quibus tam coefficiens $\frac{n}{m}$, quam protonumerus *a*, & denominator 1 maneant ſemper in eodem ſyſtemate conſtantes, ut ſit $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1} \cdot a$ conſtans, quæ arbitrio relinquitur, ſed ſemel ſumpta eadem ſemper in eodem ſyſtemate perſeveret ( quæ eſt lex conſtantibus ſive datis perpetuo conſtituta ). Formulam hanc I.am $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1} \cdot a$ *baſim ſyſtematis exponentialis* appellamus, eo quia invariata manens nulla alia ratione naturam fluentis induere poteſt, niſi exponentis *z* fluentis miniſterio, poſito *z* quovis numero a *zero* uſque ad *infinitum*. Linea geometrica expreſſa ab hac formula II.a $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{z} \cdot a$ dicetur a nobis *fluens exponentialis* geometrica, & $\frac{M}{a} = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{z}$ *fluens exponentialis abſtracta*, utraque in ſuo genere completa, eo modo, quo ſuperius definivimus fluentes ſimplices; ea tantum differentia, quod in iſtis coefficiens $\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}$ numericus eſt fluens, in illis coefficiens $\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}$ eſt conſtans. Si *z* certa lege ſucceſſive progrediatur ſeriem fluentium ordinatam dabit, a qua orietur illud, quod dicimus *ſyſtema exponentiale ſolitarium*: quia ſic abſolute acceptum nullum de æquabili totius ſyſtematis tranſlatione indicium exhibet, cum ſeries hæc tota in ipſa prima X Z poſitione ſumi poſſit. Similiter ſi via ipſius X Z ab aliquo originis puncto A hinc vel

inde

inde descripta dicatur $x$, erit ex §. 20. Cap. XI., posito $g > 1$,

$$\text{III.}^{a}\; x = \left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right) \cdot \pm f + \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{b}}{\frac{(n+1)-1}{b} + \left(1 - \frac{(n+1)-1}{b}\right)}\right) \cdot \pm f$$

si fluxus a puncto quietis A successive progrediatur: vel ex Coroll. 2. §. 21. Cap: XI.

$$\text{IV.}^{a}\; x = \left(\frac{\frac{(g+2)-1}{1}}{\frac{(g+2)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+2)-1}{1}\right)}\right) \cdot \pm f - \left(\frac{\frac{(n+1)-1}{b}}{\frac{(n+1)-1}{b} + \left(1 - \frac{(n+1)-1}{b}\right)}\right) \cdot \pm f,$$

si fluxus successive retrocedat. Fluens hæc in nostro casu dicetur *logarithmus*, & series successiva harum fluentium dicetur *Systema logarithmicum solitarium*, quia omnino avulsum ab exponentiali geometrica nihil aliud significat nisi spatium abstractum nulli quantitati geometricæ applicatum.

§. 7. Ut vero fluentes utriusque systematis, quas adhuc in eadem perpetuo linea immobili fluere supposuimus (quo fit ut punctum fluens concursus fluentium homologarum singularum cum cæteris numero indefinitis in eadem linea commisceatur) extra lineam primam positione datam data lege explicentur, ac limites singularum loco geometrico regulari & continuo distincte concludantur, ad duo hæc systemata exponentiale, & logarithmicum confugiamus oportet, ac legitime simul conjungamus. Unio vero hæc horum duorum systematum legitima tunc erit, si exponens $z$ fluentis exponentialis cum logarithmo $x$ ea formula concludatur, ut ex uno alterum erui possit. Hoc illud est, quod in methodo communi dicitur, *dato numero ejus logarithmum invenire: & dato logarithmo invenire numerum illi respondentem*. Porro hujusmodi duo systemata simul inter se legitime consociantur artificio, quo nihil facilius, simplicius nihil excogitari potest; si enim fiat exponens $\text{V.}^{a}\; z = \frac{x}{\pm f}$, & suffigatur loco $z$ fluenti exponentiali, statim hujusmodi conjunctio perfecta manet: dummodo $x$ æqualis fiat III.$^{a}$ vel IV.$^{a}$ formulæ; & si protonumerus logarithmi sit $+f$, dividatur $x$ per $+f$; dividatur per $-f$, si hic protonumerus sumptus fuerit in parte contraria respectu primi. Hoc facto erit $\text{VI.}^{a}\; M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}}$ formula generalis, ex qua omnia & singula habentur, quibus opus est ad solutionem hujusce Problematis tam directi, quam inversi consequendam: ut infra clarius patebit.

§. 8.

§. 8. Hisce explicatis atque præparatis ad systema exponentiale fluentis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a$ construendum accedentes prima ac præcipua Loci geometrici describendi puncta prius statuamus necesse est. Ac primum facile perspicitur in prima positione protonumeri A B, (*Fig.* 2.) in qua fluxus est nullus, esse, posito $g$, & $n = o$, logarithmum III.ᵘᵐ §. 6.

$$x = \left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1} - \left(-1 + \frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right) \cdot \pm f = \frac{o}{1} \cdot \pm f,$$

ac propterea in hac prima positione haberi fluentem exponentialem $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{o} \cdot a = \frac{1}{1} a = \text{A B}$: ergo in primo quietis statu fluens exponentialis, hoc est differentia fluentium homologarum S A erit maxima, & summa fluentium S Y erit minima, & utraque æqualis & eadem cum protonumero A B. Erunt igitur puncta extrema A & B protonumeri in Curva describenda utriusque systematis, & utrique communia. Hoc primum statuto si fiat in formula III.ᵃ logarithmi $g = 1$, $n = o$, erit $x = \frac{1}{1} \cdot \pm f = \text{A M} = \text{B m} = \text{A N} = \text{B n}$, & fluens $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1} \cdot a$, quæ est a nobis dicta basis systematis. Quoniam vero in S A ex Cap: IV. $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$

$$= \left\{\frac{\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2} - \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}}{\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2} + \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}}\right\} a,$$

si in protonumero A B abscindatur A d

&

& B D $= \left(\frac{\frac{1+\frac{n}{m}}{2}}{1}\right) a$ æqualis fluenti majori S A, erit altera B d; & A D fluens minor $= \left(\frac{\frac{1-\frac{n}{m}}{2}}{1}\right) a$, & D d æqualis $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$ quæsitæ. Ducta igitur per puncta M, m æque distantia ab A B intervallo A M $=$ B m $= f$, indefinita M m, & ex punctis D, d normalibus A B, donec concurrant in H, h, erunt puncta H, h in Curva, cum sit H h $=$ D d $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$ differentia fluentium S A, & distans a protonumero A B per A M $= f$. Idem fac ex opposita parte, & invenies P p $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$ in eadem distantia a protonumero, & P, p in Curva. In posterum brevitatis gratia constructionem in partem hanc omittam, quæ est ad unguem eadem cum prima. In systemate vero S Y cum sit

$$\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} . a = \left\{\frac{\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}-\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}}\right\} a,$$

abscinde BE, & Ae $= \left(\frac{\frac{\frac{m}{n}+1}{2}}{1}\right) a$ fluenti majori, & erit A E, & B e $= \left(\frac{\frac{\frac{m}{n}-1}{2}}{1}\right) a$ minori, & ductis, ut supra, E G, e g, invenies basim G g $=$ E e $= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} a$, & G, g puncta in Curva

summarum fluentium S Y. Hujusmodi præparatio quæ puncta præcipua Loci geometrici describendi firmavit, a quibus tota Curvæ descriptio pendet, est omnino, si valorem spectes, arbitraria; cum elementa prima $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1} a$, $f$ ad libitum initio sumi possint, sed semel statutis, eadem persistant necesse est in ejusdem Loci geometrici descriptione. Possunt tamen singula valorem mutare quin forma mutetur, in quo casu vel natura Logisticæ, vel ejus species, vel utrumque mutatur, prout unum, aut alterum, aut utrumque elementum mutatur: quam tamen formam Analysis vetus semper susdeque habuit, ad valorem tantum singularum fluentium intenta, quem cum sæpe ac sæpius, ignoratis fluentium limitibus, arbitrio determinet, sæpe ac sæpius contra naturam præcipuorum punctorum datorum determinat: hinc repugnantiæ, quas nomine imaginarii necessarii in calculo cohonestat, ut infra re & facto ostendam.

§. *9.* Statuta §. antecedenti protonumeri & basis positione facile esset eadem methodo cætera Curvæ puncta quovis intervallo minimo a se dissita invenire, per quæ ducta Curva quæsita describeretur. Sed ut intimius natura hujusce Curvæ, nec non systematis exponentialis affectiones cognoscantur, multum interest, cætera ipsius puncta primaria sequenti artificio prius determinare. Sumatur formula III.ª §. *6.* logarithmi $x = \left(\frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1} - \left(-1+\frac{(g+1)-1}{1}\right)}\right) . \pm f$ $= \frac{g}{1} . \pm f$, omisso prorsus elemento $\frac{n}{h} . \pm f$, & fiat successive $g = 0, 1, 2, 3, \ldots$ seriei indefinitæ numerorum naturalium, & facta $z = \frac{x}{\pm f} = \frac{g . \pm f}{\pm f} = \frac{g}{1}$ $= 0, 1, 2, 3 \ldots$, fluens exponentialis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} . a$ dabit fluentes singulas exponentis seriei $0, 1, 2, 3, \ldots$ Quare si fiat series fluentium $M + M + M \ldots$

$$+ M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0} . a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1} . a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2} . a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{3} . a \ldots$$

+

$+ ((\frac{n}{m})^{\pm 1}{}^{g}).a$, & abſcindantur in linea indefinita X Z $\frac{\text{AB, Dd, 1D1d} \ldots}{\text{AB, Ee, 1E1e} \ldots}$ iſtis reſpective æquales, methodo ſuperiori inveniemus ſingulas differentias, vel ſummas fluentes utriuſque ſyſtematis inſiſtentes ſucceſſive punctis extremis ſeriei arithmeticæ numerorum naturalium, hoc eſt $x = \frac{o}{1}.\pm f + \frac{1}{1}.\pm f + \frac{2}{1}.\pm f \ldots + \frac{g}{1}.\pm f$, ſcilicet $=$ A + A M + A 1 M + A 2 M . . . vel in parte oppoſita A + A N + A 1 N + A 2 N . . . Verum Cap: XI. §. 13. oſtendimus hujuſmodi puncta, eodem manente protonumero $f$, eſſe puncta data primi generis, quæ neceſſaria ſunt, ſemperque cognita, neque alia ratione determinanda; ergo & exponentes fluentium exponentialium, & ipſæ fluentes hiſce punctis ſucceſſive inſiſtentes ſemper neceſſario determinatæ erunt, utpote quæ in ſeriem neceſſariam extremorum punctorum protonumerorum incidunt, quæ ſemper natura ſua innoteſcunt. Quod non contingit punctis intermediis, quorum determinatio pendet a diviſione protonumeri, quæ arbitrio noſtro relinquitur, ſive a denominatore $b$ fluentis $(\frac{n}{b}) . \pm f$ formulæ III.ª, quem ad libitum inter extrema puncta cujuſvis protonumeri mutari poſſe eodem §. demonſtravimus. Hinc fluentes, quæ poſita data diviſione innoteſcebant, hac mutata, indeterminatæ fiunt, & quæ erant ignotæ, nova diviſione determinantur: ac propterea fluentes exponentiales intermediæ (poſito denominatore $b$) in $\frac{o}{b}, \frac{1}{b}; \frac{2}{b} \ldots \frac{b}{b}$ determinantur; fiunt indeterminatæ ſumpto denominatore $l$, & earum loco innoteſcunt $\frac{o}{l}, \frac{1}{l}, \frac{2}{l} \ldots \frac{l}{l}$, ita ut in utraque hac diviſione hæ tantum, quæ ſunt communes, determinatæ ſunt, utpote inſiſtentes punctis neceſſariis $\frac{o}{b}, \frac{b}{b}; \frac{o}{l}, \frac{l}{l}$, atque ideo ſemper neceſſario determinatæ. Quare in formula generali exponentialium fluentium hujuſmodi duo genera punctorum datorum diſtinguantur oportet, ut ſecerni poſſint illæ quæ punctis neceſſariis inſiſtentes ſemper determinatæ ac datæ ſunt ab illis, quæ intermediæ nequeunt determinari, niſi diviſione protonumeri, quæ ab arbitrio pendet. Et hæc eſt ratio cur §. 7. diximus loco $\frac{x}{\pm f}$ ponendam eſ-

se III.am vel IV.am §. 6. ut sit VII.a $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{g}{1}+\left(\frac{\frac{n}{h}}{1}\right)} a$, vel VIII.a

$M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\left(\frac{g+1}{1}\right)-\left(\frac{\frac{n}{h}}{1}\right)} \cdot a$ : prima scilicet quando fluentes in quavis distantia $gf$ positæ ulterius procedunt usque ad $(g+1)f$ : secunda quando in $(g+1)f$ collocatæ retrocedendo iterum ad $gf$, a quo discesserant, fluendo restituuntur.

§. 10. Data itaque formula exponentiali $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{g}{1}} \cdot a$, in qua

$$\frac{g}{1} = \frac{\frac{(g+1)-1}{1}}{\frac{(g+1)-1}{1}-\left(-1+\frac{(g+1)-1}{1}\right)}$$ coefficiens fluentis majoris logarithmi

$\frac{g}{1} \cdot \pm f$ nequit determinari nisi in punctis $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \ldots$ ad infinitum, exsurget series geometrica fluentium datarum primi generis superiori §.o determinata, cui nulla alia series fluentium respondere potest, exclusis intermediis omnibus secundi generis, quia termini seriei arithmeticæ $0, 1, 2, 3 \ldots$ nequeunt determinari nisi in extremis punctis necessario datis protonumerorum.

Verum si fiat $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{g}{1}+\frac{0}{h}} \cdot a$, ostendimus Cap: XI. §. 7. inter $g$, & $g+1$ in serie arithmetica tot medias determinari posse, quot unitates continentur in $h-1$ : ergo totidem medias exponentiales datas secundi generis inter $g$, & $g+1$ invenies, quæ in serie distributæ dabunt continuam seriem geometricam $M + M + M \ldots = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{0}{h}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{1}{h}} \cdot a$

+

$$+ \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g + \frac{2}{h}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g + \frac{3}{h}} \cdot a \ldots + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g + \frac{h}{h} + \frac{o}{h}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{(g+1) + \frac{1}{h}} \cdot a \ldots\ldots$$

& ſic ſucceſſive ad infinitum, in qua, poſita $g = o$, tot mediæ inter protonumerum & baſim inveniuntur, quot requirit denominator $h$, diviſo protonumero $f$ in partes $h$: & ſic ſucceſſive inter $g = 1$, & $g = 2$ per ſeriem numquam exhauriendam $o, 1, 2, 3 \ldots$ ipſius $g$. Quod ſi denominator arbitrarius $h$ fractionis $\frac{n}{h}$ in formula fluentis exponentialis ( exhauſta ſerie $\frac{o}{h}, \frac{1}{h} \ldots \frac{h}{h}$) mutetur ( hoc eſt ſi inter duos terminos proximos ſeriei arithmeticæ numerorum naturalium nova inſtituatur mediarum arithmeticarum ſeries ) nova ſeries geometrica exſurget mediarum ſecundi generis inter duas fluentes proximas primi generis diverſa a prima. Quare ſemper erit in noſtra poteſtate augere, vel minuere ſeriem geometricam continuam tot mediis proportionalibus ſecundi generis, quot libuerit, inter duas quaſvis proximas primi generis ſeriei $\frac{o}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \ldots$ neceſſario determinatis: ſemper eſt enim in noſtra poteſtate in exponente fluentis in locum $\frac{o}{1}$ ſubſtituere ejus æquale $\frac{o}{h} = \frac{o}{l} = \frac{o}{p} \ldots$ &c. diverſi tamen denominatoris, qui diverſam protonumeri interjacentis $f$ diviſionem præſcribit.

§. 11. Hinc ſi ſeries arithmetica exponentis $\frac{n}{h}$ erit ſemper eadem, hoc eſt (§. 31. Cap: XI.) $\frac{o}{h}, \frac{1}{h}, \frac{2}{h}, \ldots \frac{h}{h} + \frac{o}{h}, \ldots\ldots + 1 + \frac{1}{h}, 1 + \frac{2}{h}, 1 + \frac{3}{h}, \ldots 1 + \frac{h}{h} + \frac{o}{h}, 2 + \frac{1}{h}, 2 + \frac{2}{h}, \ldots.$ eadem ſeries geometrica continua perpetuo exſurget. Verum ſi in ſingulis fluentibus primi generis mutetur fluens terminus exponentis $\frac{o}{h}$, tunc quemadmodum vidimus §. eodem abrumpi ſeriem arithmeticam, ac novam inter quaſvis datas proximas primi generis exſurgere, ita abrumpitur ſeries geometrica continua intercepta inter duas proximas fluentes exponentiales primi generis, ac tot diverſæ ſeries geometricæ inter ſingulas ſe ſe offerunt, quot mutationes deno-

nominatoris in $\frac{o}{b}$ volueris ad libitum inſtituere. Statutus vero ſemel fractionis $\frac{o}{b}$ denominator $b$, ſive diviſus ſemel protonumerus $f$ in partes $b$, nequit intra duas datas primi generis immutari, niſi in ſingulis intermediis eadem denominatoris mutatio fiat: mutaretur enim per §. 31. Cap: XI. ejuſdem protonumeri diviſio, & puncta intermedia, ac limites confunderentur.

§. 12. Quæ in toto Cap. XI. diximus de ſeriebus arithmeticis, quæ abſtracte ſumptæ ſunt exponentes numerici fluentium exponentialium, viam ſternunt ad proprietates ſyſtematis exponentialis aſſequendas. Quare ſi veritates, quas illic de ſeriebus arithmeticis agentes eruimus, dato temperamento fluentibus exponentialibus ac ſeriebus geometricis applicentur, iſtarum affectiones non difficile intelligentur: multitudine enim rerum obrutus præcipua tantum attingere cogor, aliqua tamen pro re nata indicabo. Nunc tantum dico, quod eo modo, quo Cap: XI. oſtendimus diſtinguenda eſſe puncta determinata duplicis generis in ſeriebus arithmeticis, ſtatuendæ etiam ſunt fluentes exponentiales determinatæ duplicis generis, cujus primæ, utpote neceſſariæ, nequeunt mutari, niſi mutetur protonumerus, atque ideo conſtantes in eodem ſyſtemate ſunt reputandæ: at intermediæ ſecundi generis inter illas primi generis interjacentes, quæ mutari ad libitum poſſunt ac determinari, naturam fluentium induere cenſendæ ſunt: quæ (ut fluentes lineares §. 12. Cap: XI.) ſucceſſive per omnia intermedia puncta nullo minimo interjecto ſpatio fluunt quidem, ſed non poſſunt determinari niſi in punctis ab exponente fluente $\frac{n}{b}$ indicatis.

§. 13. Nunc ad Locum geometricum (*Fig.* 2.) ſyſtematis exponentialis revertentes quædam Coroll.ª maxime neceſſaria indicemus.

Coroll. I. Ex §. 4. conſequitur differentias fluentes exponentiales S A ea, quam innuimus, lege fluentes duobus ramis æqualibus & ſimilibus A H, B h ad ſe invicem continuo accedentibus ab eadem parte concludi, qui tamen indefinite producti nunquam ſe tangunt. Similiter ſummæ fluentes fluentium homologarum exponentialium intra duos alios ramos A G, B g æquales & ſimiles ſemper magis a ſe invicem recedentes ad infinitum continentur. Itaque eadem diſtantia ſive logarithmo afficitur tam differentia fluentium S A, quam ſumma fluentium S Y, & Locus geometricus ab eadem parte utrique ſyſtematis ſatisfaciens quatuor ramis ab eadem parte ad infinitum procedentibus conſtat, quorum duo inter parallalas A S, B s contenti ſemper magis ad ſe invicem accedunt; alii vero duo ab iiſdem punctis A & B prorumpentes extra parallelas A S, B s ſemper magis a ſe invicem recedunt. Et ſane ſi poſita differentia fluentium S A

M =

$$M = \left[\frac{\left(\frac{1+(\frac{n}{m})}{2}\right)^{g+\frac{n}{h}} - \left(\frac{1-(\frac{n}{m})}{2}\right)^{g+\frac{n}{h}}}{\left(\frac{1+(\frac{n}{m})}{2}\right)^{g+\frac{n}{h}} + \left(\frac{1-(\frac{n}{m})}{2}\right)^{g+\frac{n}{h}}}\right] a$$

, tam numerator quam denominator per eamdem $(\frac{m}{n})^{g+\frac{n}{h}}$ multiplicetur, fiet

$$M = \left[\frac{\left(\frac{(\frac{m}{n})^{g+\frac{n}{h}}+1}{2}\right) - \left(\frac{(\frac{m}{n})^{g+\frac{n}{h}}-1}{2}\right)}{\left(\frac{(\frac{m}{n})^{g+\frac{n}{h}}+1}{2}\right) + \left(\frac{(\frac{m}{n})^{g+\frac{n}{h}}-1}{2}\right)}\right] a$$

( hoc est per Cap: VI. ) $= M^{-1}$: ergo $M = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{n}{h}} . a$ summæ fluentium SY. Ergo M tam repræsentat differentiam, quam summam fluentium: atque ideo formula generalis quatuor ramos ab eadem parte complectens erit $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(g+\frac{n}{h})f}{f}} . a$

Coroll. 2. Quoniam vero ex dictis exponens $\frac{(g+\frac{n}{h})f}{f} = \frac{(g+\frac{n}{h}) . -f}{-f}$ docet flu-

fluxum æquabilem protonumeri A B in opposita parte procedere simul cum Loco geometrico iisdem quatuor ramis ac in prima directione prædito; patet Locum geometricum absolutissimum utraque systemata exponentialia complectentem octo ramis constantem repræsentari a *Fig.* 2, ac concludi æquatione

$$M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{(g+\frac{n}{h})\cdot\pm f}{\pm f}} \cdot a$$

: exhibente

$$M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{(g+\frac{n}{h})\, f}{f}} \cdot a$$

quatuor ramos ab una parte; quatuor ex parte opposita

$$M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{(g+\frac{n}{h})\cdot -f}{-f}} \cdot a$$

æquales, similes, similiterque positos.

§. 14. Coroll. 3. Formula exponentialis $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{g+\frac{n}{h}} \cdot a$ semper signo positivo est efferenda. Nam sumpto protonumero A B $= a$ (*Fig.* 2.) erit in S A

$$M = \left[\frac{\dfrac{\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{g+\frac{n}{h}}}{2} - \dfrac{\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{g+\frac{n}{h}}}{2}}{\dfrac{\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{g+\frac{n}{h}}}{2} + \dfrac{\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{g+\frac{n}{h}}}{2}}\right] a = Mh - MH = Hh;$$

sumpto vero protonumero B A, erit $= mH - mh = hH$, utraque positiva: idem dic de exponentiali S Y, cum sit, posito protonumero A B $= a$,

$\left(\left(\frac{m}{n}\right)\right.$

$$\left[\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{n}{h}}+1\right)}{2}+\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{n}{h}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{n}{h}}+1\right)}{2}-\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{n}{h}}-1\right)}{2}}\right].\, a = Mg + MG = gG:\ \text{vel},$$

posito $BA = a$, sit $= mG + mg = Gg$.

Coroll. 4. Exponens fluentis exponentialis $\frac{g}{1}+\frac{\frac{n}{h}}{1}$, nunquam negativus sumendus est: cum sit coefficiens logarithmi $(g+\frac{n}{h}).\pm f$, qui divisus per $\pm f$ semper est positivus: non nisi enim protonumerus directionem oppositam significans signo negativo affici potest. Non nisi igitur coefficienti $\frac{n}{m}$ suffigi potest signum $\pm 1$, ita ut basis semper ab hac formula $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1}$. $a$ repræsentetur, quæ dat fluentem $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+\frac{n}{h}} . a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{n}{h}} . a$ utriusque systematis exponentialis: atque ideo $-1$ nihil aliud significat nisi inversionem fractionis $\frac{n}{m}$ vel $\frac{m}{n}$, cui suffigitur. Male igitur Analysis vulgata exponentem fluentis exponentialis (qui est coefficiens viæ descriptæ æquabiliter a protonumero, sive coefficiens logarithmi), quando fluens transiens per logarithmum zero ad oppositam directionem progreditur, negativum supponit. Hoc enim pacto Curva non nisi duobus ramis componitur ita dispositis ut ostendit *Fig.* 3.ª;

vel 4.ª: & si fiat protonumerus A B $= \left(\frac{n}{m}\right)^{o}_{\underline{1}} \cdot a$ dextrorsum a protonumero progrediens intactum manet systema exponentiale S A, invertitur tamen sinistrorsum a protonumero fluens, fitque $\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\underline{1}} \cdot a$; quo fit transitus ad systema exponentiale S Y: contra in 4.ª si basis fuisset $\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\underline{1}} \cdot a$, hoc est basis systematis exponentialis S Y, sinistrorsum procedendo transitus fit ad systema exponentiale S A. Quare Analysis communis constructione, qua utitur, exponentialis quantitatis a differentia fluentium ad summam, & viceversa, incaute se transfert, & Curvam, quam describit, utrinque a protonumero, semper dimidiatam describit, dimidia ad unum systema, ad alterum dimidia pertinente.

§. 15. Rigide igitur demonstratum manet Locum geometricum formulæ $M = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}_{\underline{1}} \cdot a$, posito $n < m$, repræsentari a Curva H A P, h B p (*Fig.* 2.) duobus hinc inde ramis æqualibus & similibus composita ad infinitum progredientibus, quin unquam se tangant: ac fluentes M singulas H h, P p basi constanti $\frac{n}{m}$ præditas differentias fluentes fluentium homologarum S A exhibere. Contra vero quatuor rami A G, A Q, B g, B q oriuntur ab evolutione formulæ $M = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}_{\underline{1}} \cdot a$, quæ complectitur summas omnes fluentes fluentium homologarum systematis S Y. Curva hæc est illa, quæ nomine *Logisticæ* sive *Logarithmicæ* ab Analysi vulgata designatur: quæ ex demonstratis tunc absolute terminata censenda erit, quando octo ramis circa eumdem protonumerum A B hinc inde ad infinitum excurrentibus constabit, ut ostendit *Fig.* 2.

§. 16.

§. 16. Coroll. 5. Illud etiam serio advertas oportet, fluentem utriusque systematis exponentialis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} . a$, a qua una formula singulas omnes hinc inde usque ad infinitum deduximus, naturam linearis dimensionis primo sumptam semper retinere, quicumque sit exponens suffixus coefficienti numerico $\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}$, cum dimensionis geometricæ gradum non a coefficiente numerico, sed a protonumero ( hîc lineari $a$ ) cui coefficiens applicatur, repetendum esse jam demonstraverimus. Quod non animadversum a communi methodo, illos dimensionis gradus ordinatæ M tribuit, quos exponens $\frac{x}{\pm f}$ indicare videtur: quo fit ut a dimensione ad dimensionem, a genere ad genus, ab identicis ad diversa se transferat: ac ut ad primam dimensionem iterum reducatur vel illis artificiis male uti cogitur, quæ vel ad altiores, vel ad inferiores dimensiones obtinendas rite adhibentur; vel uti cogitur symbolo 1 nunquam intellecto, quod tamquam commune remedium ad dimensiones ( ut dicitur ) supplendas, & homogeneam reddere quamcumque formulam analyticam, nullo consilio formulis applicatum universim præscripsit.

Coroll. 6. Adde quod formula $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} . a$ non deducitur ab instituta comparatione inter quantitates geometricas natura diversas, valore æquales ( ut puta inter abscissas ex axe vel e diametro excerptas, & inter ordinatas illis respondentes, qua una ratione Analysis communis *Loca* quævis *geometrica* æquatione analytica concludit); sed formula superior nullo modo rite loquendo æquatio dici potest: quia in utroque membro identicam numero quantitatem continet ( ut docuimus Cap. VII §. 27, & Cap. VIII §. 2 ) sed eadem M quæ omnino & absolute quoad omnia indeterminata est ab altero membro ob formam, qua donatur, & quoad dimensionem, & quoad naturam determinatur. Hinc *Logistica* sive *Logarithmica* ( quæ ab æquatione infinitesima inter abscissam & ordinatam ab Analysi communi derivata, cum eam *integrare* ipsa nesciat, Curva transcendens appellatur ) ab hac una formula lineari superiori repræsentatur, ac nullo negotio, ut vidimus, describitur, dummodo coef-

ficiens $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}$, protonumerus $a$, distantia $f$ basis a protonumero ( quæ singula in eodem systemate invariata manent, & arbitrio relinquuntur ) data intelligantur.

§. 17. Donec utrumque systema exponentiale, a formula hactenus usurpata

$$M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} . a$$ exprimitur, fluentes in Logistica a lineis integris nullo dato puncto, præter extrema, distinctis, ut H h, G g repræsentantur, cum $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} . a$ differentiam, vel summam referens, sit una & individua analytica expressio. Logistica igitur hujusce formulæ ductu præter protonumerum A B a nulla alia recta positione data intersecatur; totusque Locus geometricus in utroque systemate duobus ramis tantum H A P, h B p in S A intra parallelas V S, v s contentis, duobus extra hasce G A Q, g B q in S Y, qui sunt limites extremi fluentium H h, G g integrarum componitur. Nullus igitur in hac formula designatur axis Curvæ, qui parallelas H h, G g bifariam dividat, & in quo constituantur abscissæ ordinatis $\frac{H h}{2}$, $\frac{G g}{2}$ hinc positivis, inde negativis ( ut moris est ) respondentes, & cujus ope fluentes homologæ linea positione data inter se distinguantur. Hinc §. 8, & 9 legem hujusce formulæ ad amussim sequuti non nisi illo, quo usi sumus, artificio Logisticæ constructionem perficere potuimus. Ut igitur in Logistica superius descripta ( *Fig.* 2. ) præter differentias vel summas fluentes in utroque systemate lineis integris expressas fluentes singulas invicem distinctas habeamus, ad doctrinam Capp. IV & VI confugientes formulam exponentialem superiorem in aliam sequentem formam transmutemus oportet. Sumpta igitur ad normam formulæ Cap. IV §. 25 summa fluentium constanti

1.ª M + N =

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}\right\}a}{1}$$

erit 2.ª

$$M=\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}\right\}a}{1}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\frac{x}{\pm f}}a}{1}$$ fluens major:

3.ª

$$N=\frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{\left(\frac{1+\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+\left(\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)}{2}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}\right\}\right\}a}{1}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\frac{x}{\pm f}}a}{1}$$ fluens minor:

átque earum differentia

$$4.^{a}\ M - N = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}\right)}{1}a - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}\right)}{1}a, \ \&$$

$$5.^{a}\ M - N = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1}\cdot a + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1}\cdot a = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1}\cdot a = M$$

formulæ superiori §. 7.

At in systemate S Y sumpta differentia fluentium constanti eodem modo, ac superior, conformata

$$^{a}M - N = \frac{\left\{\left\{\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} + \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}\right\}\right\}a - \left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} + \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}\right\}\right\}a}{1}$$

$$II.^{a}\ M = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} + \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}+1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}-1\right)}{2}}\right\}\right\}a}{1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} + \frac{1}{2}\right)}{1}a$$

fluens major,

$$\text{III.}^{a}\ N = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{ \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} + 1\right)}{2} + \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} - 1\right)}{2} }{ \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} + 1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} - 1\right)}{2} } \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{ \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} + 1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} - 1\right)}{2} }{ \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} + 1\right)}{2} - \frac{\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} - 1\right)}{2} } \right\} \right\} a}{1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} - \frac{1}{2}\right)}{1} a \text{ fluens minor;}$$

atque earum summa

$$\text{IV.}^{a}\ M + N = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} + \frac{1}{2}\right)}{1} a + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}} - \frac{1}{2}\right)}{1} a, \ \&$$

$$\text{V.}^{a}\ M + N = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a = M \text{ formulæ §. 7.}$$

§. 18. Ex formulis 1.$^a$ & I.$^a$ eruimus protonumerum tam in prima positione A B, in quo est distantia $x = o. \pm f$, & fluentes sunt æquales, quam in quocumque alio situ ( puta $x = \pm f =$ A M $=$ A N &c ) æquabili fluxu translatum in M m &c. N n &c. exhiberi semper bifariam divisum a nostris formulis: atque ideo si dividatur bifariam A B, M m in C, 1 C, & per hæc puncta ducatur t C T indefinita, hic erit axis bifariam dividens fluentes omnes utriusque systematis ortas a protonumero A B hinc inde usque ad infinitum excurrente. At 2.$^a$ & II.$^a$ nobis exhibet fluentem majorem sui systematis,

sed 2.$^a$ SA $= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a$ nos docet dimidiæ $\frac{\text{m M}}{2} = \frac{\text{m 1 C}}{\text{n 1 C}}$

vel

vel $\frac{M1C}{N1c}$ addendam esse fluentem $\frac{1CH}{1cP}$ vel $\frac{1Ch}{1cp}$, ut habeatur fluens major $\frac{mH}{nP}$ vel $\frac{Mh}{Np}$: & II.ª $SY = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a + \frac{1}{2}a$ docet dimidiæ $\frac{gG}{2} = \frac{1CG}{1cQ}$ vel $\frac{1Cg}{1cq}$ addendam esse dimidiam constantem $\frac{1Cm}{1cn}$; vel $\frac{M1C}{N1c}$, ut habeatur fluens major $\frac{mG}{nQ}$ vel $\frac{Mg}{Nq}$: ex quibus consequitur quod in 3.ª $SA = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a$ subtrahenda est ab $\frac{M1C}{N1c}$ vel $\frac{m1C}{n1c}$ fluens $\frac{1CH}{1cP}$ vel $\frac{1Ch}{1cp}$, & in III.ª $SY = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a - \frac{1}{2}a$ subtrahenda est ab $\frac{1CG}{1cQ}$ vel $\frac{1Cg}{1cq}$ constans $\frac{1CM}{1cN}$ vel $\frac{1Cm}{1cn}$, ut habeatur fluens minor $\frac{MG}{NQ}$ vel $\frac{mg}{nq}$. Tandem a 5.ª docemur esse 1CH, 1Ch; 1cP, 1cp singulas semidifferentiam fluentium homologarum SA, & a V.ª 1CG, 1Cg; 1cQ, 1cq semisummam fluentium homologarum SY; quæ si in unum respective addantur, ut unam tantum lineam integram constituant, eo modo, quo jubet $M = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{\pm f}}}{1} \cdot a$ primum sumpta, nobis præbent, sublato axe, primam, quam dedimus, descriptionem. Verum hac ultima nostræ for-

formulæ conformatione Curvæ constructio omnino perficitur, cum uno oculorum intuitu divisione differentiæ vel summæ fluentium ab axe facta & habentur fluentes utriusque systematis in quavis positione distinctæ, & nova ac facilis utriusque systematis constructio obtinetur numeris omnibus absoluta, si in SA in quovis puncto C, 1 C, &c. hinc inde addatur semidifferentia $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m} - 1\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a$, & in SY semisumma $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - 1\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a$ distantiæ $x = (g + \frac{p}{b}) \cdot \pm f$ respondens.

§. 19. Coroll. 1. Ex constructione formularum superiorum patet semidifferentias vel semisummas homologas hinc inde ab axe divisas esse quidem æquales, sed non identicas; quæ seorsim sumptæ homologæ in SA $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m} - 1\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a = \frac{1CH}{1Ch} = \frac{1Ch}{1CH} = \frac{1cP}{1cp} = \frac{1cp}{1cP}$ erunt hoc ordine simul conjungendæ ad differentiam integram Hh, vel hH, vel Pp, vel pP obtinendam: homologæ vero in SY $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - 1\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a = \frac{1CG}{1Cg} = \frac{1Cg}{1CG} = \frac{1cQ}{1cq} = \frac{1cq}{1cQ}$ ad summam earum consequendam dabunt $\left(\frac{m}{n} - 1\right)^{\frac{x}{\pm f}} \cdot a = Gg$, vel gG, vel Qq, vel qQ. Hoc applicetur terminis aliarum formularum æqualibus, non identicis, quorum unionem nisi lege superius indicata bini bini consocientur, licet eumdem valorem habeant, tamen perperam legitimam judicabis. Quod cum nunquam animadverterit Analysis communis, quæ semper coefficiente numerico terminos quosvis æquales conjungit, ad incitas sæpe ac sæpius redigitur.

Coroll. 2. Formulas vero partiales legitime consociatas semper positivo signo afficiendas esse ipsius Loci geometrici integri & absoluti natura, a quo singulæ §. superioris fluentes divulsæ fuerunt, evidenter ostendit ac docet comparationem instituendam non esse nisi inter illas, quæ communi vinculo consocian-

tur, ac proinde quæ sunt ab una parte non esse confundendas cum suis æqualibus in opposita collocatis, nec signum negativum iis, quæ sunt in parte opposita respectu aliarum ( ut vulgo fit ) præfigendum esse, cum non nisi inter homologas comparatio legitime institui possit. Lineæ porro positione datæ ( ut in nostra *Fig.* 2. est axis T t, & huic parallelæ N A M, n B m ) fluentes quæ sunt ex una parte ab aliis quæ sunt in parte opposita licet æqualibus ita segregant, atque sejungunt, ut absolute & in se singulæ spectandæ sunt, non respectu aliarum, quæ in positione contraria reperiuntur, ac propterea tam 1 C H, quam 1 C h; tam M g, quam m G &c. sunt singulæ cum suis homologis signo positivo afficiendæ. Formularum vero $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}\pm 1}{1}\right)\right)^{\frac{x}{f}} \cdot \pm a$, & $M = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}\pm 1}{1}\right)\right)^{\frac{x}{f}} \cdot \pm a$ ( *Fig.* 2. ) prima indigitat tam fluentes H h, G g &c., quam h H, g G &c.; secunda tam ordinatas ad ramum H A, quam ad alterum in parte opposita situm h B, signi ± ad protonumerum applicatione.

§. 20. Coroll. 3. In toto hoc Opere docuimus, ac re ipsa palam fecimus longe diversam esse methodum, qua tractandæ sunt fluentes ab illa, qua constantes: cum primæ augeantur aut minuantur una ipsarum fluxione, hæ non nisi repetita additione vel subtractione crescant vel decrescant. Hanc tamen veritatem Methodus, qua tractandæ sunt fluentes exponentiales ut rite procedant, in plenissimo lumine collocat. Nam ex nostra Theoria evidenter constat series quasvis fluentium exponentialium hinc inde a puncto quietis C progredientium ad infinitum ab una tantum generali fluente $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}\pm 1}{1}\right)\right)^{\frac{(z+\frac{p}{h})\cdot\pm f}{\pm f}} \cdot a$ gigni: sive hanc ipsam identicam fluentem per singula puncta indefinitæ t T successive transeuntem ad singulos valores in hoc transitu subeundos determinari ab uno exponente, ea lege fluente, quam supra ostendimus, cæteris invariatis manentibus. Ab hac igitur solitarie sumpta totius Loci geometrici descriptio pendet, nec ad Logisticam describendam alia opus est determinata fluente, quacum instituenda sit comparatio, ut vulgo fit, ignorata fluentium natura, ac diversa ratio-

ratione, qua hæ tractandæ ſunt. Quæ falſa opinio licet non ita a veritate aliena videatur, quando comparatio fit inter protonumerum poſitivum & baſim poſitivam; tamen quando Analyſis inter poſitivam & alteram negativam, ut intermedias inveniat, comparationem inſtituit, ſtatim declarat quam longe & quot modis a veritate aberret. Primo enim naturam hujuſce fluentis ſe penitus ignorare oſtendit, quæ cum nulli comparanda ſit, ſemper fluendo eadem omnino poſitiva ( vel ſi mavis etiam negativa ) perſeveret oportet. Inſuper ex hac utriuſque comparatione ad inveniendas medias ea methodo male utitur, quam minus rectam Cap: X. oſtendimus: ex quo fit ut non ſolum a genere ad genus, ſed etiam a reali ad imaginarium ſe incaute transferat.

§. 21. Contra vero ſi noſtram Theoriam ducem ſequamur, ac methodum, qua §. 10. utitur ad inveniendas inter duas proximas primi generis medias, probe noſcamus, hujuſmodi difficultates omnes atque impedimenta vitamus. Reſtat tantum ad hanc rem univerſim definiendam ut ſolvamus ſequens

## P R O B L E M A.

Invenire inter duas quaſvis fluentes ejuſdem ſyſtematis exponentialis tot, quot libuerit, medias proportionales.

Sint fluentes exponentiales propoſitæ $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{df}{f}} . a$; $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{ef}{f}} . a$, & $d < e$; quæ proinde in axe Logiſticæ ſumptæ diſtabunt invicem per $(e - d)\, f$, quæ eſt earum differentia a protonumero. Sit $b - 1$ numerus mediarum, qui inter haſce duas propoſitas requiritur: ergo ex demonſtratis erit dividenda diſtantia $(e - d)\, f$ in partes numero $b$, & loco $\frac{f}{f}$ poſita diſtantia $(e - d)\ \frac{f}{f}$, erit exponens proximæ ſequentis poſt primam $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{d} . a$ $\ d + 1\left(\frac{e-d}{b}\right)$, ſecundæ $d + 2\left(\frac{e-d}{b}\right)$, tertiæ $d + 3\left(\frac{e-d}{b}\right)$, & ſic ſucceſſive uſque ad $d + b\left(\frac{e-d}{b}\right)$, qui eſt exponens major $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{e} . a$ propoſitæ. Series igitur fluentium

omnium formula generalis sequens complectitur $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(h-0)d+0e}{h}} \cdot a$

$+ \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(h-1)d+e}{h}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(h-2)d+2e}{h}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(h-3)d+3e}{h}} \cdot a \ldots\ldots$

$+ \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(h-h)d+he}{h}} \cdot a$, a qua tot medias, quot unitates erunt in $h-1$, inter duas fluentes ejusdem systematis exponentialis nullo negotio obtinebis. Q. E. I.

§. 22. Coroll. 1. In hac solutione a fluente exponentis minoris $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{d} \cdot a$, aucto successive ejus exponente, per tot intermedias, quot requirit numerus $h-1$, ad fluentem exponentis majoris devenimus; facile tamen erat inverse procedendo a fluente exponentis majoris per intermedias ad fluentem minoris exponentis nosmet transferre. Sumpta enim primum fluente $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{e} \cdot a$, erit exponens intermediæ proximioris $e - 1\left(\frac{e-d}{h}\right)$, secundæ $e-2\left(\frac{e-d}{h}\right)$, tertiæ $e-3\left(\frac{e-d}{h}\right)$, ac tandem facto $e-h\left(\frac{e-d}{h}\right)$, desinit fluens in fluentem $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{d} \cdot a$ superius primo sumptam. Et formula generalis exponentium erit in primo casu $d+p\left(\frac{e-d}{h}\right)$; in secundo $e-p\left(\frac{e-d}{h}\right)$, quæ sunt I.[a] & IV.[a] §§.

20,

20, 21. Cap: XI., quas diximus homologas, quia per eamdem fractionem fluentem $p\left(\frac{e-d}{b}\right)$, per quam crescit una, altera decrescit: facta $p=\frac{b}{2}$, fluentes in hoc unico casu æquantur: & facta $p=b$, prima convertitur in secundam, & secunda in primam. Series vero fluentium in hoc secundo casu erit sequens

$$\left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(b-0)e+0d}{b}} \cdot a + \left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(b-1)e+1d}{b}} \cdot a + \left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(b-2)e+2d}{b}} \cdot a$$

$$+ \left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(b-3)e+3d}{b}} \cdot a \ldots + \left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(b-(b-1))e+(b-1)d}{b}} \cdot a + \left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{(b-b)e+bd}{b}} \cdot a;$$

Utraque series exponentium arithmetica est eadem differentiæ constantis $\frac{e-d}{b}$, sed hæc inversa primæ: ac proinde prima crescendo usque ad infinitum natura sua progreditur; secunda decrescit usque ad *zero*; sed prima crescendo terminatur in $e$, secunda decrescendo in $d$ ( qui sunt exponentes fluentium, quas arbitrio sumpsimus ): series proinde hæc est necessaria ad solutionem quæsiti Problematis. Quævis enim alia exponentium series arithmetica, licet a zero usque ad infinitum, vel inverse semper progredi possit, tamen nunquam in suo cursu terminis $d$ & $e$ afficeretur: atque ideo series fluentium exponentialium seriei huic respondentium in fluentes primo datas nunquam incurreret.

§. 23. Coroll. 2. Posito $f$ protonumero basis $\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1} \cdot a$, distantiæ a protonumero seriei superioris fluentium rationem sequentur ipsorum exponentium; ipsæ vero singulæ denominatore communi $b$ afficiuntur, & fluentes in punctis datis secundi generis determinantur. Verum si loco basis $\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1} \cdot a$, sumatur basis $\left(\left(\underset{\overline{\mathrm{I}}}{\tfrac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{b}} \cdot a$, ac sua a protonumero distantia ( sive logarithmus ) sit $f$;

fluen-

fluentes in punctis datis primi generis determinabuntur, quia series arithmetica exponentium constabit terminis integris.

Exemp. I. Sit $d = 2$; $e = 5$; & numerus mediarum $b - 1 = 3$, erit $b = 4$ numerus divisionum distantiæ $(e - d)\,f$ inter utramque datam interjectæ, $e - d = 3$ differentia constans seriei arithmeticæ exponentium, & series fluentium

$$\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{8}{4}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{11}{4}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{14}{4}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{17}{4}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{20}{4}} \cdot a :$$

quæ, posito L. $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1} \cdot a$ basis $= f$, præter primam & ultimam primo sumptas, determinantur in punctis secundi generis. Verum si hujusmodi series ita disponatur

$$\left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{8} \cdot a + \left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{11} \cdot a + \left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{14} \cdot a$$

$$+ \left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{17} \cdot a + \left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{20} \cdot a,$$

& ponatur logarithmus basis $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot a, = f$, singulæ in punctis datis primi generis determinantur.

Ex. II. Sit $b - 1 = 2$, erit $b = 3$, & cæteris manentibus, series fluentium erit

$$\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{6}{3}} a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{9}{3}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{12}{3}} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{15}{3}} \cdot a$$

$$= \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{3} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{4} \cdot a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{5} \cdot a,$$

quæ singulæ insistunt punctis determinatis primi generis, & seriem exponentium arithmeticam

cam constituunt numerorum naturalium, quam §. 28. Cap: XI. diximus continuam, non vero illam superioris Ex: 8, 11, 14, 17, 20, cujus differentia 3: quæ hoc nomine notari nequit, nisi ejus exponentes reducantur ut docet §. 37. & seq. ejusdem Cap: XI.

§. 24. Hisce quæ maxime sunt necessaria explicatis, ac vero & absoluto Loco geometrico utriusque systematis exponentialis descriptione Curvæ integræ (*Fig.* 2.) constituto, quo simul omnia complectuntur, quæ ad utrumque rite efformandum concurrunt; nunc ad singula hujusce Curvæ elementa singillatim excutienda accedamus. Avulsa a Curva generali (*Fig.* 2.) una ex quatuor portionibus æqualibus & similibus, puta H A C T, solitarie se se offerat: & ponatur A C $= \frac{1}{2} a$ dimidio protonumeri, C T axis, in quo sumantur C 1 C, 1 C 2 C &c. æquales singulæ $f$ distantiæ a puncto C sive logarithmo basis: axis hic vicem gerit assymptoti, quem nunquam attingere poterit ordinata 1 C H continuo decrescens licet ad infinitum progrediatur. Hac facta præparatione ex superius demonstratis scimus Curvam hanc solitariam esse *Locum geometricum* omnium semidifferentiarum fluentium systematis exponentialis S A a maxima C A incipientium, quæ sub hac formula generali $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ singillatim comprehenduntur. Locus hic est unus ex quatuor æqualibus, & similibus in nostra generali Curva contentus, qui singuli fluentes suas, licet in directione opposita primæ, signo positivo affectas ex nostra Theoria habeant necesse est. Verum cum liberum sit singularum medietatem tam ad ramum superiorem, quam ad inferiorem referre, si morem communem subducendi calculi sequaris, erit $M = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}} . \pm a$ ad utrumque ramum ordinata, signo negativo protonumerum tantum afficiente: quo indicatur ramum Logisticæ, quacumque ex parte hinc inde ab axe primum sumpseris, sumendum esse illius inversum ad oppositam protonumeri medietatem pertinentem. Locus hic igitur continuus quidem erit, sed non integer: cum continuus ille censendus sit, qui alterutram fluentem homologam intra limites sui systematis repræsentat, cæteris omissis, quæ simul eodem tempore necessario conjunguntur. Integer vero erit ille, qui omnia ac singula elementa ad integrum systema constituendum continua ac completa descriptione ob oculos ponit. Ut igitur ex uno partiali loco proposito locus integer totius systematis inveniatur, enitendum est ut natura totius systematis bene

bene explorata a partiali formula analytica ad generalem traducamur, cujus ope locum integrum liceat describere. In nostro vero casu hoc facile obtinetur si formula $\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{x}{f}}}{1} \cdot a$ duplicetur, & ejus Locus in parte opposita idem describatur, qui erit hBCT. Quoniam vero exponens $\frac{x}{f} = \frac{-x}{-f}$, & $-x$

$= \left(g+\frac{p}{h}\right) \cdot -f$, erit $\frac{-x}{-f} = \frac{\left(g+\frac{p}{h}\right) \cdot -f}{-f} = g+\frac{p}{h}$, & formula M

$= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{-x}{-f}}}{1} \cdot a = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\left(g+\frac{p}{h}\right)\cdot\frac{-f}{-f}}}{1} \cdot a$ indicabit eamdem Curvam æqualem & similem primæ describendam esse illinc a protonumero sub axe Ct in opposita directione CT. Ergo Locus geometricus differentiarum fluentium perfectus est, si alii duo rami similes & æquales primis in opposita parte describantur, ut ostendit *Fig.* 2. Sed in ipsa differentiarum fluentium notione implicite continetur notio ipsarum fluentium homologarum, quæ proinde in ipsa constructione sunt determinandæ. Hoc etiam facile & eleganter consequimur, si differentia $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}}{1} \cdot a$ sub hac nova forma producatur, nempe

$$\left[\frac{\dfrac{\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}}{2}-\dfrac{\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}}{2}}{\dfrac{\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}}{2}+\dfrac{\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}}{2}}\right] a$$

, ex qua eruitur fluentem majo-

rem

rem esse $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}_{\overline{1}} \cdot a$, & ejus homologam minorem

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}_{\overline{1}} \cdot a$. Quare si ex punctis A & B ab utraque parte producantur indefinitæ V S, v s parallelæ axi t T, & hinc inde producantur singulæ H h donec concurrant in punctis M, m linearum V S, v s, statim se se offerent fluentes homologæ quæsitæ M h, m h; vel m H, M H. Quo facto Locus geometricus integer atque absolutus totius systematis exponentialis descriptus est.

§. 25. Eadem omnino ratione te geras oportet in perficiendo loco geometrico integro systematis exponentialis S Y dato loco partiali G A C T formulæ 1 C G

$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}_{\overline{1}} \cdot a$; & invenies Locum geometricum integrum systematis S Y a *Fig.* 2. descriptum quatuor ramis A G, A Q; B g, B q hinc inde ad infinitum excurrentibus conflatum, si ab hac demas totam Curvam inter parallelas V S, v s contentam, quam ad systema S A pertinere supra demonstravimus. Quod si ulterius inquisitio nostra procedat, ac generalius quæratur Curva, quæ tam systemati S A, quam S Y simul eodem tempore satisfaciat, sumas oportet totam nostram Curvam *Fig.* 2. (qua generalior nulla in nostro casu dari potest), quæ constat octo ramis, quorum quatuor proprii unius systematis copulantur cum aliis quatuor alterius systematis communi ac necessario vinculo

ejusdem protonumeri A B. $= \left(\frac{n}{m}\right)^{0}_{\overline{1}} a = \left(\frac{m}{n}\right)^{0}_{\overline{1}} a$, qui in primo casu est differentia maxima fluentium in S A, quarum una maxima A B vel B A, & homologa minima B vel A: in secundo vero casu est A B vel B A summa minima fluentium homologarum minimarum S Y, quarum major minima = A B vel B A, minor minima B vel A *zero*. Hinc ab eadem origine A B fluendo prorumpunt fluentes utriusque systematis, a quarum evolutione totus Locus geometricus absolutus atque unus a tota nostra Curva descriptus producitur, atque ostendit Curvam Logisticam ut singulis casibus, ad quos natura

ſua vocatur, ſatisfacere poſſit, eam abſolutam formam, quam illi dedimus, neceſſario requirere.

§. 26. Eadem methodo (ne longius abeam quam par eſt) propoſitis Curvis partialibus HABs, SMAH; smBAG, SMAG (quarum primæ dant Loca geometrica fluentis majoris, & minoris SA; cæteræ duæ Loca geometrica fluentis majoris, & minoris SY) fluentes homologas cæteras, ac totam Logiſticam facile deſcribes. Hſc tantum addo datam formulam differentiæ & ſummæ $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$, quæ ramos utroſque homologos Logiſticæ complectitur, facile ad ſignificandam dimidiam differentiam & ſummam, ac dimidiam Logiſticam, & viceverſa, converti poſſe. Nam ſi formula ſuperior reducatur ad $M = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot 2a$, hæc quæ erat integra poſito protonumero $a = AB$, fit dimidia facto protonumero $2AB = 2a$, & non niſi ramum unum utriuſque ſyſtematis ab una tantum parte indigitat: contra vero poſita dimidia $M = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ ſi facias $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot \frac{a}{2}$, protonumero $\frac{a}{2} = AC$, ad integram devenies. Simili artificio cæteræ formulæ analyticæ varie transformatæ ab una ad aliam affectionem geometricam ſignificandam traduci poſſunt, quin valor formulæ ullam patiatur mutationem. In hiſce vero explicandis hîc diligentius immorandum eſſe cenſui, ut intelligatur quam caute incedendum ſit in reductione formularum analyticarum ad conſtructiones geometricas, & quanta cautione opus ſit, antequam ſtatuatur utrum notiones omnes, quas continet formula analytica varie conformata, a conſtructione geometrica penitus exhauriantur, & Locus geometricus ſit in ſuo genere abſolutus & perfectus, an nonniſi aliquibus tantum conditionibus formulæ ſatisfaciat: in quo caſu partialis reputandus eſt, & artificiis ſupra traditis aut ſimilibus, prout opus erit, omnino perficiendus.

§. 27. Nunc ulterius progredientes oſtendamus oportet uni, numero abſtracte ſumpto ſi ad Logiſticam referatur, quemvis logarithmum aptari poſſe. Quivis numerus abſtracte ſumptus ſi legibus ſupra traditis ad geometrica traductus Curvæ Logiſticæ ſpeciatim aptari quæratur, fluentis exponentialis naturam in-

induat necesse est: atque ideo vel differentiam maximam fluentium S A; vel summam minimam fluentium S Y; vel basim, vel quamcumque aliam fluentem referre posse sic ostendo. Sit numerus propositus $a$ ad Logisticam referendus, quod obtineri nequit nisi prius statuatur ad libitum protonumerus, sive illa linea geometrica quæ unitatis vicem subeat. Primum itaque hic protonumerus sit ipsa $a$: sed ut hæc naturam fluentis exponentialis assumat ut Logisticæ applicari possit, hac formula $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{o \cdot f}{f}} \cdot a$ est concludenda: qua assumpta sit tam fluens maxima in systemate exponentiali S A, quam minima in S Y, & infinitis Logisticis singillatim inservire poterit eodem protonumero $a$ præditis, diversæ basis $\frac{\frac{n}{m}}{1}a$, $\frac{\frac{m}{n}}{1}a$: eritque in hoc casu in singulis $L\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{o \cdot \pm f}{\pm f}} \cdot a = o \cdot \pm f$. Verum si fiat $a = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} a = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} a$, & ponatur in prima protonumerus $= \frac{m}{n} a$; in secunda $\frac{n}{m} a$; tunc numerus $a$ naturam basis Logisticæ assumit, quæ est eadem in diversis tamen Logisticis: eritque semper $L\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{1 \cdot \pm f}{\pm f}} \cdot \frac{m}{n} a = L\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1 \cdot \pm f}{\pm f}} \cdot \frac{n}{m} a = \pm f$. Insuper fac $a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{1}{g}}\right)^{\frac{g \cdot \pm f}{\pm f}} \cdot \frac{m}{n} a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\right)^{\frac{\frac{1}{g} \cdot \pm f}{\pm f}} \cdot \frac{m}{n} a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{g}}\right)^{\frac{g \cdot \pm f}{\pm f}} \cdot \frac{n}{m} a$

$$= \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\right)^{\frac{\frac{1}{g}.\pm f}{\pm f}} . \frac{n}{m}\, a$$

, quæ singulæ pertinent ad Logisticam diversæ basis atque protonumeri: est tamen $L\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{1}{g}}\right)^{g} . \frac{m}{n}\, a = L\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{g}}\right)^{g} . \frac{n}{m}\, a = g . \pm f$;

& $L\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\right)^{\frac{1}{g}} . \frac{m}{n}\, a = L\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\right)^{\frac{1}{g}} . \frac{n}{m}\, a = \frac{1}{g} . \pm f$. Et quoniam $g$ arbitrió sumi potest, demonstratum manet numero abstracto $a$, donec sic in genere propositio effertur, quemvis logarithmum aptari posse.

§. 28. Contra vero eidem logarithmo abstracte sumpto quivis numerus aptari potest. Nam ex §. superiori facile eruitur quemvis numerum ita conformari posse, ut semper coefficiens basis eodem exponente afficiatur, a quo pendet logarithmi mensura: eritque semper $L\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} . \frac{m}{n}\, a = L\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} . \frac{n}{m}\, a$ $= L\left(\frac{\frac{s}{t}}{1}\right)^{g} . b = g\, f$. Quamobrem Problema *dato numero quocumque abstracte sumpto invenire ejus logarithmum*; & ejus inversum, *dato logarithmo abstracte sumpto invenire numerum illi respondentem* est Problema maxime indeterminatum, & infinitis solutionibus obnoxium: ut igitur intra limites determinetur Problema, determinandum est prius systema exponentiale SA, vel SY, sive protonumerus, coefficiens basis, & distantia basis a protonumero eodem prorsus modo, quo demonstravimus in Capp. supp. nullum numerum rite ad geometrica traduci posse, neque ejus naturam determinari, nisi prius natura systematis determinetur. Determinato vero systemate mixto conjunctione utriusque systematis exponentialis, & logarithmici (sive determinatis protonumero, basi, distantia basis a protonumero, sive ejus logarithmo) illæ necessario fluentes determinantur, quarum exponentes seriem constituunt numerorum naturalium, 0, 1, 2, 3 .... indefinitam, atque ideo in-

insistunt punctis datis primi generis, nec aliud arbitrio nostro relinquitur nisi fluentes datæ secundi generis, quas vidimus pendere a denominatore arbitrario fractionis exponentis numerum divisionum protonumeri respectivi indicante. Restat igitur ut videamus data formula generali fluentis exponentialis

$M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}} \cdot a$, ac descripta ejus Logistica protonumeri $a$, basis

$\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1} \cdot a$, logarithmi $f$ quænam mutationes in ipsa Logistica oriantur, hisce elementis singulis aliquo modo inter se mixtis atque variatis.

§. 29. Ac primum videndum quid accidat nostræ Curvæ si varia horum elementorum admixtione mutetur tantum protonumerus. Præter ea, quæ diximus §. 24, descriptus intelligatur ( *Fig.* 2. ) totus Locus geometricus fluentis exponentialis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}} \cdot a$ 1.ª, cujus partialis H A B h est Locus fluentis

$M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ systematis S A, & G A B g fluentis $M = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ 2.ª systematis S Y. Verum cum sit $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f} - \frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} \cdot a$ 3.ª,

vel $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f} + \frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} \cdot a$ 4.ª, & similiter $M = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f} - \frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} \cdot a$ 5.ª,

vel

vel $= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}+\frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} \cdot a$ 6.ª, ex hac diversa in utrisque ejusdem formulæ præparatione mutatur protonumerus & quoad valorem & quoad situm, & ipsa constructio. Nam facta C R $= g f$, & sumpta $x =$ CK majori C R, erit F f $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} a$: ergo erit in Logistica protonumeri AB $= a$ 1.ª Ii $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}-\frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} \cdot a$ 3.ª in Logistica protonumeri $\left(\frac{n}{m}\right)^{g} a =$ F f: & similiter in Logistica protonumeri A B 2.ª Y y $= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}-\frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} a$ 5.ª in Logistica protonumeri $\left(\frac{m}{n}\right)^{g} a =$ L l. Verum erit L $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ 1.ª $=$ L $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ 2.ª $= x =$ C K; sed L $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}-\frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$ 3.ª $=$ L $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}-\frac{gf}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} a$ 5 $= x - gf$ $=$ C K — C R $=$ R K: & facta $x = gf$, erit logarithmus 1.ª & 2.ª $= gf =$ C R. Logarithmus vero 3.ª & 5.ª $= of =$ R. Quod si $x$ minor sit $gf$, for-

mula

mula 3.ª mutatur in 7.am $M = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{gf-x}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$, & fluens transfertur ad syſtema $SY$, in quo protonumerus eſt ſemper minor fluente: formula vero 5.ª convertitur in 8.am $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{gf-x}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} a$, & tranſit in fluentem ſyſtematis SA, in quo protonumerus eſt ſemper major fluente. Ergo 7.ª protonumeri Ff pertinet ad ramos F 1 H A Q, f 1 h B q, & $f$ fit negativa: logarithmi enim in hoc caſu ex puncto R procedunt verſus C: atque ideo exponens $\frac{gf-x}{f}$ $= \frac{g \cdot -f - (-x)}{-f} = g - \frac{x}{f}$, & facta $x = C\,2\,C$, erit 7.ª $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g - \frac{x}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a = 1\,H\,1\,h$, & ejus logarithmus $= gf - x = RC - 2\,CC = R\,2\,C$. Similiter 8.ª $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{gf-x}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} a = 1\,G\,1\,g$ protonumeri Ll converſa in fluentem SA eodem logarithmo R2C gaudebit.

§. 30. Sed quoniam 3.ª $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x-gf}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x+gf}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} a$ 4.ª, eſtque in noſtro caſu protonumerus $\left(\frac{m}{n}\right)^{g} a = Ll$, fluens hæc 9.ª pertinebit ad SA, & ejus rami convergentes erunt L A P 1 P, l B p 1 p, & $f$ tranſmutatur in $-f$.

In

In hoc itaque casu logarithmus respectu primæ positionis $\frac{gf+x}{f}$ fit $\frac{g.-f-x}{-f} = g\frac{-x}{-f} = \mathrm{RC} + \mathrm{C\,1\,c}$ ( $x$ initium sumente a puncto C versus t ) & posita C 1 c $= x$, est fluens 9.ª $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+\frac{x}{f}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{g} a = \mathrm{Pp}$ ad Logisticam protonumeri L l systematis S A. Facta $x = o$, fit fluens $M = a = \mathrm{AB}$, una ex ordinatis Logisticæ protonumeri L l. Quod formulæ 1.ª $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ in 4.ªᵐ transmutatæ contingere vidimus, idem evenire formulæ 2.ª $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ transformatæ in 6.ªᵐ $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{x}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} \cdot a$ facile quisque dato temperamento intelliget, si iisdem vestigiis insistere velit; & fluens pertinebit ad Logisticam systematis S Y protonumeri $\mathrm{F f} = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} . a$, & Logisticæ rami divergentes F H A Q, f h B q, & facta $x = o = \mathrm{C}$, erit fluens $= \mathrm{AB}$ ejusdem Logisticæ &c., licet A B sit communis singulis octo ramis totius Loci geometrici a nobis ( *Fig.* 2. ) descriptis. Quare licet formulæ superiores non sint nisi diversæ mutationes & transformationes unius ejusdemque fluentis, singuli tamen singularum logarithmi inter se toto cælo distant, & singulæ fluentes suam positionem, ac ipsam Logisticam mutant: ut graviter erraret ille, qui ex æqualitate fluentium exponentialium æqualitatem suorum logarithmorum desumeret.

§. 31. Hisce bene perspectis atque cognitis eruitur tantum abesse, ut unus tantum ramus ( ut quidam volunt ) Logisticæ tribuendus sit, ut non satis sit ad integrum Locum geometricum nostræ formulæ construendum Logisticam duobus ramis hinc inde ab axe æqualibus, similibus, & similiter positis ( ut quidam alii putant ) præditam constructione exhibere, ut ostendit *Fig.* 5: hac enim non perfecta descriptione indeterminatus manet & situs, in quo sumenda

est

eſt fluens maxima & minima protonumero æqualis ut habeatur initium ſeriei, & ipſius Logiſticæ natura manet indeterminata. Nam ex demonſtratis ſi quævis ordinata A B $= a$ ex infinitis eligatur, in qua initium ſumat ſeries fluentium exponentialium, erit hæc protonumerus. Sed huic æqualis eſt maxima fluens ſyſtematis S A, & minima fluens S Y, ergo fluens æqualis protonumero erit ex dictis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm o f}{f}} \cdot a = a =$ A B: atque ideo ex hoc limite A B, in quem ſimul concurrit tam differentia maxima, quam minima fluentium, ſi fluens motu æquabili hinc inde ſe exerat, atque explicet, tam differentiam, quam ſummam exhibeat neceſſe eſt, mutatione exponentis $\frac{\pm o f}{\pm f}$ in $\frac{\pm x}{\pm f}$ coefficientem viæ fluendo emenſæ ſive logarithmi, ut ſtatim ſe ſe offerat hinc inde ab A B fluens $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}} \cdot a$. Itaque ſi fiat C 1 C $= x = g f$, erit in 1 C eodem tempore $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} \cdot a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} \cdot a$, & in 1 c, in altera æquali diſtantia, $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{g \cdot - f}{- f}} \cdot a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} \cdot a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a$. Sed in deſcripta Logiſtica non habentur ex una parte niſi rami A M, B N invicem convergentes qui differentiam tantum fluentium intercipiunt, & ex oppoſita niſi rami A g, B h convergentes qui ſummam fluentium complectuntur; ergo ſupplendi ſunt qui deſunt ex una parte rami A G, B H ſimiles & æquales ramis A g, B h ex altera: & in hac rami A m, B n ſimiles & æquales ramis A M, B N; ut in primo caſu habeatur fluens $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a =$ G H; in ſecundo

fluens $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{g}{1}} a = m\,n$, quæ respective deerant: ut compleatur Locus a formula requisitus.

§. 32. Idem invenies si sumas quamvis aliam ex ordinatis ex: gr: M N $= \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{g}{1}} \cdot a$ loco protonumeri, cujus forma in hoc casu erit $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{0} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} \cdot a$ maxima unius systematis S A, minima alterius S Y: atque ideo in punctis M, N duplicanda erit, ut in punctis A, B superius fecimus: & rami A M, B N qui ad protonumerum A B relati intercipiebant fluentes S A formulæ $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\frac{x}{f}}{1}} \cdot a$, relati ad protonumerum M N continent fluentes S Y formulæ $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{\frac{-x}{-f}}{1}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$, in qua si ponatur loco $\frac{x}{f}$ exponens $\frac{gf-x}{f}$, erit fluens prima S A æqualis huic secundæ S Y in eodem puncto, & $M = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\frac{x}{f}}{1}} \cdot a = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{g-\frac{x}{f}}{1}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$ (ut patet): ex quibus æqualitas ramorum A M, B N ex utroque protonumero comprobatur. Curva igitur a nobis (*Fig.* 2.) descripta ea una est, quæ omnino systema exponentiale mixtum formulæ $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\pm 1}{1}}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}} \cdot a$ positione & protonumero determinat. Initium enim abscissarum (sive logarithmorum origo) semper in eo situ sumendum est, in quo extrema puncta ordinatæ duobus ramis se decussantibus communia, ordinatam hanc protonumeri vicem gerere osten-

ostendunt. Ni enim hoc artificio compleatur Curva, quævis ordinata & protonumerum referre poterit, & repræsentare eodem tempore summam fluentium, si applicetur ex una parte protonumero ipsa minori; & repræsentare differentiam fluentium, si ordinata protonumero ipsa majori applicetur: quæ singula cum in constructione communi omnino in incertum relinquantur, patet constructionem communem Logisticæ ad unum tantum, vel ad duos ramos definitam incompletam esse, ac non nisi mea methodo perficiendam.

§. 33. Nunc ad aliam superioris formulæ $M = \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}} . a$ præparationem accedentes, ponamus exponentes seriei fluentium exponentialium progredi in serie numerorum naturalium $o$, 1, 2, 3 . . . ad infinitum, in quo casu fluentes in ratione geometrica progredientes erunt datæ primi generis utpote (§. 12.) insistentes punctis necessariis a protonumero respectivo determinatis. Series hæc posito protonumero $a$, basi $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1} a$, basis logarithmo $f$, erit

$$\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{0} . a + \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{1} . a + \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{2} . a + \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{3} . a + \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{4} . a \ldots$$

$$+ \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{g} . a \; (P).$$

Descripta igitur Logistica hujusce systematis, cujus quartam partem *Fig. 6.* exhibet, in qua $KA = \frac{1}{2}\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{0} a$, KT semiaxis, & K1K = 1K2K &c. $= f$, ramus Logisticæ A b c z erit locus semidifferentiæ fluentium homologarum systematis S A, & ramus A B C G Y locus semisummæ fluentium S Y: eruntque ordinatæ ad utrumque systema respectivæ

$$\left\{\begin{array}{l} KA + 1Kb + 2Kc + 3Kd + 4Ke \ldots \\ KA + 1KB + 2KC + 3KD + 4KE \ldots \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{0} . a + \frac{1}{2}\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{1} . a$$

 +

$$+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2}\cdot a+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{3}\cdot a\ldots+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g}\cdot a\ (Q)$$

donec sic effertur formula analytica. Sed hæc in sequentem transformata

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}\cdot a+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}\cdot\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\,1}a+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}\cdot\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2}a$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}\cdot\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{3}a\ldots+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}\cdot\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g}\cdot a\ (R)$$

transit ad significandas tot dimidias fluentes maximas & minimas utriusque systematis, quot sunt seriei termini pertinentes singuli ad Logisticas diversorum protonumerorum, qui in eadem K n A collocati seriem ordinatarum primam Q æquant quidem, sed logarithmo $o.\pm f = K$ singuli afficiuntur. A punctis igitur b, c, d, e, f . . . . . B, C, D, E, F . . . ductis ad indefinitam K n A parallelis axi b1a, c2a, d3a, e4a, f5a . . . B1A, C2A, D3A, E4A, F5A . . . , series protonumerorum, qui dimidii intelliguntur
KA, K1a, K2a, K3a, K4a . . .
KA, K1A, K2A, K3A, K4A . . . erit respective æqualis R. Nunc describantur Logisticæ 1 a 1 b 1 c . . . 1 z, 2a 2b 2c . . . 2z &c.; 1A 1B 1C . . . 1Y, 2 A 2 B 2 C . . . . 2 Y &c. singulis istis protonumeris respondentes ut ostendit *Fig. 6.* Hisce peractis series ordinatarum in singulis istis Logisticis erunt sequentes

eries prot. $\frac{a}{2}$ erit $\frac{a}{2}\left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1}+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2}\ldots\ldots+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g}\ldots\right)$ 1.ª & formu- $M=\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}\cdot a$

ries prot. $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}a$ erit $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}a\left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1}+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2}\ldots+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g}\ldots\right)$ 2.ª la gene- $M=\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\cdot$

ries prot. $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{2}a$ erit $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{2}a\left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0}+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1}+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{2}\ldots+\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g}\ldots\right)$ 3.ª ralis $M=\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{\pm x}{\pm f}}\cdot\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)$

& sic

& sic de singulis. Sed si a serie Q, quæ est ad Logisticam Abc... z; ABC...Y protonumeri $\frac{a}{2}$ demas primum terminum, transitus fit in eadem Logistica Abc...z a protonumero KA ad protonumerum 1Kb, & eodem modo in eadem Logistica ABC... Y a protonumero KA ad protonumerum 1KB: ac dempto primo & secundo, & sic successive, transitus fit in eadem Logistica a protonumero 1Kb, 2Kc &c. vel 1KB, 2KC &c. ad protonumerum 2Kc, 3Kd &c. 2KC, 3KD &c. successive ut series geometrica ostendit. Ergo Logistica protonumeri 1Kb, vel 1KB est eadem ac Logistica protonumeri K1a, vel K1A. Logistica protonumeri 2Kc, vel 2KC eadem ac Logistica protonumeri K2a, vel K2A, & sic successive, ita ut hæ non sint nisi primæ a diversa singulæ protonumeri positione ad eamdem KnA translatæ. Ergo ramus bcd...z similis & æqualis 1a 1b 1d...1z; & ramus BCD...Y similis & æqualis 1A 1B 1C...1Y: item ramus cde...z similis & æqualis 1b 1c 1d...1z, & = 2a 2b 2c...2z: & ramus CDE...Y similis & æqualis 1B 1C 1D...1Y, & = 2A 2B 2C... 2Y &c. Arcus vero singularum Logisticarum intra easdem parallelas 1ab; 2a1bc; 3a2b1cd; 4a3b2c1de &c. 1AB; 2A1BC; 3A2B1CD; 4A3B2C1DE &c. sunt similes & æquales, utpote iidem, sed loco tantum moti.

§. 34. Interceptæ inter singulos hujusmodi ramos Logisticarum diversi protonumeri vel immediate proximos ut A1a, b1b, c1c, d1d...., A1A, B1B, C1C, D1D..., vel inter duos quoscumque ut A2a, b2b, c2c..., A2A, B2B, C2C...; A3a, b3b, c3c..... A3A, B3B, C3C... in eadem serie geometrica progrediuntur, in qua procedunt ordinatæ respectivæ cujusvis Logisticæ ad axem, vel harum duplæ ad duos ramos hinc inde ab axe. Est enim A1a = KA − K1a

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{0}{1}} a - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{}{1}} a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m}\right).\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{0}{1}} a;\ b1b = K1a - K2a$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{}{1}} - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{1}}\right) a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m}\right).\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{1}} a;\ c1c = K2a - K3a$$

=

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{1}} - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{3}{1}}\right) a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m}\right) . \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{1}} a$, & sic successive: ita ut series hæc omnium interceptarum erit $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m}\right) a . \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{0}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{3}{1}} \ldots\right)$: eadem methodo invenies seriem interceptarum inter primum ramum & tertium $= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{2}\right) a . \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{0}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{1}} \ldots\right)$ & universim, posito $h$ numero ramorum Logisticarum S A, erit series interceptarum inter duos quosvis ramos sequens $\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{h-1}\right) a . \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{0}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{1}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{3}{1}} \ldots\right)$. Simili modo invenies seriem interceptarum inter duos quosvis ramos Logisticarum systematis S Y $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{h-1} - 1\right) a . \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{0}{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{1}} \ldots\right)$; quæ non differunt ab ordinatis homologis cæterarum Logisticarum nisi per factorem constantem $1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{h-1}$, vel $\left(\frac{m}{n}\right)^{h-1} - 1$. Hinc facile erit hujusmodi interceptas ad unius tantum Logisticæ integræ ramos reducere, si fiat in primis protonumerus $= \left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{h-1}\right) \frac{a}{2}$; in secundis

=

$= ((\frac{m}{n})^{h-1} - 1) \frac{a}{2}$ : vel ad unum tantum ramum utpote dimidiatas, posito protonumero $(1 - (\frac{n}{m})^{h-1}) a$, vel $((\frac{m}{n})^{h-1} - 1) a$, àc divisa per 2 quavis ordinata seriei, ut superius ostendimus.

§. 35. Coroll. 1. Quo magis hujusmodi interceptæ a protonumero recedunt, eo magis in SA ad se invicem accedunt, recedunt in SY, sed nusquam se tangere possunt in primo casu, quemadmodum in secundo nusquam ad ultimam divergentiam pervenire: vidimus enim constantem $\frac{n}{m}$ licet quovis magno afficiatur exponente, nunquam absolute nullescere posse. Itaque hujusmodi rami inter se erunt assymptotici: atque ideo non solum punctum z primæ Logisticæ Abcd . . . z quovis intervallo indefinito a protonumero dissitum nusquam cum axe KT concurrere potest; sed neque ramum proximiorem in 1z tangere: cum quævis z1z ordinatæ zT $= \frac{1}{2} (\frac{n}{m})^{\frac{\infty}{1}} a$ ad infinitam distantiam à protonumero sumptæ sit $= \frac{1}{2} (1-(\frac{n}{m})^{h-1}) \cdot (\frac{n}{m})^{\frac{\infty}{1}} a$, sivè hæc ad zT in ratione constanti & data : : $1 - (\frac{n}{m})^{h-1} : 1$. Quod si advertas punctum 1z infinite dissitum aliud ex altera axis parte punctum 1z æque distans ab axe necessario ex demonstratis requirere, quod & ipsum æque distet ab axe; consequitur inter hujusmodi assymptotos curvilineos semper lineam rectam concipi posse, quæ distantiam $(1 - (\frac{n}{m})^{h-1}) \cdot (\frac{n}{m})^{\frac{\infty}{1}} a$ interceptam inter utrumque punctum 1z bifariam dividens cum utroque curvilineo assymptoto vicem assymptoti & ipsa gerat.

Coroll. 2. Ex §§. 33. & 34. eruitur nova ratio, cur coefficiens basis $\frac{n}{m}$ unitate minor nunquam ad absolutum usque *zero* minui possit, quo-

vis

vis excessu augeatur exponens $\frac{x}{f}$. Nam si fluens ex: gr:

$M = \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{x}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$ protonumeri $\left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$, facto $\frac{x}{f} =$ cuivis infinito absolute

nullescere tandem posset, sequeretur ordinatas ultra hoc infinitum productas semper & ipsas esse *zero*, quicumque sit numerus $g$. Ergo transformata eadem

fluentis formula $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{x}{f}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{g} a$ in formulam $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{x}{f}+\frac{gf}{f}} \cdot a$ protonumeri $a$,

logarithmi $x + g$, seriei decrescenti primæ formulæ succederet ex hac secunda series geometrica altera ejusdem basis, atque protonumeri, cujus termini, qui in eadem ratione ac primi decrescere deberent, essent tamen singuli *zero*, & reliquus ramus Logisticæ quovis modo productus cum axe confunderetur, quod repugnat.

§. 36. Logisticæ superiores §. 33. facile quidem ad unam quamvis ex pro-

positis reduci possunt (cum fluens protonumeri $\left(\frac{m}{n}\right)^{g} a$, logarithmi $x$, M

$= \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1}\right)^{g} a$ conversa in $\left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}+g} \cdot a$ statim transeat in Logi-

sticam protonumeri $a$, logarithmi $x + gf$; & viceversa fluens $\left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ si

transformetur in $\left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}-g} \cdot \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$ transit a Logistica protonumeri $a$, lo-

ga-

garithmi $x$, ad Logisticam protonumeri $\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{g}$ $a$ logarithmi $x - gf$) has tamen inter se nunquam concurrere posse vidimus. Nunc non erit inutile duas fluentes ad Logisticas diversi tantum protonumeri inter se comparare. Sit itaque $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ ad Logisticam protonumeri $a$, &

$M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . b$ ad Logisticam protonumeri $b$, cæteris elementis communibus: & fluentes hujusmodi eodem logarithmo præditæ erunt inter se ut protonumeri. Cum protonumeri $a$, & $b$ dati ponantur, erit etiam data ratio numerica, qua se se respiciunt. Sit igitur $a : b :: s : t$, & posita $a > b$, erit $s > t$: ex qua analogia habetur tam $b$ data per $a$, quam $a$ data per $b$, cum fit $b = \frac{t}{s} a$, & $a = \frac{s}{t} b$. Quare erit $M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . b = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . \frac{t}{s} a$; &

$M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . a = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . \frac{s}{t} b$: in quibus si ponatur $x = f$, fit

$M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} b = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{1} a$; $M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{ns}{mt}}{1}\right)^{1} b$:

erit itaque basis $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} b$ Logisticæ protonumeri $b$ æqualis basi $\left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{1} a$

protonumeri *a*; & basis $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}$ *a* Logisticæ protonumeri *a* æqualis basi $\left(\frac{\frac{ns}{mt}}{1}\right)^{1}$ *b* Logisticæ protonumeri *b*. Quatuor igitur diversa systemata exponentialia habentur, quorum formulæ exponentiales relatæ ad axem erunt $M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} b$; $M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$; $M = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$; $M = \frac{1}{2}\left(\frac{ns}{mt}\right)^{\frac{x}{f}} b$. Usus harum formularum ostendetur ( ne longius abeam ) comparatione duarum primarum. Sumpta igitur in linea indefinita ( *Fig.* 7. ) $AB = a$; ac divisa bifariam in C, abscindatur $CM = CN = \frac{b}{2}$, & ducta CT indefinita describatur ramus Logisticæ AH protonumeri *a*, & ramus Logisticæ MH protonumeri *b*: ut sit maxima $M = MC = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{of}{f}} b$; maxima $M = AC = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{\frac{of}{f}} a$: ergo facta $C\,1\,C = f$, erit in primo casu $1\,CH = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} b$ basi Logisticæ protonumeri *b*, in secundo eadem

$1CH = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{1} a$ basi Logisticæ protonumeri $a$ cum sit $\frac{t}{s} a = b$: rami igitur Logisticæ concurrunt in H. Insuper erit $\left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a > \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} b = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \frac{t}{s} a$ posita $x$ fractione minori unitate sive $= \frac{1}{h} f$: erit enim $\left(\frac{nt}{ms}\right)^{\frac{1}{h}} > \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{h}} \cdot \frac{t}{s}$, sive $\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{h}} > \frac{t}{s}$, & $1 > \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{h-1}{h}}$, quod verum est cum sit $s > t$. At posita $x > f$, puta $hf$, erit $\left(\frac{nt}{ms}\right)^{h} < \left(\frac{n}{m}\right)^{h} \frac{t}{s}$; sive $\left(\frac{t}{s}\right)^{h} < \frac{t}{s}$, & $\left(\frac{t}{s}\right)^{h-1} < 1$. Ergo Logistica A H protonumeri $a$ secabit Logisticam M H protonumeri $b$ in puncto communi H, atque inde semper magis quam M H ad axem accedet.

§. 37. Nunc sumatur Logistica $M = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} b$ systematis S Y $= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \frac{t}{s} a$, & facta $x = f$, erit $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right) b$ basi Logisticæ protonumeri $b = \left(\frac{\frac{mt}{ns}}{1}\right)^{1} a$ basi Logisticæ protonumeri $a$. Descriptus igitur ramus (*Fig.* 8)

M H Logisticæ protonumeri $b = MN$, erit $CM = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0} b$; & $1\,CH = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} b$ ejus basis dimidia, & Logistica SY divergens ab axe CT. Sed si referatur ad Logisticam protonumeri $a = AB$, erit $M = \left(\frac{\frac{mt}{ns}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ ad Logisticam protonumeri $a$. Verum hîc tres casus accidere possunt vel enim $ns = mt$, vel $ns < mt$, vel $ns > mt$. Descripta Logistica (*Fig.* 8) MH protonumeri $b = MN$ semibasis $1\,CH = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} b$, & facta $ns = mt$, erit $M = \left(\frac{\frac{1}{1}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ ad Logisticam protonumeri $a$, basis $\left(\frac{\frac{1}{1}}{1}\right)^{1} a$, & $1\,CH = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} b = \frac{1}{2} \cdot \frac{mt}{ns} a = \frac{1}{2} a$. Ramus igitur hujusce Logisticæ erit linea parallela axi CT, & posita $x = \frac{f}{b}$, erit $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{b}} b < a$: at facta $x = bf > f$, erit $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{b} b > a$. Nam cum sit

$\frac{m}{n} = \frac{s}{t}$, erit in primo casu $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{h}} b < a = \frac{s}{t} b$, sive $\frac{m}{n} < \left(\frac{s}{t}\right)^{h} < \left(\frac{m}{n}\right)^{h}$ sive $\left(\frac{n}{m}\right)^{h-1} < 1$: in secundo $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{h} b > a = \frac{s}{t} b = \frac{m}{n} b$; & $\left(\frac{m}{n}\right)^{h} > 1$.

Quod si sit $n s > m t$, erit $M = \left(\frac{\frac{m t}{n s}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ ad Logisticam ( *Fig. 9* ) A H systematis S A, & 1 C H $= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{mt}{n s}}{1}\right)^{1} a$: & $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{h}} b < \frac{m t}{n s} a = \frac{m}{n} b$; sive $1 < \left(\frac{m}{n}\right)^{h-1}$: & $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{h} b > \frac{m}{n} b$, sive $\left(\frac{m}{n}\right)^{h-1} > 1$: ergo Logisticæ secantur in puncto H.

Tandem si sit $\frac{m}{n} > \frac{s}{t}$ sive $m t > n s$, erit $M = \left(\frac{\frac{mt}{ns}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ ( *Fig. 10* ) ad Logisticam A H systematis S Y, & 1 C H $= \frac{1}{2} \cdot \frac{mt}{ns} a$ & in qua eo magis $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{h}} b > \frac{mt}{ns} a$ & $\left(\frac{m}{n}\right)^{h} b > \frac{mt}{ns} a$ ut supra. Hoc artificio posita pri-

primum Logistica protonumeri $b$ transitum fecimus ad Logisticam protonumeri $a$ ope basis communis 1 C H.

§. 38. Nunc a Logistica protonumeri $a$ majoris ad Logisticam protonumeri $b$ minoris si transferri volumus, fiat $M = \left( \frac{\frac{n}{m}}{1} \right)^{\frac{x}{f}} a$, sed quoniam $\frac{n}{m} a = \frac{ns}{mt} b$,

erit $M = \left( \frac{\frac{ns}{mt}}{1} \right)^{\frac{x}{f}} b$ ad Logisticam protonmeri $b$, basis $\frac{ns}{mt} b = \frac{n}{m} a$ basi Logisticæ protonumeri $a$.

1.° ponatur $\frac{n}{m} = \frac{t}{s}$, & erit $M = \left( \frac{\frac{1}{1}}{1} \right)^{\frac{x}{f}} b$. Itaque ( *Fig.* 11 ) descripta jam Logistica A H protonumeri $a$, basis $\left( \frac{\frac{n}{m}}{1} \right)^{1} a = b$, si per puncta M, H ducatur M H parallela axi, hæc erit ramus Logisticæ protonumeri $b$, & basis item $b$: & $\left( \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{b}} a > b = \frac{t}{s} a$, sive $\left( \frac{t}{s} \right)^{\frac{1}{b}} > \frac{t}{s}$, & $1 > \left( \frac{t}{s} \right)^{b-1}$: contra vero $\left( \frac{n}{m} \right)^{b} a < b$, sive $\left( \frac{n}{m} \right)^{b} < \frac{n}{m}$, & $\left( \frac{n}{m} \right)^{b-1} < 1$.

2.° Posita vero $mt < ns$, erit $M = \left( \frac{ns}{mt} \right)^{\frac{x}{f}} b$ ad Logisticam ( *Fig.* 9 )

A H protonumeri $b$ systematis S Y : & $\left(\frac{ns}{mt}\right)^{\frac{1}{h}} b < \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{h}} . a = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{h}} . \frac{s}{t} b$, sive $1 < \left(\frac{s}{t}\right)^{h-1}$ : at $\left(\frac{ns}{mt}\right)^{h} b > \left(\frac{n}{m}\right)^{h} . a = \left(\frac{n}{m}\right)^{h} \frac{s}{t} b$, sive $\left(\frac{s}{t}\right)^{h-1} > 1$ ut supra: ergo Logisticæ se secant in H.

3.° Sit nunc $mt > ns$, erit $M = \left(\frac{\frac{ns}{mt}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . b$ ( *Fig.* 7 ) ad Logisticam MH protonumeri $b$ systematis S A, & $\left(\frac{ns}{mt}\right)^{\frac{1}{h}} b < \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{h}} a = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{h}} \frac{s}{t} b$; sive $1 < \left(\frac{s}{t}\right)^{h-1}$; & $\left(\frac{ns}{mt}\right)^{h} b > \left(\frac{n}{m}\right)^{h} \frac{s}{t} b$, sive $\left(\frac{s}{t}\right)^{h-1} > 1$.

Ac tandem transferatur Logistica $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ protonumeri $a$ ad Logisticam protonumeri $b$ $M = \left(\frac{\frac{ms}{nt}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} b$, in qua cum sit semper $nt < ms$, utraque Logistica erit divergens ab axe utpote systematis S Y, ut ostendit *Fig.* 10: ac donec $\frac{x}{f} < 1$, erit $\left(\frac{ms}{nt}\right)^{\frac{1}{h}} b < \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{h}} . a = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{h}} . \frac{s}{t} b$, sive $1 < \left(\frac{s}{t}\right)^{h-1}$, & facta $\frac{x}{f} < 1$, sive $= h$, erit $\left(\frac{s}{t}\right)^{h-1} > 1$.

§. 39.

§. 39. Quod si universim rationem, qua se se respiciunt fluentes superiorum formularum homologæ (sive ejusdem exponentis) investigemus, quæ eorum dem retento logarithmo, diversum tamen obtinent coefficientem basis, atque protonumerum, Ex superius demonstratis constat esse

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Fig. } 7.^{a}, & 1.^{a}\ M : M' :: \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot b : \left(\frac{\frac{nt}{ms}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \\ \textit{Fig. } 8.^{a}, 9.^{a}, 10.^{a} & 2.^{a}\ M : M' :: \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot b : \left(\frac{\frac{mt}{ns}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \\ \textit{Fig. } 11.^{a}, 9.^{a}, 7.^{a} & 3.^{a}\ M : M' :: \left(\frac{\frac{ns}{mt}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} b : \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \\ \textit{Fig. } 10.^{a} & 4.^{a}\ M : M' :: \left(\frac{\frac{ms}{nt}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} b : \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \end{array}\right\} :: 1 : \left(\frac{s}{t}\right)^{1-\frac{x}{f}} :: 1 : \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{x}{f}-1}$$

in ratione scilicet $1 : \left(\frac{s}{t}\right)^{1-\frac{x}{f}}$, quando $\frac{x}{f}$ intra limites præfinitos $o$ & $1$ continetur: in ratione vero $1 : \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{x}{f}-1}$ quando $\frac{x}{f}$ a limite determinato $1$ minimo usque ad infinitum nullo limite determinandum progreditur. Hîc primum eruitur hujusmodi fluentes exponentiales esse inter se in ratione composita rationis constantis, qua se se respiciunt protonumeri, & rationis coefficientium basis ejusdem exponentis, quæ fluens est. Porro intra limites *zero* & $1$ semper licet determinare valorem $\frac{x}{f}$, atque rationem fluentium intra puncta C, 1 C intra quæ fluentes M erunt semper minores suis homologis M'. Facta $\frac{x}{f} = o$, sive in puncto C fluentes sunt ut protonumeri $b : a$ sive

$t : s$,

$t : s$, quæ ratio eſt maxima minoris inæqualitatis reſpectu aliarum, quæ intra hoſce limites continentur, quæ ſucceſſive ſemper magis ad æqualitatem accedunt, donec facta $\frac{x}{f} = 1$ fluentes in puncto 1 C æquantur. Hiſce vero limitibus prætergreſſis ratio M : M′ fit ſucceſſive ſemper majoris inæqualitatis nullo limite coercenda. Caret igitur ratio hæc extremo limite, atque ideo etiam fluentibus nequit ultimus aſſignari valor, qui proinde arbitrio noſtro relinquitur.

§. 40. Determinato tamen valore exponentis $\frac{x}{f}$ ac determinata ratione, qua fluentes ſe ſe reſpiciunt, ignoratur adhuc qui ſit valor ac forma propria cujuſcumque fluentis ſolitarie ſumptæ: cum eamdem rationem inter ſe habere poſſint fluentes homologæ in diverſis Logiſticis, quæ ſimul creſcere aut ſimul decreſcere poſſunt; aut alterutra creſcente alterutra decreſcere; aut alterutra manente conſtanti alterutra creſcere vel decreſcere poteſt, ut *Fig.*ᵃ *citatæ* oſtendunt. Ut vero re ipſa cognoſcatur quantum interſit formam abſolutam ſingulis fluentibus M, M′ tribuere, quarum ratio habetur, & hoc pacto magis ſemper confirmare quæ diximus Capp: IX, & X; animadvertas velim quod eadem manente ratione fluentes *Fig.* 7.ª ambæ ſimul decreſcunt, donec facta $\frac{x}{f} = 1$ æquiparantur, quod aliter contingit fluentibus reliquarum Figurarum eamdem inter ſe rationem habentibus. Facta vero $\frac{x}{f} > 1$ erit

$$M : M' :: 1 : \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{x}{f}-1}$$

in eadem ratione: ſed in *Fig.* 7.ª prima M ſemper magis creſcit relative ad ſecundam, licet ambæ abſolute ſpectatæ decreſcant: in *Fig.* 8.ª vero una creſcit, altera eſt conſtans; in *Fig.* 9.ª creſcit una, altera decreſcit, & in *Fig.* 10.ª ambæ fluendo creſcunt, &c. Quod ſi more communi fiat $\frac{x}{f} = \infty$, erit $M : M' :: s^{\infty-1} : t^{\infty-1}$, qua indicatur valore quovis dato majori inter ſe differre; ſed tantum abeſt ut ſingulæ (quemadmodum vulgo creditur) infinitæ fiant, ut in *Fig.* 7.ª ſemper magis minores evadant: cum ſit $M = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\infty} b}{1}$; $M' = \frac{\left(\frac{nt}{ms}\right)^{\infty} a}{1}$, quas

singulas absolute spectatas nullescere Analysis tamen vetus declarat. Scire tamen velim quomodo hæc inter se pugnantia ab Analysi vulgata conciliari possint? Profecto statuamus oportet fractionem $\frac{n}{m}$ unitate minorem nunquam absolute nullescere quacumque ratione augeatur $\frac{x}{f}$: quo statuto nihil repugnat, quominus fluentes $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\frac{x}{f}} b$, $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n\,t}{m\,s}\right.}^{\frac{x}{f}} a$ in se indefinite decrescant, & tamen prima quocumque limite secundam excedat: ut tandem statuatur idem esse $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\infty}$, $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n\,t}{m\,s}\right)}^{\infty}$ ac $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\frac{x}{f}}$, $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n\,t}{m\,s}\right)}^{\frac{x}{f}}$ : hoc est in utroque casu & fluentes & earum ratio omnino indeterminata, determinanda a parte ante incipiendo scilicet a *zero* ac successive progrediendo; nunquam a parte *post*, sive a parte infiniti, quod nullo modo attingi potest, ut Cap: III. docuimus.

§. 41. Donec igitur in formula generali $M = \left(\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} a$, protonumerus $a$, coefficiens basis $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\pm 1}$, & ejus logarithmus $f$, qui in eodem systemate semper invariati manent, intra limites finiti continentur, ulla fluens nec nullescere absolute potest, neque ad ultimam infinitam magnitudinem evehi, fluente $x$ a $0f$, $f$, $2f$, $3f$ . . . indefinite. Fluens tamen duplici modo fieri potest *zero*: primo quando in systemate exponentiali S A differentia fluentium est *zero*, & fluentes æquantur, facto $\frac{n}{m} = o$ : secundo modo quando protonumerus assumptus sit *zero*: in utroque tamen casu fluentes singulæ evanescunt,

ſcunt, & formula generalis eſt in primo caſu $M = \left(\frac{o}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$, in ſecundo $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot o$. Conſtructio primæ formulæ habetur ſi facta $M = \left(\frac{o}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$

$$= \left[\frac{\left(\frac{1+o}{2}\right)^{\frac{x}{f}} - \left(\frac{1-o}{2}\right)^{\frac{x}{f}}}{\left(\frac{1+o}{2}\right)^{\frac{x}{f}} + \left(\frac{1-o}{2}\right)^{\frac{x}{f}}}\right] a$$

ex punctis (*Fig.* 12.) A, B, C, protonumeri A B biſariam ſecti ducantur protonumero normales indefinitæ 1 a A 1 A, t T, 1 b B 1 B: & rami Logiſticæ omnes cum axe t T commiſcentur, & fluentes æquales fluendo ſemper perſeverant. In ſecundo vero caſu $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot o$ tota Logiſtica cum linea recta indefinita t T confunditur: eodem manente ſyſtemate logarithmico protonumeri $f$. Quod ſi logarithmus $f$ baſis & ipſe *zero* ponatur, tunc formula erit $M = \left(\frac{o}{1}\right)^{\frac{x}{o}} \cdot a$, vel $= \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{o}} \cdot o$; ſed $x = \frac{p}{1} f = p \cdot o$ in hac caſu: ergo $M = \left(\frac{o}{1}\right)^{\frac{p \cdot o}{o}} \cdot a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p \cdot o}{o}} \cdot o$, & Logiſtica in puncto C primæ poſitionis tota, ut ita dicam, conſtringitur, formam tamen fluentis exponentialis M ſervante. Verum ſi $f$ tantum *zero* pona-

 tur,

tur, erit $M = ((\frac{n}{m} / 1)^{\pm 1})^{\frac{x}{o}} . a$, & Logistica tota in lineam rectam X Z (*Fig.2.*) primæ positionis convertitur, quæ intra A , B dividitur in partes A B, D d, 1 D 1 d, &c. vel C A, C D, C 1 D &c.; C B, C d, C 1 d &c. in serie geometrica progredientes a formula $(\frac{n}{m} / 1)^{\frac{x}{o}} a$, vel $\frac{1}{2}(\frac{n}{m} / 1)^{\frac{x}{o}} a$ indicatas; extra, in partes quas $(\frac{m}{n} / 1)^{\frac{x}{o}} . a$ requirit. Quare si propositum fuisset datam A B in tot partes ipsa minores vel majores dividere, quæ in data serie geometrica progrediantur, construenda esset Logistica *Fig.* 2.ª & inversa methodo, qua supra §. 8 a linea recta X Z ad ramos Logisticæ transitus factus fuit, hic a Logistica dati protonumeri, basis, & ejus logarithmi ad lineam rectam X Z, demissis normalibus H D, 1 H 1 D &c. a quovis Logisticæ ramo, fluentes singulæ essent traducendæ. Hinc ex hac reciproca transmutatione a linea recta, quæ erat Locus geometricus utriusque systematis linearis S A, S Y, ad Curvam Logisticam, aut viceversa, patet aditus, una *of* in *b* vel, viceversa, transmutatione.

§. 42. Restat ut inquiramus quinam sit Locus geometricus formulæ exponentialis $M = \frac{1'}{1}^{\frac{x}{f}} a$, in quo casu fluentes singulæ semper inter se æquantur, & repræsentant vel differentiam maximam fluentium homologarum S A, vel summam minimam fluentium homologarum S Y, fluente minori in utroque evanescente. Erit itaque in S A $M = \left[\frac{\left(\frac{1+'1}{2}\right)^{\frac{x}{f}} - \left(\frac{1-'1}{2}\right)^{\frac{x}{f}}}{\left(\frac{1+'1}{2}\right)^{\frac{x}{f}} + \left(\frac{1-'1}{2}\right)^{\frac{x}{f}}}\right] a$, in

in S Y $M = \left[ \frac{\left(\frac{1' + 1}{2}\right)^{\frac{x}{f}} + \left(\frac{1' - 1}{2}\right)^{\frac{x}{f}}}{\left(\frac{1' + 1}{2}\right)^{\frac{x}{f}} - \left(\frac{1' - 1}{2}\right)^{\frac{x}{f}}} \right] a$ , & Locus geometricus in utroque caſu ( *Fig.* 12. ) a lineis rectis A 1 A , B 1 B hinc inde a protonumero indefinitis, & axi parallelis exhibetur: quæ proinde ſunt limites ramorum tam convergentium quam divergentium Logiſticarum utriuſque ſyſtematis ,

& formula $M = \frac{1'}{1}^{\frac{x}{f}} a$ erit formula limitis utriuſque ſyſtematis exponentialis , in qua fluens ( 1′) maxima decreſcendo Logiſticam ſyſtematis S A; minima ſe augendo Logiſticam ſyſtematis S Y exhibet, ut in *Fig.* 2.

§. 43. Ex hactenus demonſtratis patet hîc etiam determinandum prius eſſe ſyſtema exponentiale, a quo pendet fluentis natura, & ejus forma, antequam recte pronunciari poſſit aliquid de natura ac forma alicujus fluentis, eo ferme modo quo faciendum eſſe ad determinandam naturam ac formam fluentium ſimplicium utriuſque ſyſtematis ſuperius docuimus. Porro ex tribus elementis, quæ ſimul ad conſtituendum ſyſtema mixtum exponentiale concurrunt, mutato protonumero, ſpecies tantum non natura Logiſticæ mutatur; at mutato coefficiente baſis, aut ejus logarithmo, aut utroque, natura Logiſticæ mutatur. Hîc tamen probe notandum quod, ut numerus aliquis alicui jam ſtatuto ſyſtemati rite applicari poſſit, innoteſcat prius oportet cuinam functioni fluentis ſyſtematis jam ſtatuti numerus datus æquetur. Ita ſi habeatur ſyſtema

$M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ , & numerus datus $t$ huic ſyſtemati ſit applicandus, ſi ulterius innoteſcat eſſe $t = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h} a$ , facilis erit hujuſce numeri ad propoſitum

ſy-

systema applicatio, facta $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h}\right)^{\frac{x}{f}} a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{hx}{f}} . a$, in qua posita $x = f$,

obtinetur $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h} a$ numerus datus huic systemati applicatus, cujus logarithmus $= hf$ situm ac ejus positionem in Logistica systematis assumpti determinat: hac vero conditione deficiente frustra labores ut numerum datum ad systema propositum traducas, nisi approximationis methodo utaris, de qua alias.

Quod si prima utaris formula $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h}\right)^{\frac{x}{f}} . a$, tunc a systemate primum

proposito fluentis $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ basis $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right) a$ mutata basi in $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h} a$, ad systema

hujusce novae basis, caeteris intactis manentibus, te transtulisti: quod cum infinitis modis basis immutari possit, facta $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{1}{h}}\right)^{\frac{hx}{f}} . a$

$= \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h}\right)^{\frac{x}{hf}} . a$; quicumque numerus sit $h$, erit $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h}\right)^{\frac{x}{f}} a$

$= \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h}\right)^{\frac{x}{f}} a$: ac descriptis Logisticis (*Fig.* 13.) ejusdem protonumeri A B,

&

& logarithmi basis C1C, sed basis $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right) a = 1C1H$; $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{1}{h}} . a = 1C2H$; $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{h} a = 1CH$; in prima logarithmus $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right) a$ erit $C1C = f$; in secunda $= CE = hf$; in tertia $= CD = \frac{1}{h} f$, &c.

§. 44. Cæterum semper erit in nostra potestate quamvis linearem quantitatem $b$ ad Logisticam cujusvis protonumeri $a$, & logarithmi basis $f$ referre. Nam lineares quantitates $b$ & $a$ notæ notam dabunt rationem ex: gr: $t : s$, qua se se respiciunt. Ergo erit $b = \frac{t}{s} a$, & facto transitu ad systema exponentiale fluentis $M = \left(\frac{\frac{t}{s}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$, vel $= \left(\left(\frac{\frac{t}{s}}{1}\right)^{\frac{1}{h}}\right)^{\frac{x}{f}} a$, vel $= \left(\left(\frac{\frac{t}{s}}{1}\right)^{h}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ diversi coefficientis basis, ex qua diversitate singulæ diversæ Logisticæ oriuntur ejusdem protonumeri ac logarithmi basis, in quarum prima distantia $x = f$ a protonumero (sive logarithmus); in secunda distantia $x = hf$; & in tertia distantia $x = \frac{1}{h} f$ dabit punctum diversum, cui in singulis Logisticis insistit fluens eadem $M = \frac{t}{s} a$. In singulis istis Logisticis ejusdem protonumeri & logarithmi basis, mutatur tamen logarithmus fluentis propositæ $\frac{t}{s} a = b$. Hinc eruitur coefficientem basis infinitimode variare posse, cæteris elementis intactis manentibus: ac proinde quamvis fluentem datam ad infinitas Logisticas diversæ basis applicari posse, dummodo coefficiens diversus substituendus sit potestas aliqua ad libitum sumpta ipsius $\frac{t}{s}$: cum nulla alia fluens in quavis Logistica exacte obtineri possit, nisi illa, quæ eodem affecta protonumero ac coefficiente basis (qui semper constantes in eodem systemate perseverent oportet)

tet) non differt a basi nisi ratione exponentis, qui unice fluens est. Quare statuto semel systemate sive Logistica, cuicumque fluenti exponentiali (sive ut vulgo dicitur) cuicumque numero non nisi unus ac determinatus logarithmus respondere potest, cum in serie geometrica fluentium a systemate necessario determinata quævis fluens eum locum occupat in serie, quem exponens, quo afficitur, indigitat ac jubet: qui locus a distantia protonumeri a fluente determinatur. Ne tamen putes inversam propositionem ad amussim verificari posse, ac universim statuere cuicumque logarithmo in jam statuto systemate unam tantum fluentem sive numerum convenire posse. Nam §. 18. demonstratum fuit, in eodem systemate eodem logarithmo necessario gaudere tam differentiam fluentium, quam earum summam, nec non singulas homologas fluentes: ac insuper statutum §§. 25. *26.* quænam pars Loci geometrici generalis fluentibns singulis tamquam earum Locus proprius tribuenda sit. Hæc & alia ex hisce manantia quantum cum vulgatæ Analyseos doctrina congruant, aliis nunc judicandum relinquo, ut hæc nova & a communi opinione remota, quibus Theoria nostra Calculum exponentialem ac logarithmicum restaurandum esse tribus ultimis Capitibus profitetur, compendio perstringam, antequam ad præcipua Theoriæ communis Calculi exponentialis & Logarithmici placita in *sequenti Capite* excutienda accedam.

§. 45. Ex demonstratis in toto hoc Opere, & ex definitione generali Fluentium §. *9.* Cap: I. a nobis tradita patet fluentes natura & origine semper unas non nisi continuo fluxu successive immutari, aliqua tamen definita lege moderandas, ut earum affectiones, proprietates, atque limites cognoscantur, & pro re nata ad usum traducantur. Porro duo diversa genera fluentium, a diversa lege, qua reguntur, sunt necessario admittenda. Primum genus est illarum, a quibus duo systemata S A, S Y superius gigni ostendimus. Hæ cum binæ binæ in eadem semper linea indefinita positæ, & a duobus diversis punctis datis originis prorumpentes simul concurrant ad utrumque systema producendum, nulla alia lege obstringuntur nisi ea, qua earum summa in S A, earum differentia in SY semper intacta maneat. Ad hoc vero obtinendum satis est ut in S A quicquid additur uni, alteri detrahatur; & in S Y quicquid uni additur, addatur etiam alteri. In istis fluentibus moderandis doctrina *Capitum superiorum* tota versatur. Verum si ulterius progredientes (*Fig.* 2.) lineam indefinitam X Z, quæ prius immotà ponebatur, æquabili fluxu hinc inde a puncto C quietis excurrere velimus, atque interim fluentes utriusque systematis eodem communi motu translatæ proprio continuo fluxu diversimode afficiantur, ac vestigia sui extremi puncti in hac progressione relinquentes Locum geometricum unum atque continuum harum omnium limitem describant; ad aliam fluxionis naturam confugiamus oportet, ut in quovis spatii emensi puncto earum diversam mutationem assequamur. Lex igitur certa invenienda erat, qua data fluente haberi posset situs in quo ipsa consistit, & contra dato ejus situ ejus diversa modificatio statueretur. Hoc vero nullo alio modo consequi nos posse, nisi ad fluentem exponentialem confugiamus quæ §§. 4, 5. docuimus aperte ostendunt. Quare patet cur diversa necessario esse debeat natura fluentium utriusque systematis, quæ simul

mul mixtæ atque confusæ in eadem linea immota manente fluxiones suas peragere ponuntur, ab illa earum fluentium, quæ simul cum linea indefinita rapiuntur.

§. 46. Hîc vero nullo modo est prætereundum, hujusmodi fluentes exponentiales ab eadem abstractissima formula $1.^{0}1$, a qua superius fluentes primi generis ortum ducere ostendimus, eadem simplicitate atque elegantia derivari: ut ex hoc uno imperceptibili, atque hactenus neglecto $1^{0}$ quasi semine diligentissime culto ea omnia ac singula una ex aliis enescentia erumpant, quæ aut impervia aut longe petita & inter se distracta, aut a veritate aliena Analysis vetus Cultoribus suis hactenus venditavit. Cum enim $M = \frac{1}{1}^{0}.1 = \frac{g}{1}^{0}.1$, & $\frac{g}{1}^{0}.1 = \frac{g}{g}.1$, vel $= ((\frac{n}{\frac{m}{1}})^{\pm 1})^{0}.1$; ex hac duplici ejusdem formulæ toto cælo diversa modificatione duplex fluentium natura oriatur necesse est. Ex prima enim $M = \frac{g}{g}.1 = \left(\frac{(g-1)+1}{g}\right)1 = \left(\frac{(g+1)-1}{g}\right)1$, &c. origine duo illa systemata, de quibus superius egimus, manant: quæ vulgo *Calculi finiti* principia dicuntur. At sumpta $M = ((\frac{n}{\frac{m}{1}})^{\pm 1})^{0}.1$, in qua solus exponens *zero* sit fluens, oritur alia fluentium origo, quæ jure exponentiales nuncupantur. *Calculus* hic vulgo denominatione arbitraria dicitur *sublimis*: quæ denominatio licet nihil influat in intimam rei, de qua agimus, essentiam, tamen in caussa fuit ut posthabita prima tanquam imbecilliori atque minoris dignitatis calculi subducendi origine, ad secundam utpote nobiliorem ac præstantiorem se totos converterent Analystæ, reputantes hac una obtineri posse, quod alteri interdicitur. Hinc factum fuit ut neutram invicem distractam a vera & communi origine deducerent, nec legibus utrique propriis recte firmarent. Sed jam præcipua, quæ in toto hoc Capite eruimus compendio facto recensere opportunum judico. Sit itaque.

§. 47. Def. I. Fluens geometrica exponentialis illa est, quæ constat *coefficiente exponentiali* in protonumerum, sive in quontitatem geometricam constantem ducto: quæ erit linearis si protonumerus linearis erit; & universim ejus dimensionis, quam habet protonumerus. Male igitur a communi Methodo coefficientes numerici abstracti exponente affecti esse ejus dimensionis dicuntur, quam jubet exponens, atque eam mutari quoties exponens mutatur: repugnat

enim notioni abſtractæ numericæ dimenſionem tribuere, quæ uni quantitatis geometricæ naturæ propria eſt §. 16.

Def. II. Coefficiens exponentialis eſt fractio numerica abſtracta ejuſdem ſemper denominatoris 1: numerator vero eſt quivis numerus ſive integer, ſive fractus, qui & ipſe ſemper conſtans & invariatus in eodem ſyſtemate perſeverat, ſed afficitur exponente fluenti $z$ per quem fit fluens. Fluens igitur exponentialis hac formulá continetur $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{z} a$ : §. 6.

Def. III. Exponens $z$ eſt numerus abſtractus fluens, qui coefficienti conſtanti ſuffigitur a $(o)$ uſque ad quemcumque numerum abſtractum fluendo excurrens: qui proinde uno tantum limite minimo dato $(o)$ continetur, altero nullo dato limite definiendo.

Def. IV. Fluens hæc exponentialis $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{z} . a$, ſi $\frac{n}{m}$ ſit fractio unitate minor eſt differentia fluentium homologarum ſyſtematis S A; ſi $\frac{n}{m}$ eſt fractio unitate major, eſt ſumma fluentium homologarum ſyſtematis S Y. §§. 4, 5.

Def. V. Formula exponentialis $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{z} . a$ dicetur formula homologa fluentium utriuſque ſyſtemátis, & ſyſtemata inde orta ſyſtemata homologa, quia eodem protonumero & logarithmo baſis prædita coefficientem baſis habent inverſum, & inter ſe ita colligantur, ut dato uno alterum neceſſario conſequatur.

Def. VI. Si exponens $z$ in quacumque ſerie arithmetica continua a $o$ incipiens diſponatur, exſurgit ſeries geometrica continua fluentium exponentialium, quæ erit convergens ſi $\frac{n}{m}$ ſit unitate minor: erit divergens ſi coefficiens ſit unite major.

Def. VII. Si exponens $z$ fiat $o$ fluens maxima in S A, minima in S Y $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{o} a$ fit æqualis protonumero, ideoque hoc nomine vocabitur: ſi fiat

$z = 1$,

$z = 1$, fluens $\left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{1} a$ dicetur basis: cæteræ fluentes determinato $z$ determinantur. At facta $z = \infty$, $\left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{\infty} a$ nihil aliud significat, nisi quod hæc nunquam potest determinari, neque ad ultimam magnitudinem produci.

Def. VIII. Series quæcumque geometrica continua quantitatum (in nostro casu linearium) decrescens vel crescens ad infinitum orta a formula generali M $= \left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{z} a$ dicetur a nobis systema exponentiale solitarium: utpote nulli systemati logarithmico conjunctum.

Def. IX. Via sive spatium ab exponentiali fluente motu æquabili, atque cum indefinita X Z communi percursum est illud, quod in Analysi vulgata *logarithmus* dicitur: qua denominatione in posterum & ipse utar, ne in novam mutata confusio enascatur.

Def. X. Spatium hoc ab exponentiali fluente percursum dicetur *fluxio arithmetica*: quia nihil influit in quantitatem geometricam, sed est tantum quantitatis geometricæ *vector*.

Def. XI. Hujusmodi fluxio a formulis §. 20. Cap: XI. expressa, quæ ad hanc reducuntur $x = \frac{p}{1} . \pm f$ erit formula generalis, a qua si loco $p$ successive ponantur termini seriei cujusvis arithmeticæ abstractæ a $o$ incipientis, oritur *systema logarithmicum solitarium*: utpote ab exponentiali omnino distractum.

§. 48. Quare tam systema exponentiale fluentis M $= \left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{z} a$, quam systema logarithmicum fluentis $x = \frac{p}{1} . \pm f$ sunt natura omnino diversa, ac nullo communi vinculo inter se consociata, utpote generis diversi; tamen aliqua lege inter se conjungenda sunt, ut data quantitatis geometricæ fluxione, eruatur spatium ab ipsa percursum sive logarithmus: & contra data fluxione arithmetica sive mensura spatii ab ipsa percusi (sive demum logarithmo) flu-

xionis geometricæ quantitas habeatur. Hoc vero vinculum nulla faciliori aut elegantiori ratione obtineri potest, quam si loco exponentis $z$ numeri abstracti, ponatur $\frac{x}{\pm f}$, numerus quidem abstractus, sed qui denominatore $\pm f$ ad libitum sumpto determinat protonumerum systematis logarithmici, qui ductus in coefficientem numericum fluentem exprimitur ab indeterminata $x$, quæ proinde divisa per $\pm f$ exhibet coefficientem numericum abstractum, qui est verus exponens fluentis exponentialis. Hinc

Def. XII. *Systema integrum exponentiale* erit systema compositum ex systemate exponentiali atque logatithmico ita ut & valor, quo afficitur fluens geometrica exponentialis, & spatium ab ipsa descriptum (sive logarithmus) simul uno eodemque tempore determinetur. Itaque formula $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} a$ erit formula generalis *systematis integri exponentialis*: cujus exponens $\frac{x}{\pm f} = \frac{p}{1}$ dabit $x = p . \pm f$, quæ est formula generalis *systematis logarithmici solitarii*: dummodo advertas quæ diximus §. 14., quod scilicet exponens $\frac{x}{-f}$ semper positivus sumendus est, cum sit $\frac{x}{-f} = \frac{p . -f}{-f} = \frac{p}{1}$, & $x = \frac{p}{1} . -f$ distantia fluentis a protonumero, sed in opposita plaga sumpta. Nam si fiat $x = o\, f$; $\frac{x}{f} = \frac{o . +f}{+f} = \frac{o . -f}{-f} =$ C determinabit punctum quietis G (*Fig.* 2.) in quo primum consistere supponitur fluens generalis $M = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{\pm f}} . a$, ac simul in hoc situ ejus valorem $= \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{o f}{f}} . a$ æqualem protonumero $a$ =

$= AB : x = 1 . \pm f$ oſtendit fluentem exponentialem a puncto C per ſpatium $f = C 1 C$ vel $- f = C 1 c$ digreſſam ad valorem $((\frac{n}{m})^{\pm 1})^{\frac{1}{1}}$ a fluendo perveniſſe, & ſic ſucceſſive: ita ut exponens hujuſce formæ $\frac{x}{\pm f}$ & valorem fluentis exponentialis & ſpatium ab ipſa a protonumero percuſum, cæteris intactis manentibus, quæ arbitrio ſemper relinquuntur, determinabit. Diſtantia $\pm f$ a baſi in eodem ſyſtemate conſtans eſt, utpote protonumerus formulæ $x = \frac{p}{1} . \pm f$ ſyſtematis logarithmici: cæteræ diſtantiæ minores ipſa majoreſve fluentes ſunt, cum ſint productum coefficientis numerici abſtracti $\frac{p}{1}$ in diſtantiam conſtantem $\pm f$ baſis a protonumero.

§. 49. Def. XIII. *Syſtema exponentiale continuum* illud eſt, quod exhibetur a quacumque ſerie geometrica fluentium exponentialium, quarum exponentes ſucceſſive conſtituunt vel ſeriem numerornm naturalium $\frac{0f}{1f}, \frac{1f}{1f}, \frac{2f}{1f}, \frac{3f}{1f} \ldots \frac{\infty f}{1f} \ldots$, vel $\frac{0.-f}{1.-f}, \frac{1.-f}{1.-f}, \frac{2.-f}{1.-f}, \frac{3.-f}{1.-f} \ldots \frac{\infty.-f}{1.-f}$ ſingulis denominatore 1 diviſis, vel eamdem, ſed denominatore $b$ ad libitum ſumpto unitate majori, ut $\frac{0f}{bf}, \frac{1f}{bf}, \frac{2f}{bf}, \frac{3f}{bf} \ldots \frac{bf}{bf}$, vel $\frac{0.-f}{b.-f}, \frac{1.-f}{b.-f}, \frac{2.-f}{b.-f}, \frac{3.-f}{b.-f} \ldots \frac{b.-f}{b.-f}$ utpote a continua ſerie arithmetica ſyvematis logarithmici derivatam. Prima ſeries inſiſtit punctis datis primi generis §. 13. Cap: XI, & §. 9. hujus, quæ manente protonumero $\pm f$ fluxionis arithmeticæ, neceſſaria ſunt, atque ideo & fluentes ſeriei in hiſce punctis erunt neceſſario determinatæ. Fluentes vero ſecundi generis indeterminatæ cenſendæ ſunt in ſingulis illis punctis, quæ inter puncta primi generis interjacent.

Coroll. Si $b$ eſt numerus impar §. 18. Cap: XI numerus mediarum ſecundi generis inter duas primi generis interjacentium eſt par; impar vero ſi $b$ ſit par. Ergo in primo caſu manente eodem denominatore $b$ nequit haberi media exponentis paris, niſi denominator $b$ duplicetur, & a diviſione protonumeri $f$ in partes impares $b$ diviſi ad diviſionem $2 b$ tranſitus fiat. At in ſecundo caſu ſi denominator $b$ uno, ant pluribus factoribus conſtet imparibus, a mediis ex-

exponentis paris ad medias imparis toties devenitur, quot factores impares in denominatore $b$ reperiuntur. Hoc animadvertiſſe multum aliquando conferre ſenties in æquationum ſolutione.

Def: XIV. Linea illa continuata quæ per extremitates fluentium cujuſcumque ſyſtematis *integri* & *continui* tranſit dicitur *Locus geometricus* ejuſdem ſyſtematis.

Def. XV. Locus hic geometricus in caſu limitum §. 42. (Fig: 12.) eſt linea recta: in cæteris caſibus eſt linea Curva quatuor hinc inde a protonumero ramis ad infinitum excurrentibus conflata ut *Fig.* 2.ª oſtendit, quorum bini convergentes ab utraque parte ſimiles & æquales dant Locum geometricum fluentium S A; bini divergentes Locum geometricum fluentium S Y. Curva hæc ab Analyſi vulgata *Logiſtica* ſive *Logarithmica* appellatur. Quantum vero hæc noſtra diſtet a communi facile quiſquis comparatione facta poterit judicare.

§. 50. Def. XVI. Curvæ Logiſticæ *ſpeciem* mutari diximus, ſi manente eadem diſtantia (ſive logarithmo) baſis a protonumero, & ejuſdem baſis coefficiente, mutetur tantum protonumerus.

Fluentes enim homologæ in Logiſticis diverſi tantum protonumeri, quæ ſunt in ratione horum conſtanti, ad eamdem Logiſticam reduci poſſunt, ut docent §. §. 33, 34 Fig: *6*.

Def. XVII. Naturam vero Logiſticæ ſive ſyſtematis exponentialis tunc mutari dicemus, cum mutatur coefficiens baſis tantum, vel logarithmus baſis, vel uterque.

Excipe tamen eam mutationem, quæ pendet ab inverſione coefficientis baſis, quæ nihil omnino nec naturam nec ſpeciem Logiſticæ §. 8. immutat. Ex quo colligitur intimam, quam inter ſe habent conjunctionem duo ſyſtemata homologa S A, S Y, quæ punctis communibus limitis A & B ad eamdem Curvam continuam pertinent, cum idem omnino ſyſtema integrum exponentiale continuum utriſque conveniat.

Def. XVIII. Linea quæ protonumerum bifariam & normaliter ſecans Curvam in quatuor ramos hinc inde reſpective ſimiles & æquales dividit, dicitur axis. Hic vero reſpectu ramorum convergentium aſſymptoti naturam induit, cum hos ramos ob rationem geometricam, in qua decreſcunt fluentes nunquam cum axe concurrere poſſe jam §. 35 demonſtravimus.

Def. XIX. Axis hic eſt *Locus geometricus* ſyſtematis logarithmici $x = \frac{p}{1} \pm f$ cujus munus eſt indicare ſitum, quem occupat ſingula fluens ſyſtematis exponentialis ab alterutra parte puncti C.

§. 51. Prop. I. Fluens exponentialis $M = \left( \left( \frac{\frac{n}{m}}{1} \right)^{\pm 1} \right)^{\frac{x}{\pm f}} . a$ ſemper differen-

tiam

tiam fluentium homologarum in S A, & summam inversa fractione $\frac{n}{m}$ repræsentat: nunquam fluentis solitariæ naturam induere potest. §. 8. Coroll. 2, §. 13. Prop. II. Ante systematis integri determinationem uni dato numero quivis logarithmus aptari potest: & viceversa uni logarithmo quivis numerus aptari potest. §. §. 27, 28. Verum Prop. hæc sequentibus est confirmanda & illustranda. Ac primum notandum nomine *numeri dati*, quando agitur de fluentibus exponentialibus, intelligendum hujusmodi numerum prius conformatum fuisse in fluentem exponentialem alicujus systematis, de cujus forma tantum universim solliciti simus oportet, ut naturam sui systematis cognita fluentis propositæ affectiones, assequamur: quam conditionem necessariam esse diximus fluentibus simplicibus, ut systema, ad quod pertinent, prius determinetur. Cum enim per Def. VIII quæcumque fluens exponentialis constare debeat ex producto coefficientis basis exponente numerico fluente affecti in protonumerum constantem; nulla fluens exponentialis dici poterit *data* nisi prius ad eam formam, quam necessario sumere debet, ut vere exponentialem naturam induat, reducatur. Si enim quivis numerus datus ( puta 2 ) abstracte sumptus tamquam fluens exponentialis proponatur, hic nisi reducatur ad eam formam, quam diximus fluentes exponentiales requirere, tantum abest ut *datus* quoad formam censendus sit, ut plerumque non nisi approximatione ad aliquam basim exponentialem reduci posse §. 43 animadvertimus.

Hoc intellecto si sumatur fluens exponentialis $M = \left( \left( \frac{\frac{n}{m}}{1} \right)^{\pm 1} \right)^{p} a$ hæc quoad formam data censenda erit ( & etiam quoad valorem si $p$ ad libitum determinetur, ut pote ( Def. VIII ) determinata ad systema exponentiale solitarium, in quo habetur basis & protonumerus, sed logarithmus omnino indeterminatus est. Porro hæc est illa fluens exponentialis data ( vulgo numerus ille datus ) cui quemvis logarithmum aptari posse sic demonstro.

Ex Def. XI. constat systema logarithmicum solitarium ab una generali formula $x = \frac{p}{1} . \pm f = \frac{p}{1} . \pm p = \frac{p}{1} . \pm h$ . . . . pendere: atque ideo exponens numericus $p = \frac{x}{\pm f} = \frac{x}{\pm g} = \frac{x}{\pm h}$ . . . . prout distantia basis a protonumero arbitrio sumatur $= \pm f$, vel $= \pm g$ . . . &c. Igitur in formula loco exponentis $p$ quævis ex istis $\frac{x}{\pm f}$ &c. poni potest ad integrum ( Def. XII ) sy-

stema

ſtema exponentiale conſtituendum. Erit igitur $M = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; p}\right).a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; \frac{x}{\pm f}}\right).a$

$= \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; \frac{x}{\pm g}}\right).a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; \frac{x}{\pm h}}\right).a \; \ldots\ldots\ldots$ ſed $L\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; p}\right).a =$

$x = \frac{p}{1}. \pm f$ vel $= \frac{p}{1}. \pm g$, vel $= \frac{p}{1}. \pm h$ &c. ad infinitum: ergo

hujuſmodi logarithmi unius fluentis $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; p}\right)a$ erunt inter ſe in ratione

protonumerorum $f, g, h \ldots$ &c. Patet igitur Prima Prop.[is] Pars. Prop. Pars Secunda vero ſic demonſtratur: ſumatur formula exponentialis §. 42.

*Fig.* 12, $M = \frac{1'}{1}^{\frac{x}{f}} . a$, & loco $1'$ ponatur quævis fractio minor aut major

unitate, & loco $a$ quivis protonumerus eodem ſemper manente $\frac{x}{f}$: in hoc

caſu mutatur quidem ſyſtema ſolitarium exponentiale, ſive Logiſticæ baſis ac protonumerus, ſed idem ſemper manet in ſingulis ſyſtema ſolitarium logarithmicum $x = pf$. Erit itaque $L\; \frac{1'}{1}^{\frac{x}{f}} . a$

$= L\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1\; \frac{x}{f}}\right).b \ldots$ &c. $= x = \frac{p}{1} f$: ergo infinitis fluentibus

exponentialibus idem logarithmus aptari poteſt: quæ eſt ſecunda Prop. Pars. Male igitur in primo caſu ex æqualitate fluentis exponentialis deduceretur æqualitas logarithmi: in ſecundo caſu vero ex æqualitate logarithmi falſo argue-

gueretur æqualitas fluentium exponentialium: quod diligentiſſime eſt advertendum, ne in hunc errorem, in quem vulgo ſæpe labitur, offendatur.

§. 52. Prop. III. Determinato ſyſtemate *integro* cuicumque numero unus tantum logarithmus convenire poteſt. §. 44.

Determinato enim ſyſtemate determinatur exponens ſuffigendus communi baſi $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1} a$, ut habeatur numerus propoſitus. At determinato exponente determinatur logarithmus: ergo patet propoſitum. Prop. IV. Determinato ſyſtemate integro, eodem logarithmo plures numeri neceſſario afficiuntur.

Vidimus enim §. 17 eumdem ſitum in Logiſtica occupare tam differentiam & ſummam fluentium, quam fluentes homologas ejuſdem differentiæ vel ſummæ: ergo eodem logarithmo ſingulæ præditæ ſint oportet.

Prop. V. Quævis fluens exponentialis cujuſvis exponentis non ab alia origine ortum ducit, quam ab ea una & individua linea ſibi uni comparata, quæ a maximo vel minimo limite digreſſa, ratione ſui fluxus, qui ejus exponentem determinat, ad eam poteſtatem evehitur, quam requirit ejus exponens fluendo creſcens vel decreſcens. In toto enim hoc Capite fluentium utriuſque ſyſtematis affectiones ab uno exponente ipſis ſuffixo deduximus, quin ulla mediæ cum extremis comparatione facta ad ejus valorem aſſequendum radicis extractione indigeremus; aut tertiam, vel quartam geometricam a producto mediarum per primam diviſo derivare cogeremur. Hinc nullus tranſitus a natura ad naturam, a dimenſione ad dimenſionem ope extractionis radicis, aut primi termini diviſione, ut inde ad primam naturam & dimenſionem fluens reducatur: comparatio nulla inter poſitivum & negativum, ob quam mediæ imaginariis inficiantur; tertiæ vero a poſitivo ad negativum, & ab hoc ad negativum iterum contra naturam fluxionis ſucceſſivæ rapiantur. Signum enim negativum non coefficienti numerico applicandum, ſed protonumero $a$, qui ſemper idem & conſtans eſt, præfigendum, ſi ad diverſam fluentium plagam fieri lubet translatio.

§. 53. Prop. VI. Nulla fluens, nullum ſyſtema exponentiale legitime inſtitutum natura ſua poteſt eſſe imaginarium.

Syſtema imaginarium non aliunde ex doctrina communi originem trahit niſi à coefficiente baſis $-\frac{n}{m}$ negativo, ſub exponente $\frac{1}{b}$ comprehenſo, poſito $b$ numero pari, ut ſit fluens $M = \left(-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{b}} a$. Sed coefficiens nega-

tivus per §. 14 Coroll. 3 $-\left(\frac{n}{m}\right)$ nunquam afficitur exponente $\frac{1}{b}$; ergo nulla fluens imaginaria, nullum systema exponentiale. Quævis enim fluens $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)a$

$$=\left\{\frac{\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2}-\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}}{\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}}\right\}a,$$ & posito $-\frac{n}{m}$ negativo,

$$=\left\{\frac{\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}-\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2}}{\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}+\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2}}\right\}a=\left\{\frac{-\left(-\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{2}+\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2}\right)}{\frac{\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)\right)}{2}+\frac{\left(1+\frac{n}{m}\right)}{2}}\right\}.\ t\ a$$

$$=\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right).-a:$$ & fluens $M=\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)a=\left\{\frac{\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}}{\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}-\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}}\right\}a$

& posito $-\frac{m}{n}$ negativo, $=\left\{\frac{\frac{\left(-\frac{m}{n}+1\right)}{2}+\frac{\left(-\frac{m}{n}-1\right)}{2}}{\frac{\left(-\frac{m}{n}+1\right)}{2}-\frac{\left(-\frac{m}{n}-1\right)}{2}}\right\}a$

=

$$=\left\{\frac{-\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}-\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}}{-\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}}\right\}.+a=\left\{\frac{\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}}{-\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{m}{n}+1\right)}{2}}\right\}.-a$$

$$=\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right).-a.$$

Quare nullus feriei terminus imaginarius, nullum fyftema: cum fignum negativum non nifi protonumero $a$ applicari poffit, diverfam tantum fluentis pofitionem indicante.

§. 54. Prop. VII. *Logarithmus nullus*, fyftema nullum Logarithmicum poteft effe imaginarium.

Logarithmus ( Def. IX ) non eft nifi via ab aliqua fluente exponentiali a puncto quietis peragrata; & fyftema Logarithmicum ( Def. X ) non eft nifi feries arithmetica ordinata illius viæ in hac æquabili fluxu fucceffive emenfæ. Porro fpatium hoc non nifi per vim, ac contra rectæ rationis fenfum, imaginarium ( fi abfurdum dicas ) ne mente quidem unquam comminifci poteft. Quod fi a me quæras qua potiori cauffa Analyftæ imaginarium hoc ita intime etiam logarithmis fluentium aliquando inhærere docuerint, ut nullo artificio in aliquibus circumftantiis tolli poffit; fidenter dicam malum hoc a quantitatibus geometricis ex male præoccupata figni negativi notione ad logarithmos etiam ex una ignoratione veræ notionis, quæ dicitur *logarithmus*, perniciofa contagione manaffe. Si enim univerfim receptum fuiffet, nomine *logarithmi* nihil aliud intelligendum effe, nifi fpatium quod percurfum, aut percurrendum concipitur a quavis quantitatis natura a puncto aliquo quietis fe movente, fieri nequaquam potuiffet, ut hoc etiam fpatium, quod ad fummum nullum licet concipere, eadem imaginarii labe, qua fluentes geometricæ, inficeretur. Evidentiffime enim patuiffet nullo modo fpatium abftracte fumptum ( quod non indicat nifi viam, quam percurrere concipitur etiam quodvis abfurdum, fi dari poffet ) & ipfum abfurdum fieri poffe, cum imaginarium hoc non fpatio percurfo aut percurrendo, fed rei imaginariæ, quæ moveri concipitur, ad fummum tribui poffet. Logarithmus enim vicem gerit abfciffæ realis illius Curvæ, cui ex doctrina communi refpondent ordinatæ imaginariæ exponentiales.

§. 55. Hifce Definitionibus atque Propofitionibus prima & maxime neceffaria principia ad naturam fluentium exponentialium atque earum logarithmorum cognofcendam concluduntur: quorum ope Problemata ad hujufmodi fluentium ex-

exponentialium affectiones determinandas, & ad usum traducendas, solvuntur: inter quæ præcipua sunt sequentia

Problema I. Data quacumque serie arithmetica abstracta ejus systema *integrum* & *continuum* exponentiale generaliter invenire, & ad constructionem geometricam universim præparare.

Propopofita sit series arithmetica abstracta $\frac{3}{h}$, $\frac{5}{h}$, $\frac{7}{h}$, $\frac{9}{h}$, $\frac{11}{h}$, $\frac{13}{h}$ ...... quæ primum Cap. XI. §. 37. & seqq. reducenda est ad systema Logaritmicum *continuum* ope seriei $\frac{0}{h}$, $\frac{1'}{h}$, $\frac{2}{h}$, $\frac{3'}{h}$, $\frac{4}{h}$, $\frac{5'}{h}$, $\frac{6}{h}$, $\frac{7'}{h}$ ...... $\frac{h-1}{h}$, $\frac{h}{h}$ ... ex qua eruitur primum seriei propositæ terminum $\frac{3}{h}$ esse in ordine quartum seriei continuæ tot mediis datis secundi generis inter datas primi generis $\frac{0}{h}$, $\frac{h}{h}$, $\frac{2h}{h}$, $\frac{3h}{h}$ ... interjacentibus quot unitates in $h-1$ continentur. Series proposita igitur incipiens a termino quarto $\frac{3}{h}$ seriei continuæ conflatur ex terminis, qui alternatim æquantur terminis seriei continuæ jam inventæ. Si vero singuli seriei continuæ termini ducantur in protonumerum sive spatium $f$ arbitrio sumptum, exhibent distantias respectivas singulorum terminorum a puncto originis $\frac{0}{h}$ sibi invicem succedentium in systemate solitario logarithmico protonumeri $f$. Sed hujusmodi series ex demonstratis repræsentat seriem singulorum exponentium fluentium exponentialium in serie geometrica continua procedentium; ergo si hujusce seriei singuli termini successive suffigantur coefficienti limitis fluentis $\frac{1'}{1}\cdot a$ §. 42. *Fig.* 12. habebitur series geometrica generalis continua $\frac{1'}{1}^{\frac{0}{h}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \frac{1'}{1}^{\frac{1}{h}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \frac{1'}{1}^{\frac{2}{h}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \frac{1'}{1}^{\frac{3}{h}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \frac{1'}{1}^{\frac{4}{h}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a$ ... $+ \frac{1'}{1}^{\frac{h}{h}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \frac{1'}{1}^{(1+\frac{1}{h})\frac{f}{f}}\cdot a + \frac{1'}{1}^{(1+\frac{2}{h})\frac{f}{f}}\cdot a \ldots = AB + 1A1B + 2A2B + 3A3B + 4A4B \ldots + nAnB + (n+1)A(n+1)B + \ldots$; posito protonumero $AB = a$, & $CnC = f$ protonumero spatii emensi, sive logarithmo basis

basis $nAnB$. Si loco $\frac{f}{f}$ ponatur $\frac{-f}{-f}$ series geometrica fluentium in opposita directione procederet, facto $CnC = -CnC = -f$. Quare hoc artificio habetur systema *integrum* continuum exponentiale atque generale sub se continens quot systemata exponentialia partialia excogitari possunt, & a quo nullo negotio separatur systema exponentiale a logarithmico, utroque in solitarium converso. Insuper ex hac constructione eruitur Locus peculiaris singularum fluentium exponentialium in serie geometrica $\frac{1'}{1}^{\frac{3}{h}\cdot\frac{f}{f}} . a + \frac{1'}{1}^{\frac{5}{h}\cdot\frac{f}{f}} . a + \frac{1'}{1}^{\frac{7}{h}\cdot\frac{f}{f}} . a \ldots$ non continua, cujus exponentes in serie arithmetica non continua superius proposita $\frac{3}{h}$, $\frac{5}{h}$, $\frac{7}{h} \ldots$ progrediuntur. Peracta vero hac generali constructione si loco $1'$ ponatur quævis $\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}}{1}$, & loco $a$ quævis alia ad libitum collocetur in serie generali geometrica superiori, & loco $f$ quævis linea distantiam a puncto A indicans, obtinebitur systema exponentiale quæsitum, facile methodo superius demonstrata ad suam propriam Logisticam referendum.

§. 56. Sit ex: gr: $\frac{1'}{1} . a = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}}{1} . a$; $h = 5$, & series arithmetica $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{11}{5} \ldots$ &c. Series geometrica discreta huic respondens erit $\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{3}{5}\cdot\frac{f}{f}} . a + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{5}{5}\cdot\frac{f}{f}} . a + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{7}{5}\cdot\frac{f}{f}} . a + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{9}{5}\cdot\frac{f}{f}} . a \ldots$ quæ ut construatur reducenda est primum ad arithmeticam continuam series exponentium $\frac{o}{5} . \frac{f}{f} + \frac{1'}{5}\frac{f}{f} + \frac{2}{5}\frac{f}{f} + \frac{3'}{5}\frac{f}{f} + \frac{4}{5}\frac{f}{f} + \frac{5'}{5}\frac{f}{f} + \frac{6}{5}\frac{f}{f} + \frac{7'}{5}\frac{f}{f} + \frac{8}{5}\frac{f}{f} + \frac{9'}{5}\frac{f}{f} +$ &c. . . . qui sequenti modo dispositi dabunt seriem geo-

me-

metricam continuam protonumeri $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{0}\cdot a$, basis $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{1}\cdot a$, logarithmi

basis $f$, nempe $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{0}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{1}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{2}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{3}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a$

$+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{4}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{5}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{6}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{7}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a +$ &c. . . .

Series hæc continua eo modo, quo docuimus, ad Logisticam *Fig.* 12. referatur, in qua erit protonumerus $AC = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{o\frac{f}{f}}\cdot a$, basis Gg vel Hh $= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{1}\cdot a$ logarithmus basis $C\,5\,C = f$, qui dividatur in partes quinque: ex singulis istis partibus erectæ ordinatæ protonumero parallelæ dabunt primos sex terminos seriei continuæ a protonumero AB usque ad Gg vel Hh inclusive: & eodem modo continuata protonumeri divisione hujusmodi ordinatæ successive progredientes constituent seriem geometricam continuam superiorem ad infinitum productam. Proposita vero Series $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{3}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{5}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a$ $+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}_{\bar{1}}\right)^{\frac{7}{5}\cdot\frac{f}{f}}\cdot a + \ldots$ initium sumit a quarta in ordine post primam, cujus se-

ſecundus terminus recidit in $\left(\frac{(\frac{1}{2})^{\pm 1}}{1}\right)^{1} . a$ datam primi generis ſive baſim; tertius eſt ſecundus poſt baſim; quartus eſt quartus poſt baſim; quintus eſt primus poſt datam $\left(\frac{(\frac{1}{2})^{\pm 1}}{1}\right)^{2} . a$; ſextus fit conſtans $= \left(\frac{(\frac{1}{2})^{\pm 1}}{1}\right)^{3} . a$, & ſic ſucceſſive invenietur ſitus ſingularum fluentium exponentialium in Logiſtica jam deſcripta, quæ a propoſita ſerie geometrica exhibentur. Eodem modo invenietur ſitus, quem occupant ſinguli termini ſeriei geometricæ $\left(\frac{(\frac{1}{2})^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{6}{5}\frac{f}{f}} . a$ $+ \left(\frac{(\frac{1}{2})^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{11}{5}\frac{f}{f}} . a + \left(\frac{(\frac{1}{2})^{\pm 1}}{1}\right)^{\frac{16}{5}\frac{f}{f}} . a \ldots$ in qua differentia conſtans axponentium eſt 5, atque ideo termini ſinguli inter ſe diſtant intervallo $\frac{5}{5} f = f$, quorum primus cum ſit primus poſt baſim, cæteri ſubſequentes ſemper erunt fluentes ſive dati ſecundi generis, neque unquam nullus in datum primi generis recidet, quia nullus exponens hujuſce ſeriei ad integrum reduci poteſt.

§. 57. Hîc non eſt omittendum nos §. 40 innuiſſe toties mutari logarithmum ejuſdem exponentialis ex: gr: $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{h}{h}\frac{f}{f}} . a$, quoties functio baſis $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}$ mutatur: ita L $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}\frac{f}{f}} . a$ qui eſt $x = \frac{p}{h} f$, ſi fluens eadem transformetur in $\left(\frac{(\frac{n}{m})^{\frac{1}{h}}}{1}\right)^{\frac{p}{1}\frac{f}{f}} . a$ afficitur logarithmo $x = \frac{p}{1} f$. Hoc revocato ſumatur nunc fluens ex-

exponentialis $M = \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\frac{p}{qb}\,\frac{f}{f}} . a$, & pofito $q$ numero quovis magno erit feries continua arithmetica exponentium qui refpondent fucceffive feriei geometricæ continuæ fluentium exponentialium, fequens $\frac{0}{qb}$, $\frac{1}{qb}$, $\frac{2}{qb}$, $\frac{3}{qb}$ . . . . $\frac{q}{qb}$, $\frac{q}{qb} + \frac{1}{qb}$, $\frac{q}{qb} + \frac{2}{qb}$, $\frac{q}{qb} + \frac{3}{qb}$ . . . . , $\frac{q}{qb} + \frac{q}{qb}$, . . . . $\frac{(b-1)q}{qb}$, $\frac{bq}{qb} = \frac{1}{1}$ & fecta *Fig.* 15 $C1C = \frac{1}{b} f$, hæc divifa in partes $q$ tot medias geometricas intra A B, & 1 A 1 B continebit, quot unitates in $q - 1$, ut diximus, reperiuntur: Simili modo totidem aliæ fluentes (ultima primæ divifionis excepta) continebuntur in divifione proximæ fequentis $\frac{1}{b} f$ $=$ 1 C 2 C, & fic fucceffive ufque ad ultimam divifionem $\frac{1}{2} f$ bafi G g vel H h $= \left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{qb}{qb}\,\frac{f}{f}} . a$; & fluentes geometricæ a protonumero $\left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{0}{qb}\,\frac{f}{f}} . a$ ufque ad bafim $\left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{qb}{qb}\,\frac{f}{f}} . a = \left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{1\,\frac{f}{f}} a$ inclufive erunt $bq + 1$. Nunc in locum bafis fyftematis $\left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{1} a$ fubftituatur bafis $\left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{qb}} . a$, in quo cafu feries exponentium eft feries arithmetica continua numerorum naturalium 0, 1, 2, 3, 4, . . . $q$, $q + 1$, $q + 2$, . . . $2q$ . . . $3q$ . . . $bq$, & feries geometrica fluentium eft eadem ac fuperior, fi valores fpectes, fed finguli fui termini infiftunt punctis datis primi generis, & quæ in primo cafu tota continebatur intra protonumerum & bafim, nunc extenditur & explicatur

uf-

usque ad distantiam $\frac{qb}{1} f$ a protonumero. Nam prima $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm 1 \frac{0}{qh} \frac{f}{f}} . a$

$$+ \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm 1 \frac{1}{qh} \frac{f}{f}} . a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm 1 \frac{2}{qh} \frac{f}{f}} . a \ldots + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm 1 \frac{q}{qh} \frac{f}{f}} . a = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm \frac{1}{qh} \frac{0}{1} \frac{f}{f}} . a$$

$$+ \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm \frac{1}{qh} \frac{1}{1} \frac{f}{f}} . a + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm \frac{1}{qh} \frac{2}{1} \frac{f}{f}} . a \ldots + \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\frac{1}{qh} q \frac{f}{f}} . a$$ secundæ; sed series logarithmorum primæ erit $\frac{0}{qb} f + \frac{1}{qb} f + \frac{2}{qb} f \ldots + \frac{1}{b} f$; secundæ vero erit $\frac{0}{1} f + \frac{1}{1} f + \frac{2}{1} f + \frac{3}{1} f \ldots + \frac{q}{1} f$: & sic continuata utraque serie quando maximus logarithmus primæ seriei erit $= \frac{qb}{qb} f = \frac{1}{1} f$, posita exponentiali $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm 1 \frac{qh}{qh} \frac{f}{f}} . a =$ basi, logarithmus fluentis $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm \frac{1}{qh} qh \frac{f}{f}} . a$ erit $= \frac{qb}{1} . f$ Quare si ponatur $q$ numerus quovis dato major in primo casu seriei geometricæ fluentes totæ spatio minimo $\frac{1}{qb} f$ inter se distantes intra limites quovis dato minores obstringuntur, in secundo casu indefinite explicantur, cum inter se distent singulæ distantia $f$, qua protonumerus distat a basi $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)\right)^{\pm \frac{1}{qh} \frac{1}{1} \frac{f}{f}} . a$. Hoc artificio series fluentium in eadem

Logiſtica poſſunt arbitrio intra quamvis diſtantiam minorem a protonumero concludi; vel ad quamvis diſtantiam majorem arbitrio explicari.

§. 58. Probl. II. Data differentia vel ſumma fluentium exponentialium Logiſticam deſcribere.

Differentia vel ſumma fluentium tunc ex §. 51. data dicenda erit, ſi utraque ſub ea forma concludatur, quæ vere convenit fluentibus exponentialibus utriuſque ſyſtematis Def: I. & II. indicata: atque ideo haberi poteſt differentia vel ſumma fluentium, quin habeatur diſtantia baſis a protonumero: hoc eſt per Def: VIII. data differentia vel ſumma haberi poteſt ſyſtema exponentiale *ſolitarium* utriuſque, quin habeatur logarithmus. Quare Problema hoc erit indeterminatum & infinitis ſolutionibus ſive Logiſticis obnoxium, niſi & logarithmus baſis determinetur, qui arbitrio ſemper relinquitur, cum quivis exponens fluentis $\left(\left(\frac{n}{m}\underset{1}{-}\right)^{\pm 1}\right)^{p} a$ idem maneat, ſi fiat $p = p\,\frac{f}{f} = p\,\frac{g}{g} = \frac{x}{f} = \frac{x}{g}$, & viceverſa logarithmus $x = pf = pg$ &c. Hoc vero etiam determinato determinata manet Logiſtica facile ex demonſtratis conſtruenda.

Probl. III. Data differentia vel ſumma fluentium exponentialium fluentes homologas invenire, ac Locum geometricum in Logiſtica integra jam deſcripta utrique proprium determinare.

Vide §§. 17., 18.

Probl. IV. Ex dato aliquo partiali loco geometrico alterutrius fluentis exponentialis proprio cæteras partiales homologas fluentes invenire, & integrum Locum geometricum ſive Logiſticam jam inchoatam perficere. Hoc eſt inverſum ſuperioris, & §§. 24, 25, 26 ſolvitur.

Univerſim prius ſyſtema *integrum* exponentiale ſtatuatur oportet, ut elementa ſingula, quæ ſimul concurrunt ad ſyſtema *integrum* conſtituendum determinata maneant: nempe differentia & ſumma fluentium, nec non ſingularum fluentium ſitus ac propterea logarithmus. Verum quoniam quæcumque baſis $\left(\frac{n}{m}\underset{1}{-}\right)^{1} a$ tranſmutari poteſt in fluentes cujuſvis exponentis $h$, vel $\frac{1}{h}$, facta $\left(\frac{n}{m}\underset{1}{-}\right)^{1} a$ $= \left(\left(\frac{n}{m}\underset{1}{-}\right)^{\frac{1}{h}}\right)^{h} a = \left(\left(\frac{n}{m}\underset{1}{-}\right)^{h}\right)^{\frac{1}{h}} a$, & quicumque exponens numericus $\frac{x}{f}$ in $p\,\frac{f}{f}$ =

$= p \frac{g}{g}$ &c. quorum utroque vel alterutro mutato, ſyſtema *integrum* mutatur & Logiſtica; erit ſemper in noſtra poteſtate ab uno ad alterum ſyſtema, ab una ad alteram Logiſticam tranſitum facere, & hoc indefinitis prope modis.

§. 59. Reſtat ut addantur hæc duo ſequentia Problemata, quæ per ea, quæ diximus §§. 2, 4, 5, 20, 46 nullo negotio ſolvuntur.

Probl. V. A differentia vel ſumma fluentium ſimplicium ad differentiam vel ſummam fluentium exponentialium tranſitum facere.

Probl. VI. A differentia vel ſumma fluentium exponentialium ad differentiam vel ſummam fluentium ſimplicium tranſitum facere.

Sufficit enim ad utrumque ſolvendum, ut elementum quod eſt in uno ſyſtemate fluens fiat conſtans, & viceverſa quod eſt conſtans fiat fluens. Ita in ſyſtemate fluentium ſimplicium coefficiens numericus, qui eſt fluens, ponatur conſtans & afficiatur exponente fluenti, & contra in ſyſtemate exponentiali coefficiens qui eſt conſtans, & exponens fluens, primus ponatur fluens, ſecundus conſtans, & in utroque tranſitus quæſitus obtinebitur.

Sit ex gr: $\left(\frac{5}{8}\right)^{\pm 1}_{\overline{1}} a$ differentia vel ſumma fluentium ſimplicium: prima orta a differentia fluentium ſimplicium S A $\frac{13}{13+3} a$, $\frac{3}{3+13} a$; ſecunda orta a ſumma fluentium ſimplicium S Y $\frac{13}{13-3} a$, $\frac{3}{13-3} a$, in quarum utroque ſyſtemate numeratores ſimplices ſunt fluentes ea lege, quam ſuperius ſtatuimus, a quibus pendet differentia vel ſumma fluens. Verum ſi ponatur $\left(\frac{5}{8}\right)^{\pm 1}_{\overline{1}}$ conſtans, & fiat $M = \left(\left(\frac{5}{8}\right)^{\pm 1}_{\overline{1}}\right)^{\frac{x}{f}} a$, poſito exponente $x$ tantum fluente, ſtatim ad fluentem exponentialem deferimur, dummodo $D d = \left(\frac{5}{8}\right)^{\pm 1}_{\overline{1}} a$, quæ (*Fig.* 2.) immota manebat in primo caſu, translata intelligatur ad diſtantiam C 1 C $= f$, ut baſis exponentialis officium aſſumat, & concludatur formula

 M =

$M = \left(\left(\frac{\frac{5}{8}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1f}{1f}} . a$, qua significatur basis, & universim $M = \left(\left(\frac{\frac{5}{8}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$.

Contra vero sit fluens exponentialis $M = \left(\left(\frac{\frac{5}{8}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{2f}{f}} a$ distans a protonumero per $2f$, quæ facta $= \left(\frac{\frac{25}{64}}{1}\right)^{\pm 1} a$ statim transit ad differentiam vel summam fluentium simplicium &c. Idem omnino obtinebitur si exponens sit fractus, & fluens sit ex: gr: $\left(\left(\frac{\frac{5}{8}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{1f}{2f}} . a = \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{8}}{1}\right)^{\pm 1} . a}$ : hac tantum differentia quod in hoc casu fluentes simplices nequeunt nisi ad formam fluentium Cap: IV. reduci, atque ideo semper differentiam vel summam repræsentant, neque ad unam tantum fluentem significandam conformari possunt ut licet in rationali $\left(\frac{\frac{5}{8}}{1}\right)^{\pm 1} a$, quæ in primo casu est fluens una $\frac{5}{5+3}\, a\, SA$; in secundo $\frac{8}{8-3}\, a\, SY$.

§. 60. Finem huic Capiti imponat Corollarium maxime generale, quo evincitur veritates omnes quas singillatim in superioribus Capitibus demonstravimus de fluentibus simplicibus homologis utriusque systematis SA, & SY ab intima natura fluentium exponentialium tamquam a communi origine derivare. Nam in toto hoc Capite, & præsertim §. 46. ostendimus protonumerum Logisticæ vere repræsentare maximam differentiam fluentium SA, ac simul minimam summam fluentium SY: ita ut uno eodemque tempore utraque systemata exponentialia homologa ab eadem limitis formula $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{o} a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{o} a$ necessario complectantur, a cujus evolutione Curvam Logisticam octo necessario ramis

ramis constantem oriri deduximus: ostendimus etiam §. 16. hujusmodi fluentes exponentiales singulas ab eadem limitis $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0} a$ continuo fluente proficisci, addendo exponenti *zero* exponentem quemvis fluentem, intacto manente protonumero $a$, ne a dimensione ad dimensionem abripiamur, ac cogamur fluentem quamvis non ab ejus fluxu, sed ex antecedentium analogia tamquam unam ex constantibus, ut vulgo fit, derivare. Hinc consequitur necessariam ac legitimam esse etiam $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{0+h} . a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0+h} . a$ : qua invictissime eruitur signum $=$, quo hujusmodi fluentes conjunguntur non perfectam æqualitatem fluentium significare, sed earum tantum intimam ac necessariam societatem (per quam has homologas appellavimus) significare. Quibus confirmatur quod ad ravim usque inculcavimus de hoc signo $=$ in P. I. hujus: ac semper magis evincitur veritas *Capp. superiorum*, ac præcipue illarum Propositionum, quæ de fluentibus exponente negativo $-1$ affectis Cap. VI. demonstravimus. His adde quod si ponatur $h = \infty$ ut sit $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\infty} a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\infty} a$, decrescit prima, crescit secunda usque ad infinitum. Sed hæc nunquam ad illum infinitum produci potest, ultra quod nequeat progredi; ergo & illa nunquam ad ultimum decrementum pervenire poterit, sive in absolutum *zero* evanescere. Quamobrem ex hisce principiis *Calculi exponentialis* mirifice confirmatur etiam intima ac necessaria conjunctio duplicis illius Methodi, quarum unam Methodum *absoluti zero*, *absoluti infiniti* alteram in Præf. P. I. appellavimus, & quicquid Cap. III. de hoc *infinito*, ac *zero* diximus.

CAP.



# CAPUT XIV.

*Principia Calculi Exponentialis & Logarithmici vulgo uſurpata ad examen vocanrur.*

§. 1. IActis in Capite ſuperiori primis *Calculi exponentialis* & *Logarithmici* fundamentis auxilio formulæ generalis $M = \left( \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}}{1} \right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ rite inſtitutæ, & traductæ ad eam, quam vere requirit, geometricam conſtructionem; quamque nobis nova hæc noſtra Theoria, primam ac immediatam fluentium ſimplicium utriuſque ſyſtematis a baſi immota evolutionem inveſtigans, concinnavit; res ipſa nunc jubet ut hac veluti face tenebras, quibus communis circa quantitates *exponentiales* & *Logarithmicas* doctrina offunditur, disjicere incipiam. In tanta vero multitudine ac varietate ſcriptorum, quæ de hac re ab initio hujuſce Sæculi, præeuntibus celeberrimis Viris Joanne Bernulli & Leibnitio uſque ad hæc recentiſſima tempora publice proſtant, ne in immenſum inquiſitio procedat, primas vulgo uſurpatas & univerſim receptas æquationes, quibus Calculus hic hactenus nititur, in hoc Capite excutiam, a quibus veritas aut falſitas horum, quæ ſequuntur, neceſſario pendet: atque hoc eo libentius facio, quod dum Elementa *Calculi finiti* inſtauranda mihi propoſueram, hæc ad quædam *Calculi differentialis* & *integralis* non minus gravia impedimenta obiter notanda me vel invitum trahunt, antequam communis omnium analyticarum Inſtitutionum ordo de iſtis ex compoſito agere jubeat.

§. 2. Equationes itaque generales, quibus tota Calculi hujuſce doctrina ſuperſtruitur, ſunt ſequentes I.ª $y = \left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot f$ : II.ª $dx = \frac{c\,dy}{y}$ : ac tandem III.ª $x = ly$; in quibus $f$ dicitur protonumerus, $e$ baſis ſyſtematis, $y$ numerus, $x$ logarithmus, $c$ ſubtangens. Ut ordine procedam, incipiam a I.ª $y = \left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot f$, quam æquationem vocant, quæ tamen non eſt niſi comparatio

tio identici cum identico, ut Cap: VII. §. 27. docuimus, qua ostenditur numerum quemvis $y$ & quoad valorem, & quoad formam & naturam omnino indeterminatum, eam formam suscipere debere, quam habet secundum membrum, ut exponentialis fluentis naturam referre, & ad Logisticam aptari possit. Ipsa vero secundi membri formula $(\frac{e}{f})^{\frac{x}{f}} . f$, a qua fluentem exponentialem repræsentare intelligunt, non satis recte instituta est, utpote quæ a non sua origine derivata, & a vero suo sensu detorta non legitime ad geometrica applicatur. Ut quod dico evidenter percipiatur, methodum, qua una utuntur, ad formulam exponentialem & logarithmicam concinnandam hic brevi perstringam necesse est. Sumptis duabus lineis geometricis quibuscumque datis $f$, $e$, quarum prima dicitur protonumerus, secunda basis, ad inveniendam tertiam geometricam hanc instituunt analogiam $f : e :: e : \frac{e^2}{f}$, quæ ideo erit $\frac{e^2}{f}$: & ab analogia $e : \frac{e^2}{f} :: \frac{e^2}{f} : \frac{e^3}{f^2}$ deducunt quartam, & sic successive: qua ratione continuata ad formulam generalem proveniunt fluentis exponentialis $y = \frac{e^z}{f^{z-1}} = (\frac{e}{f})^z f$, in qua $z$ est numerus abstractus fluens æqualis numero terminorum seriei dempta unitate. Ut vero ab exponentiali ad logarithmicam transitus fiat, docent ponendum $l\,y = z\,l\,e$, quæ est formula generalis fluentis logarithmicæ. In hac tamen ultima formula $l\,e$ omnino indeterminatus est, cuicumque lineari quantitati aptandus: qui ut determinetur ad $f$, facto $l\,e = f$, fiat $z\,f = x$, ex qua $z = \frac{x}{f}$, & posita $\frac{x}{f}$ loco exponentis $z$, formula exponentialis erit $y = (\frac{e}{f})^{\frac{x}{f}} . f$, a qua, facto transitu ad logarithmicam, $l\,y = \frac{x}{f} . l\,e = x = z f$. Hoc facto systema exponentiale cum logarithmico conjungitur, & ab alterutro ad alterutrum facilis patet aditus.

Universim tamen Analystæ fere omnes formula $y = (\frac{e}{f})^z . f$ utuntur, ex qua

$l\,y$

$l\,y = z\,l\,e$: ſed quoniam poſita primum $l\,y = z\,l\,e$, indeterminatus manet logarithmus baſis, qui rem accuratius tractant (inter quos Cel. Vincentius Riccati Inſt. &c.) hanc ſecundam $y = \left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot f$ amplexi ſunt, ut ſi primum exhibeatur formula logarithmica $l\,y = \frac{x}{f}\,l\,e$, innoteſcat logarithmus $f$ baſis $e$ ad determinandum ſyſtema exponentiale. Hæc eſt doctrina Analyſeos communis omnium Analyſtarum firmata conſenſu, qua nititur tota Theoria *Calculi exponentialis & logarithmici* uſu recepti.

§. 3. Nunc quæ contra hanc doctrinam a mea Theoria objiciuntur ſunt clare exponenda. Ac primum Analyſis communis in ſumendis duabus ſimul lineis datis $f$, $e$ initio ſtatim peccat: niſi enim alterutra per alterutram determinetur, atque ideo utræque ad eumdem protonumerum referantur, quæ ſit utriuſque natura, quæ vice protonumeri, aut baſis fungatur nullo modo determinari poteſt, ut ad unitatem ſyſtematis exponentialis perveniatur, in quo termini omnes fluentes, ut docet Cap. XIII. eodem protonumero afficiantur oportet: ut facto opus eſſe in utroque ſyſtemate fluentium ſimplicium *ſuperioribus Capp*: demonſtravimus. Nam cum hujuſmodi lineæ ponantur datæ, data etiam erit ratio, qua ſe ſe reſpiciunt, quæ ſit $f : e :: n : m$, ex qua eruitur $f = \frac{n}{m}\,e$; $e = \frac{m}{n}\,f$. Porro ſi fiat $f : e :: f : \frac{m}{n}\,f$, $f$ erit protonumerus, $\frac{m}{n}\,e$ vero baſis; quod ſi facias $f : e :: \frac{n}{m}\,e : e$, $e$ erit protonumerus, $\frac{n}{m}\,e$ baſis: ergo in primo caſu protonumeri $f : e :: f : \frac{m}{n}\,f$, in ſecundo protonumeri $e : f :: e : \frac{n}{m}\,e$: & analogia vulgo uſurpata $f : e :: e : \frac{e^2}{f} = \frac{m}{n}\,e$, in qua $\frac{e^2}{f}$ tertia poſt $f$, $e$, proportionalis falſo aſſeritur, nihil aliud indicat niſi primam rationem $f : e$ eſſe eamdem cum ſecunda $e : \frac{m}{n}\,e$, facta reductione lineæ $f$ ad protonumerum $e$: idem dicas de ſecunda $e : f :: f : \frac{f^2}{e}$

$=$

$= \frac{f}{e} f = \frac{n}{m} f$, translato $e$ ad protonumerum $f$: ut evidenter ostendimus Cap. X.

§. 4. Neque dicas ab ipsa analogia $f : e :: e : \frac{e^2}{f}$ satis indicari primum terminum $f$ esse protonumerum, $e$ basim: contra vero in analogia $e : f :: f : \frac{f^2}{e}$, $e$ vicem gerere protonumeri, $f$ basis. Nam producta more communi serie geometrica continua a prima ratione $f : e$ eruta invenies seriem

I.am $f, e, \frac{e^2}{f}, \frac{e^3}{f^2}, \frac{e^4}{f^3} \ldots$ & ex secunda $e : f$ II.a $e, f, \frac{f^2}{e}, \frac{f^3}{e^2}, \frac{f^4}{e^3} \ldots$

Reducatur nunc utraque ad utrumque protonumerum $f$, $e$; & erit

I.a reducta ad protonumerum $f$ sequens 1.a $(\frac{m}{n})^0 f, (\frac{m}{n})^1 f, (\frac{m}{n})^2 f, (\frac{m}{n})^3 f \ldots$

ad protonumerum $e$ sequens 2.a $\frac{n}{m} e, (\frac{m}{n})^0 e, (\frac{m}{n})^1 e, (\frac{m}{n})^2 e, (\frac{m}{n})^3 e \ldots$

Nam in 1.a $f = \frac{n}{m} e = (\frac{n}{m} . \frac{m}{n}) f = (\frac{m}{n})^0 f$; & in 2.a $e = \frac{m}{n} f = (\frac{m}{n} . \frac{n}{m}) e = (\frac{m}{n})^0 e$.

II.a reducta ad protonumerum $e$ dabit 3.am $(\frac{n}{m})^0 e, (\frac{n}{m})^1 e, (\frac{n}{m})^2 e, (\frac{n}{m})^3 e \ldots$

ad protonumerum $f$ dabit 4.am $(\frac{m}{n}) f, (\frac{n}{m})^0 f, (\frac{n}{m})^1 f, (\frac{n}{m})^2 f, (\frac{n}{m})^3 f \ldots$

posito $e = (\frac{m}{n} . \frac{n}{m}) e = (\frac{n}{m})^0 e$; & $f = (\frac{n}{m} . \frac{m}{n}) f = (\frac{n}{m})^0 f$, cum sit tam $f = ((\frac{m}{n})^{\pm 1})^0 f$, quam $e = ((\frac{m}{n})^{\pm 1})^0 e$.

Ergo in 1.a formula exponentialis generalis erit $y = (\frac{m}{n})^{z}_{\overline{1}} f$; in 2.a

 $y =$

$y = \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{z-1} e$; in 3.ª $y = \left(\frac{n}{m}\right)_{\bar{1}}^{z} e$; in 4.ª $y = \left(\frac{n}{m}\right)_{\bar{1}}^{z-1} f$. Itaque si in 2.ª & 4.ª loco exponentis $z-1$ ponatur $z$, quæ a *zero* successive per seriem $o$, 1, 2, 3, . . . progrediatur: vel in 1.ª & 3.ª ponatur $z-1$, & $z$ successive æqualis terminis seriei 1, 2, 3, 4 . . . ut in singulis seriebus geometricis primus terminus respectivo protonumero æquetur, invenies formulam generalem fluentis exponentialis $y = \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\bar{1}}^{\pm 1}\right)^{z} f$, & $y = \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\bar{1}}^{\pm 1}\right)^{z} e$, prout assumitur systema protonumeri $f$, vel $e$: quæ est formula generalis utriusque systematis exponentialis solitarii a nobis Capite antecedenti §. 47. Def. II.ª statuta. Quare Analysis vulgata antequam ad formulam exponentialem statuendam accessisset, datis duabus lineis geometricis, alterutram ad alterutram reducere prius debuisset, ut unitate protonumeri unitas systematis servaretur.

§. 5. Hoc tamen principium generale, quo naturam fluentium universim niti superius demonstravimus, ab Analysi communi prorsus ignoratum in caussa fuit, cur quævis fluens exponentialis, quæ non est nisi productum coefficientis numerici exponente $z$ affecti in linearem protonumerum, tamquam quantitas linearis ad eam dimensionem elevata reputetur, quæ ab exponente $z$ indicatur: quam proinde dividendam esse docetur per protonumerum ad potestatem unitate minorem elevatum, ut ad linearem iterum deprimatur. Hoc tamen artifitium nonnisi a Recentioribus Analystis, qui accuratius rem hanc tractarunt, in praxi positum fuisse §. 2. adverti: cæterum primi in hac Scientia Magistri fluentem exponentialem quantitatem geometricam illius dimensionis putarunt, quam exponens suffixus ostendit. Nam Joannes Bernulli in T. I. suorum Operum N. 36. (ut alios omittam) cui titulus *Principia Calculi exponentialium*, seu *percurrentium* aperte ait „ quantitatem elevatam ad potentiam indeterminatam vocabam *percurrentem*, quia omnes possibiles dimensiones quasi percurrit „: se tamen malle morem gerere Leibnitio, qui hujusmodi quantitates exponentiales appellavit: subdit enim: „ Quoniam vero *exponentialium* appellatio magno nostro Geometræ arrisit, in illius honorem, hoc alterum nomen „ & ego asciscam „. Quibus verbis & magis etiam ex ipsa *exponentialium* formula Auctoris (quæ est $y = x^{v}$) patet a primis Calculi exponentialis Auctoribus specie $x$ quamvis lineam geometricam indicari ad potestatem $v$ elevatam, quæ promiscue nomine *exponentialis* aut *percurrentis* designari poterit. Illud hic etiam tantum innuo Auctorem præclarissimum postquam advertit quantitates exponentiales esse diversorum graduum, subdidisse „ infimum esse quando exponens constat indeterminatis ordinariis ut $y^{m}$, $x^{n}$, $z^{p}$: posito $m, n, p$ esse quan-

„ quantitates ſimpliciter indeterminatas „ : $y$ vero, $x$, $z$ ejuſdem naturæ ac exponentiales fluentes ab Auctore conſtitui manifeſte eruitur a methodo, qua ad differentiandam quantitatem exponentialem primi gradus $m^n$ inferius pervenit: cum doceat $D\, m^n = m^n\, l\, m \,.\, dn + n \,.\, m^{n-1}\, dm$: cum tamen $m$ poſſe quidem eſſe numerum abſtractum indeterminatum cujuſvis valoris, ſed ſemel aſſumptum, tamquam conſtantem ſumendum eſſe in eodem ſyſtemate noſtra Theoria exponentialium primi gradus Cap: ſuperiori demonſtraverit.

§. 6. Quod ſi revocetur formula $y = (\frac{e}{f})^{\frac{x}{f}} . f$ a Recentioribus accuratius conſtituta, quæ linearem naturam ſemper ſervat; tamen quoties mutatur $f$ ſive protonumerus, aut $e$ baſis, mutatur etiam fractio $\frac{e}{f}$, quam tamen utpote coefficientem a protonumero omnino diſtractum nihil ab ipſo pendere jam Cap: ſuperiori oſtendimus, & conſtantem permanere, quæcumque ſit mutatio linearum $e$ & $f$. Subſtituto vero etiam in locum $\frac{e}{f}$ coefficiente $(\frac{n}{m})^{\pm 1}$, formula tamen nondum ad eam, quam requirit, perfectionem evecta eſt. Oſtendimus enim Cap. ſup. §. 8. coefficientem $\frac{n}{m}$ dividendum eſſe denominatore 1 ad ſignificandam differentiam fluentem fluentium in SA, ſummam in SY: quo facto formula $y = ((\frac{n}{m})^{\pm 1})^{z} f$ ſyſtematis exponentialis *ſolitarii* vere perficitur. Verum ſi, ut ſyſtema exponentiale cum logarithmico conjungatur, loco exponentis numerici $z$ ſuffigatur $\frac{x}{f}$ ad habendum ſyſtema integrum; formula hæc $y = ((\frac{\frac{n}{m}}{1})^{\pm 1})^{\frac{x}{f}} . f$ nos in errorem facile inducere poſſet. Jam enim Cap. ſuperiori demonſtratum fuit protonumerum $f$ applicatum coefficienti $\frac{n}{m}$ utpote lineam geometricam referentem longe diverſum a protonumero ſpatii a fluente

confecti, quo dividitur exponens $x$: quorum singuli proinde specie diversa sunt indicandi, ne ejusdem speciei identitate identitas etiam quantitatis intelligatur: quod recte provisum vides a mea formula $y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$, in qua potest quidem $a$ linea geometrica æqualis esse protonumero spatii $f$, sed utræque cum longe inter se differant natura & offitio, speciei diversitate notionis diversitas est indicanda. Ni enim hoc fiat, posito $f = o$, formula $y \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . f$ ambigua prorsus evadit: vel enim identitate ipsius $f$ convertitur in $y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{o}} . o$ $= \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p . o}{o}} . o = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{p} . o$: qua tam fluens geometrica quam spatium percurrendum fit *zero*, & Logistica in punctum annihilatur: vel est $y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{o}} . f$, & fluens exponentialis in prima positione immota manet: vel fit $y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . o$ & fluens est punctum lineam rectam indefinitam describens, ut Cap. superiori §. 41. advertimus. Quare ut recte & universim formula exponentialis conformetur, sub hac forma $y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ a nobis constituta efferendam esse liquido constat.

§. 7.

§. 7. Hac noſtra methodo in ſuas omnes partes reformata formula ſyſtematis exponentialis ex ſola ipſius inſpectione patet ſeriem quamvis fluentium exponentialium ab hac una $y = \left( \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}}{1} \right)^{\frac{x}{f}} . a$ derivare, determinatione tantum arbitraria coefficientis numerici $\frac{p}{1}$ fluentis $x = \frac{p}{1} f$, oſtendimus Cap. XII; quin ſumptis duabus lineis $f$, $e$ inſtituere cogamur analogiam, ob quam numeri omnes, vel tertii proportionales geometrici, vel medii neceſſario fiunt: quod perperam vulgo fieri Cap. ſup. §. 20. advertimus. Hinc re omni ad unam tantum formulam exponentis unius fluentis deducta, & ſublata comparatione inter duas quaſvis fluentes, tollitur etiam comparatio inter poſitivum & negativum: una enim & eadem fluens ſibi ipſi comparata ſemper poſitiva intelligenda eſt: quod ſi mavis negativam, ſemper negativa erit ſigno negativo protonumerum tantum $a$ afficiente. Hac una veritate imaginarium ſtatim evanuiſſet, & celebris illa quæſtio de *Logarithmis quantitatum negativarum* ab anno 1712. inter Joannem Bernullium & Leibnitium ad hæc uſque tempora tanto utriuſque partis ſtudio agitata ne oriri quidem, ne dum tamdiu perdurare potuiſſet. Quæ tamen donec Veterum veſtigiis inſiſtere in hac excutienda Recentiores obfirmato animo decreverint, nunquam tolli poterit: cum impotentia methodi, qua agitatur, ſit illarum una, quæ *per diſputationes* ( ut Baconis verbis utar ) *non ſolvitur ſed figitur & alitur*, ne dicam auctoritate Auctorum, qui ſubſequuti ſunt, in deteriorem partem convergi.

§. 8. Nam illud etiam deterius accedit ad falſam eorum opinionem confirmandam, qui logarithmos quantitatum negativarum imaginarios aſſeverant, quod male hæc conformata formula male etiam ad geometrica applicatur. Conſtituto enim ( Tab. VI. *Fig.* 2.) t T axe, & poſito protonumero C A, baſi 1 C H, Logiſticam unius tantum rami Q A H efformari autumant a ſerie ordinatarum poſitivarum reſpectivis abſciſſis C 1 C, C 2 C, C 3 C &c. inſiſtentium: cum tamen Cap. antecedenti §. 17. demonſtratum ſit ſeriem hanc fluentium exponentialium inter duos ramos convergentes A H, B h; & A G, B g divergentes contineri ex utraque protonumeri parte ad infinitum progredientes: quo probe intellecto nullus amplius Leibnitianis ambigendi locus relinquitur. Conſtat enim non poſſe ad unum tantum ramum Logiſticæ ordinatas traduci, niſi bifariam diviſas: qua diviſione oſtenditur non niſi partem Curvæ deſcriptam fuiſſe, quæ ſi perficiatur, ſtatim hinc inde ab axe æquales & ſimiles rami ſeſe offerunt, quibus Logiſtica vere completur. Quod ſi unus tantum ramus accipiatur, liberum erit, prout libuerit, alterutrum aſſumere, in quo caſu ordinatæ alterutrius rami reſpectu primi aſſumpti dici poterunt negativæ: & for-

mu-

mula $y = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot \pm a$ octo Logisticæ ramos singillatim exhibet, qui simul ordinate conjungendi sunt ad integram Logisticam describendam. Error igitur quo decepti reales logarithmos numeris negativis denegarunt ex duplici errore manavit: & ex eo quod inter positivam & negativam quantitatem comparatione male instituta mediam imaginariam offenderunt; & quod fluentem $\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$ tamquam unam & individuam ordinatam ab una tantum parte ita fluere arbitrati sunt, ut ex altera parte ordinatæ æquales omnino excluderentur. In hac tamen suppositione non video cur non potius imaginarietatem tribuerint ordinatis negativis, quam earum logarithmis, qui in eodem reali abscissarum axe continentur, & inserviunt ordinatis positivis: ut potius dicendum esset ordinatis negativis si in eadem Logistica cum positivis conciliari possent, eosdem logarithmos reales ac positivis realibus convenire.

§. 9. Verum quidem est Bernullii asseclas iisdem erroribus, quibus Leibnitiani, imbutos, suam licet veram sententiam contra adversariorum argumentum ab ipsa exponentiali formula petitum nullo modo tueri posse. Cum enim eadem simul falsa methodo tam ad quamvis mediam geometricam inter duas fluentes inveniendam, quam ad Logisticam describendam utantur; non video quo tandem modo sumpto protonumero positivo & basi negativa veteris Analyseos placitis insistentes mediam ab imaginarietate valeant liberare. Quocumqae enim artificio Alembertio morem gerentes ad se invicem quovis minimo spatio medias reales inter positivam & negativam quantitatem inventas concedamus; verum tamen semper erit Curvam ex parte negativorum genitam non esse Curvam continuam, sed punctis realibus conjugatis conflari inter ordinatas imaginarias interjacentibus. Senserat hoc acutissimus Co: Vincentius Riccati Bernullianæ sententiæ accerrimus fautor, qui proinde Epistola III.ª illius Opusculi „ Sopra i Logaritmi dei numeri negativi „ editi anno 1779 „ ait (ut ipsissimis verbis in latinum versis utar) „ ad demonstrandam Curvæ continuitatem ex „ parte $y$ negativarum opus foret basi logarithmicæ valòrem illum realem vel „ imaginarium tribuere, quo quantitas $\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{f}}$, posito $x$ quovis numero etiam „ irrationali, negativa evaderet „. Verum ingenue fatetur „ se putare formu- „ lam hanc inventu difficilem, & fortasse etiam *impossibilem* „: ac proinde cogitur ad methodum indirectam confugere ab Hyperbolæ quadratura desumptam,

ptam, quæ a ſpatiis hyperbolicis difficilioris indaginis longe petita ipſe ſua obſcuritate objectam difficultatem inexſuperabilem aliquo modo eluderet.

§. 10. Tamen ſi res hæc tota noſtra hac Theoria juſtiori tamquam trutina expendatur, patebit Leibnitianos ab ipſa formula generali $y = \left( \frac{\left( \frac{n}{m} \right)^{\pm 1}}{1} \right)^{\frac{x}{f}} . a$ bene ſtatuta ac recte ad geometrica applicata, qua una ipſi utuntur ad labefactandam adverſariorum ſententiam, argumentum in ſe ipſos ita validum contorquere, quo nullum gravius atque firmius ad ſuam ſententiam tutandam a Bernullianis inveniri poſſet. Nam tantum abeſt ut ex hac formula exponentiali unus tantum Logiſticæ ramus eruatur, ut re bene explorata, hoc unum & quidem loculentiſſimum ſatis ſit ad duplices Logiſticæ ramos neceſſario ſtatuendos. Quamobrem tota hæc tam celebris ac tantopere a ſummis Viris hinc inde exagitata quæſtio ex male ſtatutis principiis ab utraque parte receptis ortum habuit, a quibus proinde utpote ab ipſa mali cauſa ejus fruſtra enodatio quæri poterat: ut minime mirum videri debeat ſi ejus plena ſolutio noſtræ Theoriæ nunc demum reſervata fuerit, quæ una quid opus ad ejus ſolutionem obtinendam totius Analyſeos inſtauratione auſa eſt nec, ut credo, improſpere inveſtigare. Hoc quod dico ſi verum eſt, cætera a methodis ſublimioribus tanto calculorum & quidem *imaginariorum* apparatu hinc inde ab utraque parte allata cum in re, de qua agimus, per ſe corruant, nunc diluere ſuperſedeo in progreſſu Operis pro re nata excutienda.

§. 11. Majus negotium faceſſit formula differentialis vulgo uſurpata II. $dx = \frac{c\,dy}{y}$, in qua $dx$ eſt elementum ſpatii a fluente exponentiali percurſi, ſive elementum logarithmi: $c$ vulgo dicitur ſubtangens Logiſticæ, $y$ fluens exponentialis, $dy$ ejus elementum. Formula hæc, cum ejus ope inter abſciſſam & ordinatam (ut fit in finitis) relationem quamdam inveniri poſſe univerſim ſtatutum fuerit, æquatio differentialis dicitur: a qua tamen ad finitam cum methodo *integrationis* communi nullo modo tranſitum inveniri, nec inveniri poſſe experti fuerint, ad III.$^{am}$ confugere coacti ſunt, facto $x = l\,y$ in ſubt. $c$. Hæc tamen formula ut ad legitimam ſuam formam reducatur, explaneretur, & recte intelligatur, res eſt altius repetenda, & in naturam fluentium differentialium $dx$, $dy$ intimius perſcrutandam nunc primum, quantum res hæc exquirit, accedamus oportet. Memoria igitur revocatis quæ diximus Cap: XI. §§. 18., 19. noverimus poſito (Tab. VIII. *Fig.* 14.) $AB = f$ protonumero ſpatii, ſive logarithmo baſis non poſſe determinari intermedias fluentes niſi $AB$ dividatur in partes datas ex: gr: $b$, a qua diviſione habetur numerus mediarum determinatarum $b - 1$, & $b + 1$ numerus mediarum cum extremis: quod ſi dividatur $EG = AB = f$ in partes eaſdem $b$, ſitque $AE$

=

$= \frac{g}{1} f$ ex §. 20. ejuſdem Cap: erit $x = \frac{g}{1} f + \frac{\frac{p}{h}}{1} f$ formula generalis ſpatii a fluente emenſi, ſive ejus logarithmi. Quoniam vero numerus $\frac{g}{1} f$ eſt datus primi generis & neceſſarius, ponatur $x = \frac{g}{1} f + x$, ut ſit $x = \frac{\frac{p}{h}}{1} f$, quæ, facta $AE = \frac{g}{1} f$ diſtantia a protonumero, & ſumpta $EG = AB = f$ ac diviſa in partes numero $h$, quarum una $EF = \frac{\frac{1}{h}}{1} f$, fluens exponentialis inſiſtens puncto E erit $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{gf}{f}}$. $a$ data primi generis, quæ vero inſiſtit puncto F erit $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{(g+1\frac{1}{h})\frac{f}{f}}$. $a$ data ſecundi generis ut docuimus Cap. XII.

§. 12. Hoc poſito concipiatur $EF = \frac{1}{h} f$ diviſa in partes infinitas $q$, erit prima infiniteſima $dx = \frac{1}{qh} f$, ſecunda ab eodem originis puncto E profecta $dx = \frac{2}{qh} f$, & ſic ſucceſſive $dx = \frac{3}{qh}$, $f$ $\frac{4}{qh} f$ . . . uſque ad $\frac{q}{qh} f$. Singulas hujuſmodi differentiales vidimus omnino indeterminatas nec determinari poſſe ob denominatorem $qh$ infinitum: & $dx = \frac{p}{qh} f$ erit formula differentialis, qua oſtenditur elementum ſpatii $dx$ conſtare ex coefficiente numerico $\frac{p}{qh}$ ducto in protonumerum conſtantem $f$; numeratorem $p$ coefficientis eſſe fluentem; $h$ numerum finitum ac datum arbitrio ſumendum; $q$ nume-

merum infinitum absolute indeterminatum. Donec igitur concipitur $dx$ minima nunquam poterit determinari ob $q$ infinitum ductum in $b$: verum facta $x$ successive $= 0q, 1q, 2q, 3q \ldots pq$ statim $dx$ fit finita æqualis successive $\frac{0}{b}f, \frac{1}{b}f, \frac{2}{b}f \ldots \frac{p}{b}f$ sed fluens, quæ tamen successive poterit determinari fluente tantum $p$, & denominatore $b$ constanti & dato. Hoc vero obtinetur si formula $dx = \frac{p}{qb}f$ ab utraque parte multiplicetur per $q$, ut fit $qdx = Sdx = x = \frac{\frac{p}{b}}{1}f$: & $x$ absolute indeterminata determinatur ad fluentem $\frac{\frac{p}{b}}{1}f$. Fluens igitur a puncto E versus G, donec est minima, nunquam poterit determinari, licet sit $\frac{p}{qb}f$: sub hac tamen forma elata tunc determinatur facta $qdx = \frac{p}{b}f$, quoties determinatur $p$, & facto $p = b$, fluens $x$ fit maxima $= \frac{b}{b}f =$ EG occurrens puncto necessarie dato G, ex quo iterum fluens versus H novis punctis datis secundi generis eadem methodo poterit determinari, aucta $\frac{g}{1}f =$ AE per $\frac{1}{1}f =$ EG, ut fit in hoc casu $x = (\frac{g+1}{1})f + x = (\frac{g+1}{1})f + \frac{p}{qb}f$. Itaque posita universim formula generali $dx = \frac{p}{qb}f$, erit ejus integrale $Sdx = qdx = x = Q + \frac{p}{b}f$, sed ex: gr: in puncto E $x = \frac{0}{b}f$, & $Q = AE = \frac{g}{1}f$, ergo erit $Sdx = qdx = \frac{g}{1}f + \frac{p}{b}f$, sumpto puncto originis $x$ in puncto dato primi generis E. Si vero hoc punctum sumatur in A quo insistit maxima vel minima fluens exponentialis, tunc $g$ fit zero, & $Sdx = Q + \frac{p}{b}f = 0 + \frac{p}{b}f =$ AD.

§. 13. Hujusmodi $x = gf + \frac{p}{h}f$ si dividatur per $f$ dabit exponentem numericum fluentis exponentialis $y$ puncto F insistentis, quæ erit $y = \left(\left(\frac{\frac{n^{\pm 1}}{m}}{1}\right)\right)^{\frac{g}{1}+\frac{p}{h}\cdot\frac{f}{f}} \cdot a$.

Quod si fiat $y = \left(\left(\frac{\frac{n^{\pm 1}}{m}}{1}\right)\right)^{\frac{g}{1}+\frac{p}{qh}\frac{f}{f}} \cdot a$, hæc erit fluens exponentialis insistens puncto indeterminato $\frac{p}{qh}f$ infinite proximo puncto E: atque ideo ipsa fluens absolute indeterminata in exponente minimo $\frac{p}{qh}$ determinata est & quidem necessario in exponente $g$: quæ tamen facile determinatur in punctis secundariis facto transitu ab exponente minimo $\frac{p}{qh}$ ad finitum $\frac{p}{h}$, posito $p = 0, 1, 2 \ldots h$ eo modo, quo ab absolute indeterminata $dx = \frac{p}{qh}f$ fit transitus ad $\frac{p}{h}f$ finitam facile determinandam. Hinc fluentes minimæ $dx$ non possunt determinari nisi in puncto originis, in quo sunt absolute *zero*, & in ultimo puncto quando fiunt finitæ $qdx$. Verum donec sub hac nimis generali formula $qdx$ efferuntur, nullo modo possunt determinari, nisi in hanc convertantur $\frac{p}{h}f$, vel $\frac{p}{l}f$, vel $\frac{p}{1}f$ &c., prout divisio protonumeri $f$ in partes $h$, $l$, 1 &c. facta intelligitur, & prout ad libitum determinatur $p$: ac proinde naturam quidem vere fluentium in hanc secundam formam translatæ retinent intra tamen limites finitos constitutæ. Hac ratione ostenditur quomodo à denominatore infinito ad finitum transitus fieri possit, & quo modo quasvis medias rite liceat determinare: ut primæ notiones simplices quantitatum *differentialium*, earumque *integralium* clare & dilucide conciperentur; quibus difficultates illæ omnes contra *differentiales* $dx$, $dy$, &c. jam ab ortu *Calculi differentialis* allatæ, & nunquam pro dignitate solutæ, natura harum vere cognita, evanescunt: quod hîc innuere Cap. XI. §. 26. proposueram.

§. 15.

§. 14. Quamobrem & hîc diligenter est advertendum formulas $dx = \frac{p}{qh} f$;

$$x = \frac{g}{1} f + \frac{\frac{p}{h}}{1} f \,;\; y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g + \frac{x}{f}} . a \,;\; y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g + \frac{dx}{f}} . a$$

non esse, ut vulgo creditur, veras æquationes inter duas quantitates valore æquales, natura vero & forma diversas: sed eamdem quantitatem tam in primo, quam in secundo membro indicari, ut quæ in primo membro sub symbolo $dx$, $x$, $y$ omnino indeterminatæ sunt, determinentur quoad formam & naturam a secundo membro, a quo tantum earum affectiones, atque limites exhibentur ad constructionem legitimam consequendam: eo prorsus modo, quo efferendas diximus Cap: VII. fluentes simplices finitas, & Cap. *super.* exponentiales. Quare consequitur eadem methodo fluentes minimas omnino indeterminatas $dx$, $dy$ &c. ad eas formulas reducendas coefficiente numerico fluente, & protonumero constanti conflatas, quæ proinde non nisi ob rationem coefficientis minimi minimas fieri possunt. Leges vero, quibus hujusmodi differentiales in hæc duo elementa divisæ universim moderandæ sunt pro diversitate naturæ, qua afficiuntur, quando de his ex composito agemus, tradentur. Nunc hæc de hujusmodi differentialibus dixisse sufficiant ad rem, quam agimus, persequendam: & ut evidenter demonstretur huic *Calculo differentiali* & *integrali* non ita esse, ut sit, fidendum, quin prius iisdem principiis ex integro restauretur, quibus nova hæc Calculi finiti Theoria superstruitur.

§. 15. Hisce in antecessum explicatis ad sequentia intelligenda maxime necessariis, si habeatur analogia $y : x :: \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}\frac{f}{f}} . a : \frac{p}{h} f$, hæc nonnisi una & eadem est ratio duarum earumdem quantitatum, in quarum prima fluentes $y$, $x$ omnino indeterminatæ determinantur quoad formam & naturam ab iisdem fluentibus in secunda ratione collocatis. Quod idem est ac si quæratur quæ forma danda sit fluenti $y$ ut fluentem exponentialem significet, & quæ donanda fluenti $x$, ut suum logarithmum repræsentet: aliter $y$, $x$ quamvis aliam naturam indefinite suscipere quidem possent, sed nulla actu afficiuntur, atque ideo de ipsis nihil recte concludi potest. Sed harum natura ope secundæ rationis determinata, statim patet $y$ idem esse ac $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{h}\frac{f}{f}} . a$, & $x$ idem ac ejus

 lo-

logarithmum $\frac{p}{h}f$. Eodem modo est intelligenda analogia $y : dx :: \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{dx}{f}} . a : \frac{p}{qh} f$, in qua $y$ est fluens exponentialis $\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{dx}{f}} . a$ infinite proxima fluenti maximæ vel minimæ $\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{of}{f} = \text{prot. } a} . a$, & $dx = \frac{p}{qh} f$ distantia minima a protonumero. Quod si more communi, perinde ac si hujusmodi analogia quatuor quantitatibus diversis constaret eamdem rationem inter se habentibus fiat

$$dx = \frac{\frac{p}{qh} f}{\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}} . a} . y \quad 1.^{a}$$

, cum sit $y = \left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{h}\frac{f}{f}} . a$, erit $dx = \frac{p}{qh} f$ & ipsa identica, ut supra. Verum si hæc 1.ª æquatio sic efferatur

$$dx = f . \frac{\frac{p}{qh} y}{\left(\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}} . a}$$

ac ponatur $\frac{p}{h}\frac{y}{q} = dy$, invenies $dx = f \frac{p}{h} . \frac{dy}{y}$ 2.ᵃᵐ ex qua eruitur analogia $dy : dx :: y : f$. Hinc in Logistica PQ (*Fig.* 15.) protonumeri $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{of}{f}} . a$, logarithmi basis $f$, posita

AC

$AC = y = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} \cdot a$, & $AB = f$, & ducta CB, & sumpta CG

minima $= dy = \frac{p}{hq}\, y = \frac{p}{hq}\, \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} a$, æquatio 2.ª sequentem exhibet analogiam $y : f :: dy : dx$; sive $\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} a : f :: \frac{p}{qh} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} . a : dx$: & ad geometrica transitu facto $AC : AB :: CG : GH$: ergo GH

$$= dx = AB\,\frac{CG}{AC} = f \cdot \frac{p}{qh} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} \cdot a}{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} \cdot a} = f \cdot \frac{p}{qh} \quad 2.^a$$

*6. 16.* Equatio 1.ª $dx = \frac{p}{qh}\, f \cdot \frac{y}{y} = \frac{p}{qh}\, f$ est illa identica, quam probamus, quæ docet indeterminatam $dx$ sub forma $\frac{p}{qh}\, f$ efferendam esse, ut vicem subire possit logarithmi fluentis exponentialis exponentis $\frac{p}{qh}$. Æquatio vero 2.ª $dx = f\, \frac{p}{qh} \cdot \frac{y}{y} = f \cdot \frac{dy}{y}$ oritur ab analogia supra indicata inter quatuor quantitates diversas: & hæc est illa, qua Analysis vulgata utitur, si ponatur $f = c$ subtangens Logisticæ. Ex utraque tamen obtinetur vera forma elementi $dx$, dummodo loco $dy = CG$ ponatur $\frac{p}{qh}\, f$: hac tamen

dif-

differentia, quod in 1.º ſtatim habetur abſolute quid debeat eſſe elementum $dx$; ut ſit logarithmus fluentis $y = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{qh}\,\frac{f}{f}} \cdot a$. At in 2.ª a quatuor diverſis quantitatibus deducta, A C immota concipitur (atque ideo quæcumque ſit, conſtans manet) & ſumpto $AB = f$ logarithmo baſis, ſumitur ad libitum in immota & conſtanti A C portio quævis minima $\frac{p}{qh}$ ipſius A C, quæ ſi dicatur $dy$, erit $dx = f\frac{dy}{y}$: ſed in $\frac{dy}{y}$, $y$ ponenda eſt conſtans, atque ideo $\frac{dy}{y}$ eſt integranda eo modo, quo integrandam docet Analyſis communis formulam $\frac{dy}{b}$. Quare data $dx = f\,\frac{dy}{y}$, fiat hæc $= f\,\frac{p}{qh}\,\frac{y}{y}$, & erit S $dx = q\,dx = f\frac{q\,dy}{y} = f\frac{p}{b}\,\frac{y}{y} = f\,\frac{p}{b}$, ac tandem $= \frac{p}{b}\,f$, quæ recidit in 1.am Si comparetur hæc formula 2.ª cum illa communi $dx = c\,\frac{dy}{y}$, in qua ponitur $c$ conſtans & ſubtangens, hæ perfecte congruunt inter ſe facto $dy = \frac{p}{qb}\,y$, niſi quod in illa conſtans eſt $f$ logarithmus baſis; in communi ponitur conſtans ſubtangens $c$ (de qua infra §. ſeq.). Ergo eodem modo, quo integrandam diximus formulam 2.am eodem integranda eſt formula communis $dx = c\,\frac{dy}{y}$, cum utraque ab eadem analogia inter quatuor quantitates diverſas $AC : AB :: AG : AH$ eruatur, poſita $AB = f = c$.

§. 17. Verum ut hæc, quæ docet mea Theoria, placitis veteris Analyſeos prorſus oppoſita, gravioribus argumentis ſuffulta, magis in tuto collocentur, inveniamus primum oportet quæ ſit Logiſticæ ſubtangens in quovis puncto utriuſque ſyſtematis S A, S Y. Sit igitur ramus Logiſticæ tam aſcendens (*Fig. 16.*), quam deſcendens (*Fig. 17.*) P Q; logarithmus baſis $f$, & baſis in primo caſu $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} a$, in ſecundo $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$, ut ſit fluens exponentialis univerſim $y$

=

$= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$, vel $y = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$. Ex demonſtratis itaque erit (*Fig.* 16.)

$BD = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$; $BD = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ (*Fig.* 17.), & ſumpta huic infinite proxima CE erit (*Fig.* 16.) $CE = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}+\frac{dx}{f}} . a$; $CE = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}+\frac{dx}{f}} . a$ (*Fig.* 17.) poſita $BC = dx$. Ducatur per puncta D, E infinite proxima recta DEH donec ſecet axim in H, & DF parallela axi $= BC = dx$, invenies

(*Fig.* 16.) $CE - BD = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}+\frac{dx}{f}} . a - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}} - 1\right) = FE$;

(*Fig.* 17.) $BD - CE = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . a - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}+\frac{dx}{f}} . a = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . a \left(1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}\right) = FE$:

Ergo erit in utraque HB : BD : : DF : FE, ſive

(*Fig.* 16.) $HB : \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a : : dx : \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}} - 1\right)$

(*Fig.* 17.) $HB : \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a : : dx : \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} a \left(1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}\right)$. Ergo

(*Fig.* 16.)

$$(\textit{Fig. 16.})\ HB = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}}.\,dx}{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}-1\right)} = \frac{dx}{\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}-1} = \frac{\frac{p}{qh}f}{\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}-1};$$

$$(\textit{Fig. 17.})\ HB = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}}.\,dx}{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}}\left(1-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}\right)} = \frac{dx}{1-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}} = \frac{\frac{p}{qh}f}{1-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}}.$$

Verum ut H B ſit vere ſubtangens, ſit oportet H D E vere tangens, hoc eſt, oportet ut puncta E, D in unum coeant, ſitque $DF = BC = dx = \frac{o}{qh}f$; (facto vel $p = o$, vel $qh = \frac{1}{o}$, quod idem eſt); ergo in utroque caſu ſubtangens

$$HB = \frac{\frac{o}{qh}f}{\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{o}{qh}}-1} = \frac{\frac{o}{qh}f}{1-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{o}{qh}}},\ \text{ſive} = \frac{o}{o}f = f.$$

Ergo ſubtangens Logiſticæ erit quidem conſtans & eadem in ſingulis punctis (ut Analyſis communis docet) ſed inſuper erit ſemper æqualis logarithmo baſis $f$, ſive protonumero ſpatii percurſi aut percurrendi a fluente, ut mea Theoria nunc primum demonſtrat.

§. 18. Coroll. 1. Neque igitur HB ſubtangens revera fieri, niſi $dx = \frac{p}{qh}f$ fiat *zero abſolutum* ſive $p = o$, in quocumque puncto conſtituatur fluens expo-

ponentialis $\left(\left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$, quæ cum evanescat in formula subtangentis ut constans sumenda est, cum nihil influat ad variandam formulam $\left(\dfrac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}} - 1$ in prima; $1 - \left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}$ in secunda, cujus valor fluens pendet totus ab exponente minimo $\frac{dx}{f} = \frac{p}{qb}\,\frac{f}{f}$, qui *zero* factus subtangentem exhibet: quo evincitur tangentem non in duobus punctis infinite proximis Curvam secare sed in uno tantum & individuo puncto, ita ut elementum differentiale $dx$ non minimum, sed absolute nullum reputandum sit: atque insuper patet eamdem omnino constantem subtangentem in Logisticis omnibus reperiri, quicumque sit earum protonumerus, & basis; dummodo idem logarithmus $f$ basis servetur: formula enim superior, a qua subtangens eruitur, non nisi coefficiente numerico in logarithmum basis ducto constat, quæ in singulis Logisticis non fit fluens nisi ratione logarithmi $x$ fluentis; cæteris intactis manentibus.

Coroll. 2. Posita in utraque *Fig.* $BD = \frac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} \cdot a$ data primi generis, erit huic infinite proxima $CE = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a + \left(\dfrac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a \left(\left(\dfrac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}} - 1\right)$ (*Fig.* 16.) & $CE = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} a = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g} a \left(1 - \left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{dx}{f}}\right)$, (*Fig.* 17.): in quibus donec $dx$ est exponens infinitesimus $= \frac{p}{qb}$, tam $\left(\dfrac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}} - 1$, quam $1 - \left(\dfrac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}}$ coef-

ficiens numericus primus termini $\left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{m}{n}}}\right) a \left( \left(\underset{1}{\overset{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}}{\frac{m}{n}}}\right) - 1 \right)$; secundus termini $\left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{n}{m}}}\right) a$ $\left( 1 - \left(\underset{1}{\overset{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}}{\frac{n}{m}}}\right) \right)$ est & ipse minimus. Itaque posita, ut moris est, $\left( \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{m^{\pm 1}}{n}}}\right) \right) . a$ $= y$, & $dy = \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{m}{n}}}\right) a \left( \left(\underset{1}{\overset{\frac{p}{qh}}{\frac{m}{n}}}\right) - 1 \right)$ incremento minimo fluentis 2 C E infinite proximæ B D; & $dy = \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{n}{m}}}\right) a \left( 1 - \left(\underset{1}{\overset{\frac{p}{qh}}{\frac{n}{m}}}\right) \right)$ decremento minimo fluentis 2 C E infinite proximæ, erit in primo casu.

1.° $y + dy = \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{m}{n}}}\right) a + \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{m}{n}}}\right) a \left( \left(\underset{1}{\overset{\frac{p}{qh}}{\frac{m}{n}}}\right) - 1 \right) = \left(\underset{1}{\overset{g+\frac{p}{qh}}{\frac{m}{n}}}\right) a$; & in secundo

2.° $y - dy = \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{n}{m}}}\right) a - \left(\underset{1}{\overset{g}{\frac{n}{m}}}\right) a \left( 1 - \left(\underset{1}{\overset{\frac{p}{qh}}{\frac{n}{m}}}\right) \right) = \left(\underset{1}{\overset{g+\frac{p}{qh}}{\frac{n}{m}}}\right) . a$; atque ideo, quicumque sit numerus datus $g$, semper huic infinite proxima æque distabit ab hac si idem sit exponens minimus $\frac{p}{qb}$ : quo fluente tantum, aut hoc mutato ex: gr: in $\frac{p}{qK}$, mutatur ejus valor & distantia fluentis $\left( \left(\underset{1}{\overset{g+\frac{p}{qh}}{\frac{m^{\pm 1}}{n}}}\right) \right) . a$ a sua

in-

infinite proxima $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$ : ita ut si habeatur fluens $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{p}{qh}} . a$, & fluens $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{p}{qK}} . a$, hæ posito in utrisque eodem numeratore $p$, diverso modo distabunt ab eadem $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g} . a$ ob diversam divisionem logarithmi $f$, quæ in prima est $= qh$; in secunda $= qK$: atque ideo hujusmodi distantiæ, sive earum logarithmi erunt in ratione $\frac{p}{qh} : \frac{p}{qK}$, sive in ratione reciproca $\frac{1}{h} : \frac{1}{K} :: K : h$. Verum si mutetur tantum exponens $g$ datus, & iidem sumantur in utrisque exponentes minimi, fluens $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{p}{qh}} . a$ æque distabit a sua $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$, ac fluens $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{e+\frac{p}{qh}} . a$ a sua $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{e} . a$. Ergo in formula 1.ª & 2.ª mutato tantum exponente $g$ primi generis, habentur fluentes intermediæ æque distantes a suis respectivis exponentialibus primi generis, & $dx$ sive logarithmus minimus in singulis idem, si ejus origo a suo respectivo puncto dato initium sumere ponatur. Quod si referatur ad protonumerum $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{e} . a$, tunc logarithmo fluenti $\frac{p}{qh} f$ addendus est logarithmus $gf$, $ef$, &c. necessario datus exponentialis proximæ datæ primi generis, ut di-

diximus §. 12. ut sint $g\,f + \frac{p}{q\,h}\,f$ ; $e\,f + \frac{p}{q\,h}\,f$ &c. earum distantiæ a protonumero. Et hæc est ratio, cur in methodo communi integrata $d\,x$, fit $S\,d\,x = Q + x$ sive additur constans, quam tamen addendam esse, licet non integretur $d\,x$ hîc patet. Illud tantum observandum originem fluentis $d\,x$ a puncto priml generis dato sumendam esse, sine qua conditione nunquam nec exponentialis, nec ejus logarithmus poterit determinari. Quare eruitur $y$ in formula 1.ª & 2.ª semper fluentem exponentialem datam primi generis significare oportere.

§. 19. Coroll. 3. Si tam in formula 1.ª quam in 2.ª ponatur $g = o$, erit in 1.ª $y + dy = \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{o}{qh}}_{\bar{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{o}{qh}}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} - 1 \right) \right) a$, & in 2.ª $y - dy$

$= \left( \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{o}{qh}}_{\bar{1}} - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{o}{qh}}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right) \right) a$ ; & $y = \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\pm 1\,\frac{o}{qh}}_{\bar{1}} \right)$ in protonumerum est vera ejus forma, non 1. $a$ licet ejusdem valoris : & in 1.ª $dy = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{o}{qh}}_{\bar{1}}$.

$\left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} - 1 \right) a$ : & in 2.ª $dy = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{o}{qh}}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right) a$. In cæteris vero casibus $y = \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\pm 1\,g}_{\bar{1}} \right) a$, & in 1.ª $dy = \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} - 1 \right) a$; in 2.ª

$= \left(\frac{n}{m}\right)^{g}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right) a$. Quod si eadem formula sic disponatur, ut fit

in

in 1.$^a$ $y + dy = \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{o}{qh}} + \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{o}{qh}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}} - 1 \right) \right) \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} a$, & in 2.$^a$ $y - dy$

$= \left( \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{o}{qh}} + \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{o}{qh}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}} \right) \right) \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} a$, erit in hoc caſu protonumerus

reſpectivus $\left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1} \right)^{g} . a$, & fluens exponentialis $\left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1} \right)^{\frac{p}{qh}} . \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1} \right)^{g} a$ prima

infinite proxima protonumero $\left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1} \right)^{g} a$ diſtans ab hoc per ſpatium $dx$

$= \frac{p}{qh} f$, quod eſt ejus logarithmus.

Coroll. 4. In iiſdem formulis 1.$^a$ & 2.$^a$ elementum $dy$ eſt ſemper differentia duarum exponentialium quæ finitæ quidem ſunt, ſed differunt inter ſe quantitate minima: ac proinde donec harum differentia ſervatur minima $dy$ erit elementum minimum; fit vero finitum ſi harum differentia finita tandem evadat.

Verum cum in 1.$^a$ ſit $dy = \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}} - 1 \right) \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} a$, fluente $p$ ſucceſſive

per $o, 1, 2 \ldots q, 2q, 3q \ldots q.q \ldots$, $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}}$ a limite mini-

mo $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{o}{qh}}$ per omnes intermedias ſucceſſive creſcit ad magnitudinem indefinitam: atque $dy$ a $o$ per omnia infiniteſima ſucceſſive creſcit ad finitam, atque ad

ad indefinitam quamvis magnitudinem. Contra vero in 2.ª cum sit $dy$

$$= \left(1 - {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}\right)^{\frac{p}{qh}} {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{g} a,$$

decrescente ${\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{\frac{p}{qh}}$ a limite maximo ${\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{\frac{0}{qh}}$ usque ad quamvis minorem magnitudinem quin in *zero* absolutum evanescat (ut superius etiam advertimus), $dy$ a *zero* crescit successive usque ad finitum, sed nunquam ad valorem $a$ protonumeri evehi poterit.

§. 20. Coroll. 5. Ex doctrina §. 18. Coroll. 3. & 4. superiorum evidenter evincitur formulas 1.am & 2.am methodo communi conflatas non recte aptari posse fluentibus exponentialibus, nisi nova hujusce nostræ Theoriæ luce in melius reformentur, ac rectius intelligantur. Ut igitur ad eam veram formam, quam requirunt, reducantur, animadvertamus superiores formulas §. 3.

$$\left( {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{0+g} + {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{0+g} \left( {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{\frac{p}{qh}} - 1 \right) \right) a ; \left( {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{0+g} - {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{0+g} \left( 1 - {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{\frac{p}{qh}} \right) \right) a$$

conflari ex coefficiente numerico $\left( {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{\pm 1} \right)^{0+g}$ constanti, & $\left( {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{\pm 1} \right)^{\frac{p}{qh}}$ fluente, ac protonumero $a$. Ergo primus terminus 1.ª & 2.ª, qui symbolo $y$ fluente vulgo exprimitur, constans sumendus est. Quoniam vero secundus terminus hujusce coefficientis in utraque fluens est, & infinitesimus, symbolo $dy$ infinitesimo efferri poterit, dummodo per $dy$ intelligatur numerus minimus abstractus cuivis protonumero $a$ applicatus. Itaque formulæ 1.ª & 2.ª communes ut reducantur ad significandos coefficientes numericos abstractos suo protonumero applicatos, & exponentialibus fluentibus proprios in sequentes formulas transmutentur oportet

$$\text{I. } \left(1 + \frac{dy}{a}\right) a = \left( {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{0} + {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{0} \left( {\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{1}}^{\frac{p}{qh}} - 1 \right) \right) a ;$$

$$\text{II. } \left(1 - \frac{dy}{a}\right) a = \left( {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{0} - {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{0} \left( 1 - {\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}}^{\frac{p}{qh}} \right) \right) a ;$$

&

& hæ erunt formulæ legitimæ ( cuivis protonumero $a$ applicatæ ) in quibus primum membrum non est æquale sed identicum cum secundo : quo docemur 1 abstractam primi membri ad formam $\left(\frac{m}{n}\right)^{\cdot}_{\overline{1}}$, vel $\left(\frac{n}{m}\right)^{0}_{\overline{1}}$, & $dy$ infinitesimum quidem reducendam in I.ª ad formam $\left(\frac{m}{n}\right)^{\cdot}_{\overline{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\overline{1}} - 1 \right) a$, in II.ª ad formam $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\overline{1}} \right) a$ : qua reductione facta habentur successive fluentes intermediæ singulæ sub sua vera forma necessaria contentæ, quæ intra puncta data proxima duarum fluentium primi generis $\left( \left(\frac{m^{\pm 1}}{n}\right)_{\overline{1}} \right)^{0} a$, $\left( \left(\frac{m^{\pm 1}}{n}\right)_{\overline{1}} \right)^{1} a$ continentur, in quibus si in locum $\left( \left(\frac{m^{\pm 1}}{n}\right)_{\overline{1}} \right)^{0} a$ substituatur quævis fluens data $\left( \left(\frac{m^{\pm 1}}{n}\right)_{\overline{1}} \right)^{g} a$; determinantur etiam hæc puncta data primi generis, atque fluentes his insistentes, inter quæ successiva hæc fluentium intermediarum infinite proximarum series instituitur.

§. 21. Hisce statutis ut utriusque hujusce formulæ vera œconomia ostendatur, ac ejus recta ad Logisticam applicatio demonstretur, & quid vere in singulis casibus significent formulæ omnino indeterminatæ communis Analyseos symbolo $y$ expressæ intelligatur, concipiatur ( *Fig.* 12. ) descripta jam Logistica protonumeri $\left( \left(\frac{m^{\pm 1}}{n}\right)_{\overline{1}} \right)^{\cdot} a$, basis $\left( \left(\frac{m^{\pm 1}}{n}\right)_{\overline{1}} \right)^{\frac{1.f}{f}} . a$, logarithmi $f$, & sumpta distantia

tia A g A a protonumero A B, $= gf$, erit in Logiſtica aſcendente fluens exponentialis $Gg = \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\frac{gf}{f}} a$, & in deſcendente $Hh = \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\frac{gf}{f}} \cdot a$, utraque data primi generis. Accipiatur nunc fluens 1 G 1 g, cui reſpondet ſua homologa 1 H 1 h diſtans a G g intervallo $f = g\,A,\ (g+1)\,A$, ut ſit 1 G 1 g $= \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g+1} a$; 1 H 1 h $= \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g+1} a$, & inter haſce interjectus $f$ diviſus concipiatur in partes $q\,b$, poſito $q$ quovis numero indefinito, $b$ finito. Sit L l prima infinite proxima G g ab hac diſtans intervallo minimo $\frac{1}{q\,b}\,f$, ideoque

$$Ll = \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g+\frac{1}{qb}} \cdot a, \quad \& \quad Ii = \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g+\frac{1}{qb}} a. \text{ Sed}$$

$$Ll = \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g+\frac{1}{qb}} \cdot a = \left( \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g} + \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g} \left( \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\frac{1}{qb}} - 1\right)\right) a = Gg + (Ll - Gg)\ 1.^{a}$$

$$Ii = \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g+\frac{1}{qb}} \cdot a = \left( \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g} - \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g} \left( 1 - \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\frac{1}{qb}} \right)\right) a = Hh - (Hh - Ii)\ 2.^{a}$$

ergo minimum incrementum L l ſupra G g erit $= \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g} \left( \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\frac{1}{qb}} - 1 \right) a$ $= Ll - Gg = Ld + ld$: & minimum decrementum I i infra H h erit $= \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g} \left(1 - \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{\frac{1}{qb}}\right) a = Hh - Ii = Hd + hd$. Ergo ſi G g ad-

da-

datur L d + l d, habetur fluens L l prima infinite proxima G g; & si ab H h dematur H d + h d habetur I i infinite proxima H h, in hac divisione $qb$ ipsius $f$ inter hasce collocati. Logarithmus vero utriusque fluentis L l, I i erit

$gf + dx = gf + \frac{1}{qb} f$, qui est distantia utriusqne a protonumero $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}\right)^{\pm 1} a$

$=$ A B : $dx$ vero originem sumit a puncto dato g A primi generis, extremo ipsius $gf$. Quod si sumatur ex opposita parte R r infinite proxima G g, ab hac distans minimo intervallo $\frac{1}{qb} f$ (vel quovis alio puta $\frac{1}{qu} f$), erit

$$Rr = \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g-\frac{1}{qb}} \cdot a = \left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} - \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} \left(1 - \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{1}{qb}}\right)\right) a = Gg - (Gg - Rr) \; 3.^{\circ}$$

& huic homologa in Logistica descendente

$$Pp = \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g-\frac{1}{qb}} a \,. = \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} + \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{1}{qb}} - 1\right)\right) a = Hh + (Pp - Hh) \; 4.^{\circ}$$

Igitur decrementum minimum R r infra G g erit $= \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} \left(1 - \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{1}{qb}}\right) a$

$=$ G g $-$ R r $=$ G s $+$ $gs$, & incrementum minimum P p supra H h

erit $= \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} \left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{1}{qb}} - 1\right) a =$ P p $-$ H h $=$ P s $+$ p s, ac utriusque

fluentis logarithmus $= gf - \frac{1}{qb} f$. Primæ duæ formulæ inserviunt fluentibus intermediis successive procedentibus per minima intervalla æqualia $\frac{1}{qb}$, $\frac{2}{qb}$ ...

$\frac{2}{qh} \ldots \frac{q}{qh}, \frac{2}{qh} \ldots \frac{qh}{qh}$ a limite dato fluentis exponentialis $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$

usque ad $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g+1} a$ : duæ postremæ inserviunt fluentibus intermediis quovis

alio minimo intervallo regredientibus a limite dato $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$ usque

ad $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g-1} a$.

§. 22. Hisce bene perspectis ad formulas hasce more communi efferendas transeamus: & quoniam quævis fluens exponentialis a vulgata Analysi symbolo generali $y$ indicatur, & quodvis ejus incrementum vel decrementum ejus elemento $dy$ designatur, non alia melius ratione formulæ nostræ ad communes

reduci poterunt, quam facta $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1} a = y$, fiat $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} = \frac{y}{a^{g}} = \left(\frac{y}{a}\right)^{g}$, &

$\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}} - 1\right) a = dy$, nec non $\left(1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}}\right) a = dy$, ut universim

quævis formula nostræ Theoriæ ex superioribus ad duas hasce symbolo $y$ expressas reducantur: nempe

$$\text{I.}^{a} \left( \left(\frac{y}{a}\right)^{g} + \left(\frac{y}{a}\right)^{g} \frac{dy}{a} \right) a : \text{II.}^{a} \left( \left(\frac{y}{a}\right)^{g} - \left(\frac{y}{a}\right)^{g} \frac{dy}{a} \right) a .$$

Verum cum I.ª tam inserviat fluentibus formulæ 1.ᵃ, quam fluentibus 4.ᵃ, II.ª tam fluentibus 2.ᵃ quam 3.ᵃ ( idem dic de earum elementis $dy$ ) incerta semper erit fluentium utriusque formulæ natura, ac directio, earumque valor.

Insuper $\left(\frac{y}{a}\right)^{g} a$ repræsentat fluentem exponentialem $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$ datam primi

ge-

generis, in qua cum ſit univerſim in tota Logiſtica $\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}$ ſemper conſtans, manet etiam in eadem formula ſemper conſtans etiam exponens $g$, cum ſit ipſa limes minimus, vel maximus earum fluentium, quæ intra fluentes datas primi generis $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$, $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g+1} a$, vel $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$, $\left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}\right)^{g-1} a$ interjacent; tamen communis Analyſis $\left(\frac{y}{a}\right)^{g} a$, quicumque ſit exponens $g$, ac ipſam $\frac{y}{a} = \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\pm 1}$ ſemper ut fluentem conſiderat, ſymbolo $y$, cui ſemper notionem *variabilis* affixit; decepta. Ac ſibi propoſita $\left(\frac{y}{a}\right)^{g}$ docet eſſe D $\left(\frac{y}{a}\right)^{g} = \frac{g}{a} y^{g-1} dy$; & contra S $\left(\frac{y}{a}\right)^{g} dy$ eſſe $\frac{1}{g-a} y^{g-1}$ fidenter pronunciat: ſed ſi $g$ ponatur $= -1$, quo ſe vertat neſcit, ac integrationis deſperatione ad logarithmos univerſim amandat: de qua tamen infra §. 28. Nunc communes cum noſtris ſequentibus formulis comparatæ dabunt

$$\text{I.}^{a}\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g} + \left(\frac{y}{a}\right)^{g} \frac{dy}{a}\right) a = \begin{cases} \left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g} + \left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{g} \left(\left(\frac{m}{\frac{n}{1}}\right)^{\frac{p}{qh}} - 1\right)\right) a. \ 1.^{a} \\ \left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g} + \left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{g} \left(\left(\frac{n}{\frac{m}{1}}\right)^{-\frac{p}{qh}} - 1\right)\right) a \ 4.^{a} \end{cases}$$

 II.ᵃ

$$\text{II.}^a \left( \left(\frac{y}{a}\right)^{g} - \left(\frac{y}{a}\right)^{g} \frac{dy}{a} \right) a = \begin{cases} \left( \left(\frac{n}{m}\right)^{g}_{\bar{1}} - \left(\frac{n}{m}\right)^{g}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right) \right) a \quad 2.^a \\ \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} - \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right) \right) a \quad 3.^a \end{cases}$$

quibus evincitur formulas communes omnino impares ad ſignificandum quod ſibi proponunt, nec aliam adeſſe viam in tanta ambiguitate atque fallacia, niſi ut in noſtras pro re nata legitime transformentur. Advertas velim quod, ſi ponatur $g = o$, fit I.$^a$ $a + dy$; II.$^a$ $a - dy$: in quo caſu converſa 4.$^a$ in 1.$^{am}$; & 3.$^a$ in 2.$^{am}$ erit tantum I.$^a$ $a + dy = \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} - 1 \right) \right) a$ 1.$^a$;

& II.$^a$ $a - dy = \left( \left(\frac{n}{m}\right)^{o}_{\bar{1}} - \left(\frac{n}{m}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{-\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right) \right) a$ 2.$^a$; quia (ut vidimus Cap. XII.) exponens fluens negativus $-\frac{p}{qh}$ ſemper ab exponente ipſo majori ſubtrahendus eſt, ne a Logiſtica aſcendente ad Logiſticam deſcendentem, vel viceverſa, rapiamur: niſi ſignum negativum transferas in logarithmum baſis $f$, facto $\frac{-p}{qh} = \frac{p \,.\, -f}{qh \,.\, -f}$, ex quo deſumitur contraria Logiſticæ directio: at in hoc caſu 4.$^a$ reducitur ad 2.$^{am}$, 3.$^a$ ad 1.$^{am}$, cum ſit in 4.$^a$ terminus $\left(\frac{n}{m}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} - 1 \right)$; in 3.$^a$ $\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( 1 - \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{qh}}_{\bar{1}} \right)$ negativus.

§. 23.

§. 23. Nunc per ea, quæ infra §§. 38. & seqq. dicenda sunt, in ipsa exponentis $g = o$ suppositione, quo modo formulæ communes absolute indeterminatæ in singulis casibus conformandæ sint, ut si non exacte, aliquo tamen modo veris ac determinatis respondeant, investigemus oportet. Itaque sumpto semper constanti $g = o$, & posito successive $p$ fluente,

$$p = o : \left(1 + o . \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} + \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} \left( \overset{\frac{o}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} - 1 \right) \right) a = \overset{o+\frac{o}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} . a : \left(1 - o . \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} - \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \left( 1 - \overset{\frac{o}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \right) \right) a = \overset{o+\frac{o}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} . a$$

$$p = 1 : \left(1 + 1 . \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} + \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} \left( \overset{\frac{1}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} - 1 \right) \right) a = \overset{o+\frac{1}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} . a : \left(1 - 1 . \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} - \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \left( 1 - \overset{\frac{1}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \right) \right) a = \overset{o+\frac{1}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} . a$$

$$p = 2 : \left(1 + 2 . \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} + \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} \left( \overset{\frac{2}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} - 1 \right) \right) a = \overset{o+\frac{2}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} . a : \left(1 - 2 . \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} - \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \left( 1 - \overset{\frac{2}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \right) \right) a = \overset{o+\frac{2}{qh}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} . a$$

$$p = 1 . q : \left(1 + 1q \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} + \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} \left( \overset{\frac{1}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} - 1 \right) \right) a = \overset{o+\frac{1}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} . a : \left(1 - 1q \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} - \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \left( 1 - \overset{\frac{1}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \right) \right) a = \overset{o+\frac{1}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} . a$$

$$p = 2q : \left(1 + 2q \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} + \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} \left( \overset{\frac{2}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} - 1 \right) \right) a = \overset{o+\frac{2}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} . a : \left(1 - 2q \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} - \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \left( 1 - \overset{\frac{2}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \right) \right) a = \overset{o+\frac{2}{h}}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} . a$$

$$p = hq : \left(1 + hq \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} + \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} \left( \overset{1}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} - 1 \right) \right) a = \overset{o+1}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}} . a : \left(1 - hq \frac{dy}{a}\right) a = \left( \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} - \overset{o}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \left( 1 - \overset{1}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} \right) \right) a = \overset{o+1}{\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}} . a .$$

In istis formulis $1 . dy$ est incrementum, vel decrementum minimum primæ fluentis infinite proximæ protonumero intervallo $\frac{1}{qh} f$ dissitæ, atque ideo $o . dy$ incrementum vel decrementum nullum indicabit ab hac formula primam fluentem

tem constantem primi generis complecti (hîc protonumerum $\left(\left(\frac{m}{n}^{\pm 1}\right)\right)^{\cdot}_{\overline{1}} a$ ) quæ est limes primus, a quo fluentes intermediæ successivo minimo fluxu abscedunt: $2 . dy$ erit incrementum vel decrementum minimum secundæ eodem intervallo $\frac{1}{qh} f$ a prima fluente, & $\frac{2}{qh} f$ a constanti remotæ, & sic successive: donec exhaustis continuo fluxu intervallis omnibus minimis numero indefinito $q$, fiat $p = q$, & $q dy$ erit incrementum, vel decrementum finitum quo fluens intermedia superat, vel superatur a fluente constanti primum posita, a qua intervallo $\frac{1}{h} f$ distat. Hoc modo successive fluendo fluens pervenit ad exponentem $\frac{hq}{qh} = 1$, & $h q d y$ erit incrementum vel decrementum finitum, per quod crescit vel decrescit fluens ultima intervallo $f$ a prima constanti dissita, quæ & ipsa ob exponentem 1 recidit in constantem primi generis, quæ fit alter limes, intra quos fluentes intermediæ finitæ exponente $\frac{1}{h}, \frac{2}{h}, \frac{3}{h} \ldots \frac{h}{h}$ continentur, postquam per singula puncta ab infinitesima $\frac{1}{qh}$ indicata nullo modo determinanda fluxio a prima usque ad ultimam processerit. Hac vero exhausta fluentium serie nova renascitur series ab ultima $\left(\left(\frac{m}{n}^{\pm 1}\right)\right)^{1}_{\overline{1}} a$ fluendo usque ad $\left(\left(\frac{m}{n}^{\pm 1}\right)\right)^{1+1}_{\overline{1}} . a$, vel fluxu contrario regrediendo usque ad $\left(\left(\frac{m}{n}^{\pm 1}\right)\right)^{\cdot}_{\overline{1}} a$, quibus inserviunt formulæ quatuor superiores §. 21, posito $g$ successive $= 1, 2, 3, \ldots$, ex quibus constat $\left(\left(\frac{m}{n}^{\pm 1}\right)\right)^{g}_{\overline{1}} a$ semper invariatam manere, donec exhauriatur series tota fluentium intermediarum, proindeque vere naturam constantis induere.

§. 24.

§. 24. Ex his rurſus evincitur diverſa ratio, qua fluentes valorem mutant, ab ea qua conſtantes, de qua Cap. XI. §. 13. verba fecimus. In noſtro hoc tamen caſu natura fluentium exponentialium requirit, ut manentibus cæteris terminis in formula intactis unus exponens $\frac{p}{qh}$ coefficientis $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{qh}}$ ſucceſſivo continuo fluxu a minimo limite per omnes intermedios uſque ad maximum progrediatur, & viceverſa, quin identitas, dimenſio fluentis, cui exponens ſuffigitur, aliquo modo alteretur. Hinc formula communis Analyſeos $\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\pm\left(\frac{y}{a}\right)^{g} dy$ omnino indeterminata, ut aliquid certi ſignificet, recte ſigno $=$ cum ſingulis noſtris formulis conjungitur, ut quid ipſa velit ex formulis ad veram & determinatam exponentialium formam conformatis, eruatur. Erit igitur legitima & neceſſaria comparatio a nobis facta §. 22. formularum I.ª, & II.ª communis Analyſeos cum noſtris 1.ª, 4.ª; 2.ª, 3.ª; ut intelligatur quamnam ex infinitis notionibus, quibus capax eſt, formula communis nimis abſtracta & generalis elegerit ope noſtræ formulæ, a qua tantum natura, limites, valor fluentis poſſunt determinari. Hac vero facta ipſius in ſingulas noſtras tranſmutatione omnia, quibus opus eſt, ſtatim determinantur. Nam ſi fiat ex: gr: $p = q$, $2q$, $3q$, $hq$ docemur terminum infiniteſimum $dy$ factum fuiſſe finitum & determinatum ad valorem $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{1}{h}}-1\right)a$, vel $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{2}{h}}-1\right)a$, vel $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{3}{h}}-1\right)a$, vel $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{1}-1\right)a$ ſi comparetur 1.ª: idem dic de aliis. Hinc intimius percipitur methodus *differentiandi & integrandi formulas* vulgo uſurpata (ut hoc tantum innuam): erit enim

=

$$S\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g}+\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\frac{dy}{a}\right)a=\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g}+\left(\frac{y}{a}\right)^{g}q\,\frac{dy}{a}\right)a=\begin{cases}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)-1\right)\right)a^{\frac{p}{h}}\\[2ex]\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)-1\right)\right)a^{-\frac{p}{h}}\end{cases}$$

$$S\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g}-\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\frac{dy}{a}\right)a=\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g}-\left(\frac{y}{a}\right)^{g}q\,\frac{dy}{a}\right)a=\begin{cases}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)-1\right)\right)a^{\frac{p}{h}}\\[2ex]\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)-1\right)\right)a^{-\frac{p}{h}}\end{cases}$$

finita quidem ſed adhuc indeterminata intra limites $p=o$ ; $p=h$, qui dant fluentes

$$\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+o}.a,\ \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+1}a;\ \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+o}.a,\ \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+1}.a$$

primi generis : ac tandem determinato

$$\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g-o}.a,\ \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g-1}.a;\ \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g-o}.a,\ \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g-1}.a$$

ad libitum $g$ ( dummodo advertamus in 4.ª & 3.ª $g$ non poſſe minorem eſſe 1 ) determinantur fluentes datæ, intra quas hæc ſucceſſiva fluentium ſeries inſtituta fuerit. Contra vero poſita finita $\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\pm\left(\frac{y}{a}\right)^{g}q\,dy$ erit ejus differentialis finitus $D\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\pm\left(\frac{y}{a}\right)^{g}q\,dy\right)=\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\pm\left(\frac{y}{a}\right)^{g}dy$, qui quid ſit niſi no-

nostris formulis comparetur, frustra quæras. At D $\left(\frac{y}{a}\right)^{g} q\,dy = \left(\frac{y}{a}\right)^{g} dy$ erit differentialis infinitesimus, & D $q\,dy = dy$, qui donec sub hac forma effertur, nihil omnino, quod conducat, exhibere poterit. At si fiat ex: gr:

$$dy = \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{\frac{p}{qh}} - 1 \right) a,$$

statim patet $dy$ esse incrementum minimum alicujus fluentis infinite proximæ protonumero $\left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} a$ Logisticæ ascendentis, quæ est in ordine prima a protonumero, ac insuper si fiat $p = 1, 2, 3, \ldots$ esse incrementum minimum fluentis 1.ª, 2.ª, 3.ª &c. infinite proximæ protonumero: ac proinde $S\,dy = q\,\frac{dy}{a}\,a = \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{\frac{p}{h}} - 1 \right) a$ addenda est illa exponentialis constans, quæ ab $\left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{g} a$ ( hîc $\left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} a$ ) indicatur: quia facta $p = o$, est $S\,dy \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o+\frac{o}{h}} - 1 \right) \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} a$, cui addenda $\left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} a$, ut sit

$$\left(1 + S\,\frac{dy}{a}\right) a = \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} a + \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o+\frac{o}{h}} - \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o} \right) a = \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o+\frac{o}{h}} . a$$

limes primus constans. Ergo addita constanti erit universim $\left(1 + S\,\frac{dy}{a}\right) a = \left(\frac{m}{n}\right)_{\underline{1}}^{o+\frac{p}{h}} . a.$

Quod si haberes $S\,dy = \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g}\left(1 - \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\frac{p}{h}}\right) a$, facta $p = 0$, erit $S\,dy$ $= \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)} - \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g+\frac{0}{h}}\cdot a$, & $-\,S\,dy = -\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g} a + \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g+\frac{0}{h}}\cdot a$, cui si addatur constans $\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g} a$, invenies $\left(1 - S\frac{dy}{a}\right) a = \left(\underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g} + \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g}\left(1 - \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\frac{0}{h}}\right)\right) a$ $= \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g+\frac{0}{h}}\cdot a$ primum limitem maximum constantem, & fluentem mediam

$$\left(1 - S\frac{dy}{a}\right) a = \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g} a - \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g}\left(1 - \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{\frac{p}{h}}\right) a = \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g+\frac{p}{h}}\cdot a:$$ donec

facta $p = h$, sese offerat limes alter minimus constans $= \underset{\overline{1}}{\left(\frac{n}{m}\right)}^{g+1}\cdot a$, &c. Quibus evidenter cognoscitur necessitas & usus nostrarum formularum, in quibus etiam in transitu a finito ad infinitesimum eadem fluentium natura, forma, iidem limites semper caute servantur, & clare exhibentur, ut facta integratione innotescat quæ fluens constans addenda, qui limites intra quos mediæ continentur.

§. 25. Illud etiam alterum non minoris momenti animadvertendum accedit, si formulam $\left(1 \pm \frac{dy}{a}\right) a = \left(\underset{\overline{1}}{\left(\frac{m}{n}\right)}^{\pm 1}\right)^{0+\frac{1}{qh}}\cdot a$ ab exponente $\frac{1}{qh}$ ad $\frac{0}{qh}, \frac{1}{qh}, \frac{2}{qh}, \frac{3}{qh} \ldots$

qh

$\frac{qh}{qh}$ transferre velimus, hanc non elevandam ad potentiam $o, 1, 2, 3 \ldots qh$, ut sit

$$\left(1+\frac{dy}{a}\right)^{0} a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}}\right)^{0} a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{0}{qh}} . a ; \left(1+\frac{dy}{a}\right)^{1} a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}}\right)^{1} a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}} a ;$$

$$\left(1+\frac{dy}{a}\right)^{2} a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}}\right)^{2} a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{2}{qh}} a ; \left(1+\frac{dy}{a}\right)^{3} a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}}\right)^{3} a$$

$$= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{3}{qh}} a \ldots \left(1+\frac{dy}{a}\right)^{qh} a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{qh}}\right)^{qh} a = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} a :$$ sed utendum esse

methodo §. 23, ob quam numerator identicus $p$ fractionis $\frac{p}{qh}$ fluens a $o$ successivo & continuo fluxu progredi comprobatur, cujus fluxioni respondet in formula communi fluxio $o\,dy$, $1\,dy$, $2\,dy \ldots qh\,dy$; ita ut numerator $p$ in formula communi non exponens sit, sed sit coefficiens infinitesimæ $dy$ tantum applicatus: veraque formula sit $\left(1 \pm p\frac{dy}{a}\right) a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{o+\frac{p}{qh}} . a$. Tamen error hic gravissimus, quo tota inficitur & præpeditur pars etiam illa Analyseos, quæ dicitur *sublimior*, omnium auctoritate sustentatur. Verum præterquam quod scire velim quo modo possit numerus abstractus nullius dimensionis capax ad secundam, tertiam, &c. dimensionem elevari, & quid significet hujusmodi elevatio numeri ad potestatem, quæ unius quantitatis geometricæ propria est; si methodus hæc vulgo usurpata legitima esset, esset etiam legitima formula generalis communis $\left(\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{g}+\left(\frac{y}{a}\right)^{g}\frac{dy}{a}\right)\right)^{p} . a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{p}{qh}}\right)^{p} . a$

$= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{gr+\frac{rp}{qh}}, a$ : qua ratione afficitur, atque uſque ad infinitum producitur $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a$, quam tamen conſtantem in eadem formula perſeverare debere ſuperius oſtendimus. Quod ſi dicas in methodo communi idem eſſe $\left(1+\frac{dy}{a}\right)^{2}$, $\left(1+\frac{dy}{a}\right)^{3}$ &c. ac $1+\frac{2dy}{a}$, $1+\frac{3dy}{a}$, &c. atque proinde unum pro altero in calculo uſurpari poſſe, quia termini omnes poſt primum infiniteſimum, evoluta potentia, huic primo comparati evaneſcunt; reponam, licet hoc nunc benigne concedatur, tamen ſemper verum eſſe, non poſſe ad finitum $dy$ tranſitum fieri hac methodo niſi ope exponentis $q$ infiniti, in quo caſu $\left(1+\frac{dy}{a}\right)^{q}$ $= 1 + \frac{qdy}{a} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{dy^2}{a^2} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{dy^3}{a^3} \ldots$ quæ eſt ſeries ſemper creſcens, ac ex doctrina communi ſingulis terminis finitis numero infinitis conſtans, quæ nullo modo abrumpi poteſt, neque ad valorem $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{o+\frac{r}{qh}} - 1\right) a$ terminari, cui vere æquatur $qdy$ noſtræ formulæ. Malum vero hoc ex ignorata fluentium natura ortum, quæ eodem modo tractantur, quo conſtantes geometricæ, (multitudine terminorum atque eo majori quo major eſt exponens binomii elevandi) adeo implicavit Analyſim vulgatam, ut elevatione vel indicata, vel actu peracta nequeat amplius conſtantes a fluentibus ſegregare, & jam elevatam potentiam ad eam formam traducere, quam requirit utriuſque fluentis natura, ac ſyſtema, ad quod pertinent: ut in fine Cap: VI. innuimus: de hoc tamen quando de altioribus æquationibus ſermo erit, erit ex compoſito agendum.

§. 26. Ex doctrina §. 21. illud etiam non minoris neceſſitatis ad rem, quam nunc

nunc agimus rite firmandam eruitur, quod incrementum vel decrementum minimum addendum vel detrahendum a quavis fluente, ut habeatur fluens illi infinite proxima, in duas æquales partes invicem distinctas a nostris formulis §. 21. exhibetur, quarum una addenda vel subtrahenda ab uno, altera ab altero extremo puncto lineæ fluentis, ut habeatur ipsius augmentum vel decrementum, quo afficitur in sua hac minima translatione. Ita (*Fig.* 12.) data G g primi generis si fluendo aucta concipiatur translata in L l concipiendum etiam est punctum ipsius extremum G ex hac parte fluxisse usque in $f$ in hac æquabili translatione, & motu composito pervenisse in L; eodem modo alterum extremum $g$ pervenisse in $l$, ac duplicis hujusce augmenti summam esse

$$dL + dl = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\overline{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{qh}}_{\overline{1}} - 1\right)a + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{u}\right)^{g}_{\overline{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{qh}}_{\overline{1}} - 1\right)a.$$

At H h in hac eadem minima translatione eadem methodo diminuitur in punctis H, h, per $dH + dh = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{g}_{\overline{1}}\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{qh}}_{\overline{1}}\right)a + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^{g}_{\overline{1}}\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{qh}}_{\overline{1}}\right)a$ æqualibus sed diversis: idem dicas de reliquis, donec sumatur fluens A B $= \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\pm 1}_{\overline{1}}\right)a$ minima vel maxima fluentium, quæ in primo casu nunquam amplius minuitur, in secundo nunquam amplius augetur, hinc inde successive fluendo usque ad infinitum sibi ipsi semper parallela. Itaque si A B dividatur bifariam in C, punctum hoc in eadem excurrente linea A B immotum semper manet, describit tamen fluente A B lineam rectam hinc inde C T, C t, quæ dividit bifariam singulas fluentes Logisticæ tam ascendentis, quam descendentis, quo nomine dicitur axis. Quare punctum quodvis C constans erit, at extrema G, g; H, h &c. erunt fluentia, a quibus describuntur rami Logisticæ: ideoque quævis fluens hoc tertio puncto dato C divisa dividit bifariam in primo casu summam fluentem fluentium: in secundo differentiam fluentem fluentium homologarum, & ex hoc puncto C utpote constanti origo cujuscumque dimidiæ summæ vel differentiæ desumenda est.

§. 27. Quare eadem ratione, qua superius fluentes simplices utriusque systematis conformavimus ad hoc tertium punctum C (illic centrum) significandum, reducendæ sunt hîc formulæ fluentium exponentialium, ut singulis istis notionibus satisfacientes affectionibus geometricis ex æquo respondeant, vel vice-

ceversa. Itaque ut formulæ fluentium exponentialium §. 21, quod intelligit constructio geometrica (*Fig.* 12.) significent, sequenti modo sunt universim præparandæ

$$\text{I.}^{a}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}-1\right)\right)a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}-1\right)\right)a-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a\right)=\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{p}{qh}}\cdot a$$

$$\text{IV.}^{a}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}-1\right)\right)a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}-1\right)\right)a-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a\right)=\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g-\frac{p}{qh}}\cdot a$$

$$\text{II.}^{a}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(1-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}\right)\right)a\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(1-\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}\right)\right)a\right)=\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+\frac{p}{qh}}\cdot a$$

$$\text{III.}^{a}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(1-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}\right)\right)a\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}a-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(1-\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}\right)\right)a\right)=\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{p}{qh}}\cdot a$$

I.ª & IV.ª pertinent ad systema SY, cum in I.ª in transitu limitis $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}a$ ad limitem $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+1}a$ fluentes exponentiales crescant, quemadmodum crescunt in IV.ª a limite $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}a$ ad limitem $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g-1}a$, & in utraque denominator 1 indicat hujusmodi fluentium differentiam constantem. Contra II.ª & III.ª pertinent ad systema SA, quia in II.ª fluentes a limite $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}a$ ad limitem $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+1}a$ de-

cre-

crescunt: at in III.ª decrescunt a limite $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a$ ad limitem $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g-1} a$, & in singulis denominator 1 constans summam fluentium constantem significat. Facta hac mearum formularum præparatione ac transmutatione quærere nunc jure posse mihi videor ab Analysi communi, ut & ipsa suas formulas (quæ singulæ sub hac formula generali complecti possunt $\left(1 \pm \frac{dy}{a}\right)\left(\frac{y}{a}\right)^{g} a$ artificiis usu receptis, quæ callet, in eam formam, ut opus est, convertat, que clare & sine erroris periculo oculis subjiciat tam singulas affectiones geometricas, quæ essentiam Loci geometrici constituunt, quam quæ partiales ejusdem Loci modificationes inducunt.

§. 28. Verum ut hoc semper magis confirmetur venio ad formulam $\frac{dy}{y}$ quæ natura sua algebraicam functionis $\frac{dy}{y^{m}}$ integrationem respuere hactenus omnium Analystarum consensu visa est in tantum, ut oleum & operam perdere arbitraretur quisquis alia methodo, quam quæ a logarithmis mutuatur, in ejus integrationem pertinaci animo inquireret. Tamen consulta mea Theoria videamus quid respondeat. Verum ut formula hæc, quam exponentialem naturam induere volumus & ad Logisticam pertinere, in nostras formulas rite transmutetur, tria jam superius demonstrata sunt memoria revocanda. 1.° Coroll. 4. §. 19., in quo docetur elementum $dy$ esse differentiam inter exponentialem datam primi generis, sive constantem $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{o} a$, & exponentialem fluentem huic infinite proximam $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{o+\frac{p}{gh}} a$: logarithmus $dx$ enim $= \frac{p}{qb}$ $f$ initium sumere debet a puncto dato primi generis per §. 12. ut universim $dy\left(\frac{y}{a}\right)^{g}$ significet

ficet

ficet differentiam inter constantem $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g} a$ & ejus infinite proximam $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{p}{qh}} . a$. 2.° symbolum $y$ fluentem datam primi generis $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1} . a$ re-

præsentare: cum enim nulla alia ratione exponentialis quævis fieri possit fluens nisi ob exponentem fluentem ; sumpto hoc constanti ( sive , ut ostendimus , numero integro) exponentialis ipsa constans intelligenda erit . 3.° tandem coeffi-

ciens exponentialis $\frac{y}{a}$ fluentium S Y erit $= \left(\frac{y}{a}\right)^{-1}$ coefficienti exponentialis fluentium S A , & viceversa . Nam in primo casu $\frac{y}{a} = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} = \left(\frac{y}{a}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-1}$ $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}$ & in secundo $\frac{y}{a} = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} = \left(\frac{y}{a}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1}$: & universim $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{p}{h}}$ S Y $= \left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{p}{h}}$ sive $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} a$ S Y $= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-\frac{p}{h}} a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} a$ S A, & $\left(\frac{y}{a}\right)^{g}$ S Y $= \left(\frac{a}{y}\right)^{g}$ S A , & viceversa.

§. 29. Hisce positis sumatur primum $dy = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0} \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}} - 1\right) a$, quæ est differentia inter protonumerum $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0} a$ & fluentem infinite proximam $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0+\frac{p}{qh}} . a$:

&

& erit $\frac{dy}{y} = \frac{(\frac{dy}{a})}{(\frac{y}{a})} = \underset{1}{(\frac{m}{n})}^{0} \frac{\left(\underset{1}{(\frac{m}{n})}-1\right)^{\frac{p}{qh}}}{\underset{1}{(\frac{m}{n})}^{0}\,\underset{1}{(\frac{m}{n})}^{1}} = \underset{1}{(\frac{m}{n})}^{0}.\underset{1}{(\frac{m}{n})}^{-0}.\underset{1}{(\frac{m}{n})}^{-1}\left(\underset{1}{(\frac{m}{n})}-1\right)^{\frac{p}{qh}}$

$= \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{0}\,\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1}\,\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{-\frac{p}{qh}}-1 = \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1}\left(\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{-\frac{p}{qh}}-1\right) = \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1-\frac{p}{qh}} - \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1}$; & $\frac{(\frac{dy}{a})}{(\frac{y}{a})}$ SY

$= dy\,(\frac{y}{a})^{-1} = \left(\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1-\frac{p}{qh}} - \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1}\right)a$ SA, quæ convertitur in differentiam exponentialis datæ $\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1} a$, & infinite proximæ huic $\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1-\frac{p}{qh}}.a$, & $\frac{(\frac{dy}{a})}{(\frac{y}{a})}a$

$= \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1}\left(\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{-\frac{p}{qh}}-1\right)a = \frac{y}{a}dy = \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1-\frac{p}{qh}} a - \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1} a$. Ergo universim

$\frac{\frac{dy}{a}}{\frac{y}{a}\,(\frac{y}{a})^{g}} = dy\,(\frac{y}{a})^{-1}(\frac{y}{a})^{-g}\text{SY} = dy\,\frac{y}{a}(\frac{y}{a})^{g}\text{SA} = \left(\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{-\frac{p}{qh}}-1\right)\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{1}\,\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{g}a$

$= \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{g+1}\left(\underset{1}{(\frac{n}{m})}^{-\frac{p}{qh}}-1\right)a = \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{g+1-\frac{p}{qh}}.a - \underset{1}{(\frac{n}{m})}^{g+1}a$: quæ dat elementum minimum

æquale differentiæ minoris constantis $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g+1} . a$ subtractæ a majori $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g+1-\frac{p}{qh}} . a$; quæ cum semper magis crescat quo proprior ad protonumerum regrediendo accedit, pertinet ad 4.$^{am}$ §. 22., eo modo tractanda quo 1.$^{a}$, quæ eo magis crescit, quo magis ad protonumerum recedit. Quare exponens $g+1$ constantis $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g+1} . a$ nequit esse minor 1, facto $g=o$, ut advertimus §. 24.

Hinc 1.$^{a}$ $\left( \left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{g} + \left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{g} \left( \left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{qh}} - 1 \right) \right) a$ incipiens a constanti minori $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{g} a$ desinit fluendo in majorem $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{g+1} . a$ posito $p=qh$: 4.$^{a}$ $\left( \left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g+1} + \left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g+1} \left( \left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{-\frac{p}{qh}} - 1 \right) \right) a$ incipiens a constanti minori $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g+1} . a$ desinit regrediendo in majorem $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{g} a$, facto item $p=qh$. Et facto in utraque $g=o$, erit in 1.$^{a}$ limes minimus $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{o} a$, maximus $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{m}{n}}\right)^{1} a$; & in 4.$^{a}$ limes minimus $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{1} a$, maximus $\left(\underset{\overline{1}}{\frac{n}{m}}\right)^{o} a$.

§. 30. Ex his consequitur regula generalis, qua fas est a fluente exponentiali Logisticæ ascendentis ad descendentem transitum facere, quin mutetur systema (ut ostendimus §. 27.), atque logarithmus fluentis transmutatæ. Nam sit primum fluens exponentialis Logisticæ ascendentis ad systema S Y pertinens, quæ

quæ est 1.ª §. 22., nempe $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)-1\right)^{\frac{p}{qh}}\right)a$, hæc dividatur

per $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2g+1}$, & erit $\dfrac{\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)-1\right)^{\frac{p}{qh}}\right)}{\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{2g+1}}a=\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-g-1}+\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-g-1}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)-1\right)^{\frac{p}{qh}}\right)a$

$=\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+1}+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+1}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)-1\right)^{-\frac{p}{qh}}\right)a$ 4.ª facto transitu a Logisticæ ramo ascendente ad descendentem, fluente transmutata in $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+1-\frac{p}{qh}}.a$. Ergo fluens prima

est $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{p}{qh}}.a$, fluens secunda, facta divisione, $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+1-\frac{p}{qh}}.a$ ; utraque ex §. 27.

dividenda in duas fluentes homologas systematis SY. Verum ut hujusmodi fluentes exponentiales sint homologæ, hoc est eumdem situm in Logistica occupent, atque ideo eadem distantia a protonumero, sive eodem gaudeant logarithmo, fiat exponens 1.ª $\frac{p}{qh}=1-\frac{p'}{qh}$ 4.ª, ut summa hujusmodi exponentium $\frac{p}{qh}+\frac{p'}{qh}=1$ sit semper constans, & pertineant ad no-

ſtrum ſyſtema S A. Quo facto erit L $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+\frac{p}{qh}} \cdot a = \mathrm{L}\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1-\frac{p'}{qh}} \cdot a$;

ſive $\left(g+\frac{p}{qh}\right) f = \left(g+1-\frac{p'}{qh}\right) f$, ita ut facto $\frac{p}{qh} = \frac{o}{qh}$ ſit $\frac{p'}{qh}$

$= \frac{qh}{qh} = 1$ & facto $\frac{p}{qh} = \frac{qh}{qh} = 1$, ſit $\frac{p'}{qh} = \frac{o}{qh}$: utraque in oppoſita

directione fluente. Sit nunc fluens 2.ª $\left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} - \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}}\right)\right) a$, & di-

viſa per $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{2g+1}$, erit $\dfrac{\left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} - \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g}\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}}\right)\right)}{\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{2g+1}}\, a = \left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} - \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g}\left(1-\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p}{qh}}\right)\right) a$ 3.ª

facto tranſitu a Logiſticæ ramo deſcendente ad aſcendentem, eodem ſyſtema-

te S A manente intacto: fluentes vero 2.ª $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+\frac{p}{qh}} \cdot a$, 3.ª $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1-\frac{p'}{qh}} \cdot a$: facto &

hic $\frac{p}{qh} + \frac{p'}{qh} = 1$. Formulæ igitur §. 22. ut hiſce omnibus & ſingulis conditionibus ſatisfaciant ſequenti modo erunt efferendæ

1.ª $\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} + \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g}\left(\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}} - 1\right)\right) a = \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+\frac{p}{qh}} \cdot a$ : 2.ª $\left(\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} - \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g}\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}}\right)\right) a = \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+\frac{p}{qh}} \cdot a$

1.ª

$$4.^a\left(\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1}+\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1}\left(\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p'}{qh}}-1\right)\right)a=\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1-\frac{p'}{qh}}.\,a : 3.^a\left(\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1}-\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1}\left(1-\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p'}{qh}}\right)\right)a=\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1-\frac{p'}{qh}}.\,a,$$

posito semper $\frac{p}{qh}+\frac{p'}{qh}=1$. Tam 1.ª & 2.ª; 4.ª & 3.ª; quam 1.ª & 4.ª; 2.ª & 3.ª eodem gaudent logarithmo, sed 1.ª, 2.ª; 4.ª & 3.ª per eandem directionem fluunt & ad diversum systema pertinent: at tam 1.ª & 4.ª; quam 2.ª & 3.ª oppositis directionibus progrediuntur, & in eodem systemate continentur.

§. 31. Aptemus nunc eo meliori, quo fieri potest, modo nostris formulis formulas communes, ut quid ex istis erui possit re ipsa experiamur. Et quoniam in 1.ª $\frac{y}{a}=\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{1}$, facta substitutione vocato elemento minimo $=dy$, erit

$$1.^a\left(\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g}+\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g}\left(\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}}-1\right)\right)a=\left(\tfrac{y}{a}\right)^{g}a+\left(\tfrac{y}{a}\right)^{g}dy=\left(1+\tfrac{dy}{a}\right)\left(\tfrac{y}{a}\right)^{g}a$$

$$4.^a\left(\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1}+\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1}\left(\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p}{qh}}-1\right)\right)a=\left(\tfrac{a}{y}\right)^{g+1}a+\left(\tfrac{a}{y}\right)^{g+1}dy=\left(1+\tfrac{dy}{a}\right)\left(\tfrac{a}{y}\right)^{g+1}a$$

posito in utraque $y=\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{1}a$:

$$2.^a\left(\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g}-\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g}\left(1-\left(\tfrac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{\frac{p}{qh}}\right)\right)a=\left(\tfrac{y}{a}\right)^{g}a-\left(\tfrac{y}{a}\right)^{g}dy=\left(1-\tfrac{dy}{a}\right)\left(\tfrac{y}{a}\right)^{g}a$$

$$3.^a\left(\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1}-\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1}\left(1-\left(\tfrac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p}{qh}}\right)\right)a=\left(\tfrac{a}{y}\right)^{g+1}a-\left(\tfrac{a}{y}\right)^{g+1}dy=\left(1-\tfrac{dy}{a}\right)\left(\tfrac{a}{y}\right)^{g+1}a$$

posito in utraque $y=\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{1}a$.

Hujusmodi tamen formulas ad normam vulgatæ Analyseos conformatas, si soli-

litariæ ſumantur, quotuſquiſque erit, qui quid ſignificent clarius intelligat; notiones ac naturas diverſas ſimilitudine & identitate ſymbolorum, quæ continent, probe ſecernat; limites ſtatuat, ac qui ſunt diverſi, fluentibus in oppoſita directione progredientibus, recte præſcribat; fluentes rami Logiſticæ aſcendentis a fluentibus rami Logiſtieæ deſcendentis natura prorſus oppoſitas diſtinguat, niſi formulas communes nimis indeterminatas cum meis conferat, & pro re nata ad uſum traducat? Quod ſi termini differentiales tantum ſe ſe offerant ad integrationem perducendi, ut quæ & quanta ſit communis methodi imbecillitas in hoc agendo cognoſcatur, quid doceat noſtra methodus primum audiamus. Ex noſtris formulis ſuperioribus cum communibus collatis erit in

1.ª $S\left(\frac{y}{a}\right)^{g} dy = \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+\frac{p}{h}} a - \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} a$ : intra limites $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} a$ min : & $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1} . a$ max: valitura

4.ª $S\left(\frac{a}{y}\right)^{g+1} dy = \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1-\frac{p}{h}} . a - \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1} a$ : intra limites $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1} a$ min: & $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} . a$ max:

2.ª $S\left(\frac{y}{a}\right)^{g} dy = \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} a - \left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+\frac{p}{h}} . a$ : intra limites $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g} . a$ max: & $\left(\frac{n}{m}\right)_{\overline{1}}^{g+1} . a$ min:

3.ª $S\left(\frac{a}{y}\right)^{g+1} dy = \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1} . a - \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1-\frac{p}{h}} . a$ : intra limites $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g+1} a$ max: & $\left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{g} . a$ min:

a quarum ſingulis inſuper eruitur, quæ ſit conſtans, cui addenda vel a qua ſubtrahenda ſit quantitas integrata, ut habeatur fluens exponentialis quæſita. At vulgata Analyſis cum univerſim, quæcumque ſit natura illa quantitatis quæ ſub ſymbolis $y$, $dy$ nimis generalibus & abſtractis omnino ignota manens illi ſe ſe offert, formulam quamvis ſub eadem ſpecie tenus forma contentam eadem ſemper methodo integrandam docuerit; univerſim ſtatuit

eſſe $S\left(\frac{y}{a}\right)^{g} dy = \frac{1}{g+1} . \frac{1}{a^{g}} y^{g+1}$; & $S\left(\frac{a}{y}\right)^{g+1} dy = \frac{-1}{g} a^{g+1} . \frac{1}{y^{g}}$ : quo facto rem actu tetigiſſe ſibi blanditur: nihil ſuſpicans in hiſce formulis exponentialibus

libus $\left(\frac{y}{a}\right)^{\pm g}$ coefficientem numericum naturam constantis assumere, & $dy$ differentiam abstractam inter finitam exponentialem datam & fluentem infinite proximam referre. Hinc cum prorsus ignoret quid sibi velit hæc sua integratio, in qua $y^{\pm g \pm 1}$ a natura ad naturam, a dimensione ad dimensionem perpetuo transit, nihil ultra procedit, constructione geometrica prorsus posthabita.

§. 32. Ubi vero ventum est ad formulam $\frac{a\,dy}{y}$ aqua illi omnino hæret, & quo se vertat nesciens formulam hanc, quæ suo more integrata $S\,\frac{a\,dy}{y} = \frac{a}{1-1} \cdot y^{1-1}$ functionem omnino imperviam exhiberet, integrationem communem natura sua omnino respuere docet, & ad Logisticam quovis modo confugere oportere. Verum ex nostris formulis eruitur hanc ipsam facto $g = 0$ communem formulæ nostræ 4.ª & 3.ª duplici modo ad integrationem perduci posse. Nam ex 4.ª habetur $\frac{a\,dy}{y} = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}} - 1\right) a$: ergo $S\,\frac{a\,dy}{y} = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{h}} - 1\right) a$ intra limites $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$ minimum, & $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{0} a$ maximum: refluente exponentiali in ramo descendente a basi $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1} a$ usque ad pronumerum $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{0} a$: atque ideo in primo limite minimo elementum $dy$ prorsus nullum, ab hoc discedens successive per minimum crescit donec $p$ facto $= q, 2q \ldots\ldots hq$ fit finitum, crescitque fluens successive ob exponentem

tem $\frac{-1}{h}$, $\frac{-2}{h}$ . . . $\frac{-h}{h}$ donec ex punctis $\frac{-1}{h}f$, $\frac{-2}{h}f$ . . . $\frac{-h}{h}f$ in protonumerum perventa, fit maxima, & elementum $dy$ maximum $= \left(\frac{n}{m}\right)^{0}_{\overline{1}} a - \left(\frac{n}{m}\right)^{1}_{\overline{1}} a$ $=$ MH $+$ $mh$ (Tab. VI. *Fig.* 2.) per §§. 26., 27. Ex 3.ª vero $\frac{a\,dy}{y}$ $= \left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\overline{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p}{qh}} - 1 \right) a$, & S $\frac{a\,dy}{y} = \left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\overline{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\overline{1}}^{-\frac{p}{h}} - 1 \right) a$ intra limites $\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\overline{1}} a$ maximum, & $\left(\frac{m}{n}\right)^{0}_{\overline{1}} a$ minimum, refluente exponentiali in ramo ascendente a basi $\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\overline{1}} a$ usque ad protonumerum $\left(\frac{m}{n}\right)^{0}_{\overline{1}} a$: & in primo limite maximo $\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\overline{1}} a$ erit $dy$ prorsus nullum, sed refluente versus protonumerum, exponentiali semper diminuta ut supra, crescit differentia & elementum $dy$, donec in limite minimo $\left(\frac{m}{n}\right)^{0}_{\overline{1}} a$ fit maximum $=$ M G $+$ $mg$ §§. 26., 27.

Quare luce clarius patet a nostris formulis demonstrari differentiale $\frac{a\,dy}{y}$, non solum facile contra universim præoccupatam opinionem integrari posse, & ad finitum sine ullo *transscendentalis vocabuli* suffragio perduci, sed etiam in ipsa Logistica oculis ipsis subjici totam hujusce fluxionis intra suos limites œconomiam, qua fluens intermedia ab uno dato limite ad datum proximiorem aucta vel diminuta regitur, & in quot punctis intermediis datis secundi generis ope

ope exponentis finiti $\frac{p}{b}$ intra quosvis limites datos primi generis determinatur.

§. 33. Recte firmata §. superiori notione formulæ $\frac{a\,dy}{y}$ nimis indeterminatæ nostrarum formularum comparatione, ad æquationem differentialem II.am $\frac{c\,dy}{y} = dx$ passim usurpatam iterum revertamur. Analysis vetus postquam statuerit $\frac{c\,dy}{y}$ nullo modo integrari posse, ad Logisticam se convertit, ut *calculo* saltem, ut ait, *transcendentali* utpote validiori quod algebraico interdictum credit, prospere consequatur. Jam diximus §. 15, 16. in hac formula litteram $c$ contra communem opinionem non subtangentem, sed logarithmum $f$ basis significare (cui tamen semper subtangens constans æquatur); & differentiale $dy$ nihil aliud esse nisi portionem minimam cujusvis $y$ exponentialis (quæ ut constans sumenda est) divisam per eumdem denominatorem infinitum, quo dividitur ejus logarithmus, ita ut sit $dy : dx :: \frac{y}{qb} : \frac{f}{qb}$, & $dx = \frac{f}{qb} \cdot \frac{dy}{\frac{y}{qb}}$: sed ex mea Theoria $dx = \frac{f}{qb}$, ergo ut ejus valor iterum in secundo membro restituatur sit oportet $dy = \frac{y}{qb}$: quæ in ramo descendente C Q (Tab. VIII. *Fig.* 15.) demitur ab A C, estque C G, & remanet A G $=$ D H semper minor exponentiali in puncto D: at in ramo ascendente C P facta A d $=$ A D $= dx$ additur ipsi A C, estque C g $=$ C G, & fit A g $=$ d h semper minor exponentiali in puncto $d$: ac proinde ipsa A C immota manente in primo casu decrementum semper minus, in secundo incrementum fluentis exponentialis semper majus decremento C G, incremento C g. Hinc elementum $dy$ formulæ II.æ $f\frac{dy}{y} = dx$ nullo modo cum elemento $\frac{a\,dy}{y}$ fluentis exponentialis confundi potest, & alterutrum in calculo promiscue usurpari. Nunc addas velim esse ex communi doctrina $f\frac{dy}{y} = dx = \frac{dx}{f} \mathrm{L}\left(\frac{m}{n}\right)^{\pm 1}_{\;1} \cdot a$, & $y$

$$= \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{dx}{f}} . a : \text{ ergo } dy = \frac{y}{f}\, dx = \frac{p}{qb} . \frac{f}{f} . \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{dx}{f}} . a = \frac{p}{qb}\, y .$$

Hoc vero ulterius evincitur ex universim recepta methodo differentiandi formulam exponentialem $y = \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ ( vide Inst. Analyt. Riccati T. II. Cap: IX. §. 9.) . Nam jubemur primum sumpta $y = \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$ transitum facere ad logarithmos, ut sit $\mathrm{L}\, y = \frac{x}{f}\, \mathrm{L} \left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1} . a$, deinde formulam differentiare hoc modo $\frac{c\, dy}{y} = dx$, ergo $dy = \frac{y}{c}\, dx = \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a . \frac{dx}{c}$, quod afferitur verum differentiale quæsitum : tnm enim ( ex Auctoris loco citato ) habetur *differentia quantitatis exponentialis si eam multiqlicatam per* $dx$ *dividas per systematis logarithmici subtangentem*. Quæ doctrina tamen ne fallax sit, loco subtangentis ponendus est $f$ logarithmus basis. Nam in $dy = \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a . \frac{dx}{c}$, posito $\frac{p}{qb}\, f$ loco $dx$, erit $dy = \frac{p}{qb} \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} a . \frac{f}{c}$ : sed subtangens $c$ ex nostra Theoria $= f$; ergo $dy = \frac{p}{qb} \left(\left(\begin{smallmatrix} m \\ \overline{n} \\ \overline{1}\end{smallmatrix}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} . a = \frac{p}{qb}\, y$.

At

At in communi methodo ignorato vero valore subtangentis, quæ malo loco $f$ in æquatione ponitur, nunquam poterit verificari. Quare satis superque demonstratam arbitror in formula II.ª $\frac{c\,dy}{y} = dx$ universim usurpatam $c$ esse logarithmum $f$ basis, $y$ quamvis fluentem exponentialem $\left(\left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} a$ non fluentem sed fixam atque ideo ut constantem sumendam, $dy$ elementum minimum $= \frac{p}{qh}\, y$ ipsius $x$; & $dx = \frac{pf}{qh}$ minimam distantiam ab hac fluente fluentis infinite proximæ $\left(\left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}+\frac{dx}{f}} .\, a = \left(\left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{p}{h}+\frac{p}{qh}} .\, a$.

§. 34. Hæc tamen II.ª quam longe distet a formula $\frac{a\,dy}{y}$ §. 32. satis superque superius demonstratum vides: licet a communi methodo identitate symbolorum, quibus tantum utitur, incaute decepta una & eadem judicetur. Nam in formula $\frac{a\,dy}{y} = \left(\underset{1}{\underline{\frac{n}{m}}}\right)^{1} \left(\left(\underset{1}{\underline{\frac{n}{m}}}\right)^{\frac{-p}{qh}} - 1\right) a$, $a$ significat protonumerum exponentialis; $\frac{a}{y} = \left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{-1}$ coefficientem inversum coefficientis basis $\left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{1} a$, ut intelligatur in systemate fluentium SY ad ramum ascendentem pertinentium transitum factum fuisse ad ramum descendentem fluentium SA, quin systema primum SY ullam patiatur mutationem. Contra in $\frac{a\,dy}{y} = \left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{1} \left(1 - \left(\underset{1}{\underline{\frac{m}{n}}}\right)^{\frac{-p}{qh}}\right) a$, $\frac{a}{y}$ indicat in systemate SA a ramo descendente ad ramum ascendentem tran-

ſitum factum ſine mutatione ſyſtematis S A: in qua utraque ramorum mutatione fluentes fluxu ſuo ab extremo ſuo limite verſus protonumerum iterum regrediuntur ad alterum limitem perventuræ. Tandem differentiale $dy$ repræſentat in prima $\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}} - 1\right) a$; in ſecunda $\left(1 - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}\right) a$ incrementum vel decrementum minimum, quod ductum in $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}$ oſtendit differentiam maximam fluentis exponentialis a ſua conſtante $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1} a$ infinite proxima. In hac formula non invenies elementum logarithmi $dx$, ſive $\frac{p}{qh} f$, quod nihil influit ad fluentem exponentialem diverſimode afficiendam: cum idem ſemper maneat $\frac{a\,dy}{y} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{f}{f}} \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{-\frac{p}{qh}\frac{f}{f}} - 1\right) a = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{g}{g}} \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{-\frac{p}{qh}\frac{g}{g}} - 1\right) a$ &c. quicumque ſit logarithmus baſis $f$, vel $g$, vel &c. Vidimus enim $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{1-\frac{p}{qh}} . a$ ſyſtema exponentiale conſtituere, cuicumque logarithmo aptandum: quemadmodum in II.ª $\frac{f\,dy}{y} = dx$, ſive $dx = \frac{p}{qh} f$ ſolitarium ſyſtema continens logarithmicum, nihil pendet ab $\frac{a\,dy}{y}$ exponentiali, evaneſcente $\frac{dy}{y}$.

§. 35. Errat igitur vetus Analyſis, quæ docet formulam $\frac{f\,dy}{y} = dx$ eſſe æqua-

æquationem differentialem Logiſticæ, qua relatio inter minimam abſciſſam & ordinatam infiniteſimam exhibetur: quæ cum ad finitam traducere nequeat, Logiſticam Curvam tranſcendentem appellat: cum tamen nec in infiniteſimis hæc relatio inveniri poſſit, cum $\frac{f\,dy}{y} = dx$ nonniſi ſpatium a quacumque exponentiali deſcribendum abſtracte ſumptum $\frac{p}{qh} f$, ut ſuperius diximus, indigitet: nec inter hanc & illam $\frac{a\,dy}{y}$ a mea Theoria propoſitam elementum minimum ordinatæ vere referentem, ulla neceſſaria affinitas poſſit intercedere. Hoc & ipſa Analyſis vetus inſcia docet, quando docet eſſe $dx = \frac{dx}{f}\ \mathrm{L}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1} a$, & $x = \frac{x}{f}\ \mathrm{L}\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1} a$, a qua ad exponentialem, tranſitu facto ait eſſe $y = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} a$, quæ cum ſit omnino arbitraria & quoad logarithmum baſis, & quoad baſim ipſam, intelligere ſatis poſſet æquationem $\frac{f\,dy}{y} = dx$ determinare non poſſe niſi logarithmum baſis abſtractum, cum ſit $\frac{dy}{y} f = \frac{p}{qh} f = dx$, evaneſcente exponentiali $y$. Addas velim elementum $dy$ in formula $\frac{f\,dy}{y}$ eſſe portionem minimam cujuſvis exponentialis arbitrio ſumptæ ut conſtantis: quovis enim modo exponentialem mutare velis ſemper eadem $dx$ exſurgit, dummodo coefficiens $\frac{p}{qh}$ idem perſeveret. Contra vero in formula $\frac{a}{y}\,dy$, eſt $dy = \left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{h}} - 1\right) a$, vel $= \left(1 - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}\right) a$; & in

for-

formula $\frac{y}{a}dy$, est $= \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}} - 1\right)a$, vel $= \left(1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}\right)a$ elementum ordinatæ vere fluens a $p = o$ usque ad $p = qh$, sive a *zero* absoluto per omnes intermedios minimos & finitos valores successive transiens usque ad ultimum finitum $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right) - 1\right)a$. Quare verum differentiale ordinatæ fluentis exponentialis erit $D\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{x}{f}} a = \left(\frac{y}{a}\right)^{\pm g} dy = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}} - 1\right)a$, vel $= \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(1 - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}}\right)a$; vel $\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g}\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}} - 1\right)a$, vel $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g}\left(1 - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{-\frac{p}{qh}}\right)a$ a mea Theoria inventum, non $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm\frac{x}{f}} a \frac{dx}{c}$, quod vulgata Analysis hactenus venditavit.

§. 36. Restat paucis exploranda communis Analyseos æquatio III.a $x = ly$, quæ sufficitur in locum $S\frac{fdy}{y}$ II.æ, quam integrationem omnimo respuere dicitur, ideoque facta $S\frac{fdy}{y} = x$, transitus fit ad $x = ly$ III.am. Ac primum non video cur necesse sit integratione, ut ad hanc perveniatur, cum eadem ratione, posita $\frac{fdy}{y} = dx$, recte fieri possit $ly = dx = \frac{dx}{\pm f} . L\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}.a$

&c

& tranſitu facto a logarithmo ad fluentem $y = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{dx}{\pm f}} . a$ : cum tam illi, quem huic fluens ſemper exponentialis finita reſpondeat. Inſuper hæc ultima in eo alteri præſtat, quod cum integrale $\frac{dx}{f}$ completum §. 12. oſtenderimus eſſe $\frac{g.\pm f + x}{\pm f}$, integrato hujuſce ultimæ exponente, erit $y = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g+\frac{p}{h}} . a$, qua puncta data primi generis exhibentur, intra quæ fluens exponentialis hujuſce formulæ determinari poſſit in punctis datis ſecundi generis, nempe $\frac{o}{h}.\pm f$, $\frac{1}{h}..\pm f$, $\frac{2}{h}.\pm f$, &c. ut diximus. Cæterum ex hac ipſa æquatione III.ª $x = ly$, utpote omnino & abſolute indeterminata nihil erui poteſt quod conducat, niſi in meam formulam convertatur. Quid enim aliud nos ipſa docet, niſi quod in quavis Logiſtica, quæcumque ſit fluens exponentialis $y$, hæc ſemper diſtabit a ſuo protonumero quavis diſtantia $x$, quæ ejus logarithmus univerſim appellatur; Sed quis eſt, qui Logiſticæ natura quovis modo cognita, hoc ignoret? Non video tamen ex hac abſtractiſſima propoſitione quid utilitatis erui poſſit in caſibus peculiaribus, quin prius natura & ſpecies Logiſticæ rigide determinetur; quæ ſit fluens exponentialis in quovis ramo Logiſticæ; intra quos limites fluat; quo modo ab uno dato limite primi generis per minimum fluendo aucta vel diminuta in quot punctis ſecundi generis determinetur, ac in alterum extremum limitem primi generis tandem deſinat, ex quo nova iterum vel primæ æquali, vel diverſa fluendi ratione inſtituta, alterum limitem attingat, & ſic ſucceſſive ad infinitum hinc inde a protonumero progrediatur: quæ omnia ac ſingula a noſtra formula $y = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{dx}{\pm f}} . a$ ( integrato pro re nata exponente, ut ſit $y = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{\frac{g.\pm f}{\pm f} \pm \frac{x}{\pm f}} . a = \left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{g \pm \frac{p}{h}} . a$ ), ut docuimus, declarantur, & exhibentur.

ut

§. 37. Hisce demonstratis clare, ut arbitror, demonstrata etiam manet imbecillitas principiorum, quibus hactenus nititur *Calculus exponentialis*, & *logarithmicus* communis una cum principiis *Calculi differentialis & integralis* quorum uterque, utpote finito validior atque tutior creditus, specioso calculi *sublimis* vocabulo condecoratur: qui tamen singuli quantum adhuc ab ea, quæ creditur, præstantia & certitudine longe absint, quæ leviter perstrinxi, satis aperte declarant. Insuper nova hac meæ Theoriæ luce exorta celebrem illam de *logarithmis numerorum negativorum* quæstionem omnino a mea Theoria definiri, & Bernullianis adjudicari quæ diximus a §. 7. usque ad §. 11. aperte declarant: cum ea tantum ratione sustinebatur, quod utraque pars methodo, quam unam adhuc norunt, utebatur inepta & a veritate prorsus aliena. Supervacaneum igitur est, & nimis a re, de qua nunc agimus, alienum, singula argumenta hinc inde allata, atque illa præsertim a spatiis hyperbolicis ipsa sua obscuritate satis tuta, & a formulis imaginariis natura sua falsis deprompta (ne in immensum crescat Opus) singillatim expendere; cum hæc omnia ac singula sint in progressu Operis excutienda: atque eo magis, quod quæstio hæc ab ipsa tantum veræ formulæ exponentialis inspectione $M = \left( \left( \frac{\frac{m}{n}}{1} \right)^{\pm 1} \right)^{\frac{x}{f}} \cdot \pm a$ Cap: XIII. §. 19. Coroll. 2. indicatæ statim evanescit. Non est tamen silentio prætereunda celeberrima illa M.a immortalis Viri Euleri in Actibus Berolinensibus anno 1749. edita, in qua Auctor caussam hanc ita egisse sibi & aliis videtur, ut nullus amplius de veritate Leibnitianæ opinionis ambigendi locus relinquatur. Quæ Viri auctoritas & merito quidem tanta est ut Analystas nostri temporis fere omnes in suam sententiam traxerit, quicquid pauci numero, sed acutissimi contra sentiant. Cum vero hujusmodi Auctoris disquisitio principiis, quæ a mea Theoria falsitatis damnantur, nitatur, brevi me expediam, evidenter demonstrando fundamentum, quo tota ejus superstruitur ædificatio, nullo modo cum veritate conciliari posse: cætera quæ sequuntur ipsa per se necessario corruent.

§. 38. Fundamentum igitur quo tota nititur Auctoris disquisitio, illud est, quod scilicet si ponatur $\omega$ numerus infinitesimus, erit ex communi doctrina logarithmus hyperbolicus numeri $1 + \omega = \omega$ : atque ideo $l\,(1 + \omega) = \omega$, $l\,(1 + \omega)^2 = 2\omega$, $l\,(1 + \omega)^3 = 3\omega$ &c. Sed quoniam $\omega$ est minimus, evidens est numerum $(1 + \omega)^n$ non posse finitum numerum quæcumque $n\omega$ constituere, nisi $n$ sit infinitus: itaque si sit $y$ quivis numerus finitus erit $y = (1 + \omega)^n$, cujus logarithmus $ly = x = n\omega$. Verum ut exprimatur $x$

per

per $y$, sive logarithmus per numerum, cum sit $(1+\omega)^{n} = y$, fieri debet $1+\omega = y^{\frac{1}{n}}$, & $\omega = y^{\frac{1}{n}} - 1$, & $x = n\omega = ny^{\frac{1}{n}} - n = ly$. Sed cum $n$ sit infinitus, patet $y^{\frac{1}{n}}$ infinitis valoribus diversis affici oportere, ac proinde etiam $n\omega = x = ny^{\frac{1}{n}} - n$ infinitis valoribus obnoxium esse, quorum unus est realis, cæteri singuli imaginarii. Sed posito $y = 1$, fit $x = n.1^{\frac{1}{n}} - n$, & $1 + \frac{x}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$, & $1 + \frac{x}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$, ac tandem $(1 + \frac{x}{n})^{n} - 1 = 0$: quæ æquatio ab hac pendet $p^{n} - q^{n} = 0$, posito $p = 1 + \frac{x}{n}$, $q = 1$. Verum ex Theoria vulgata æquationum $p = 1 + \frac{x}{n} = 1 \pm \sqrt{-1}.\frac{2\Lambda\Pi}{n}$; ergo $\frac{x}{n} = \pm \frac{2d\Lambda\Pi}{n}\sqrt{-1}$, & $x = \pm 2\Lambda\Pi\sqrt{-1}$, posito $\Pi$ angulo gr: 180., & $\lambda =$ successive $0, 1, 2, 3 \ldots$ usque ad infinitum: at in eo tantum casu $x$ est realis, in quo $\lambda = 0$, ergo $x = 0$ est logarithmus unicus realis numeri $1$: cæteri imaginarii. Eodem ratiocinio, posito $-1$, invenit Auctor $x = \pm (2\lambda - 1)\Pi\sqrt{-1}$ qui sunt singuli imaginarii. Ergo logarithmi numerorum negativorum sunt singuli imaginarii. Q. E. D.

§. *39*. Acutissime quidem & necessario nexu singulæ Auctoris deductiones procedunt, sed lubrico nixæ principio, nullo licet vitio argui possent, omnes simul cum ipso corruant necesse est. In ipsa enim prima formulæ conformatione tam gravia objicienda occurrunt, ut hæc sufficiant ad cætera, quæ sequuntur a falsa origine derivata labefactanda, quin ad methodum solutionis æquationis altioris gradus, & quidem infiniti a vulgata Analysi depromptam, ad quam pervenit Auctor, confutandam hîc diutius immorari necesse sit. Quæ tamen & in P. I.ª & in *hac* de simpliciorum æquationum solutione tradidimus satis aperte declarant, quæ & quanta adhuc supersint ad solutionem æquationum ulterioris gradus in tuto collocandam, ut huic fidissimæ tamquam duci omnino fidendum sit. Ut vero ad id, quod volumus, accedamus primum definiendum est quid vulgo nomine systematis logarithmorum hyperbolicorum intelligatur. Cum tria in quovis systemate logarithmico ex doctrina vulgatæ

Analyſeos data prius ſint oporteat, protonumerus ſcilicet, logarithmus baſis, & ſubtangens, ſyſtema logarithmicum hyperbolicum illud dicitur, in quo datur protonumerus, & ſubtangens æqualis protonumero: quemadmodum vulgare illud, in quo datur protonumerus cum logarithmo baſis æquali protonumero. Verum cum nos demonſtraverimus §. 17. ſubtangentem conſtantem cujuſvis Logiſticæ eſſe ſemper æqualem logarithmo baſis, ad conſtituendum quodvis exponentiale ſyſtema *integrum* ex *Cap: ſuperiori* tria ſint prius data oportet: protonumerus ſcilicet, baſis, & logarithmus baſis. Datis quoad valorem tantum protonumero & baſi habetur ſyſtema exponentiale ſolitarium: ex utriuſque enim valore facile utriuſque forma invenitur, quam requirunt: dato tantum logarithmo baſis ſtatim habetur ſiſtema logarithmicum ſolitarium, quod non eſt niſi ſpatium abſtracte ſumptum ſub ſyſtemate protonumeri æqualis logarithmo baſis concluſum. Dato tantum protonumeri valore & logarithmo baſis ſyſtema erit abſolute indeterminatum quoad baſim, quæ non niſi arbitrio determinari poterit: ſic erit abſolute indeterminatum ſiſtema, ſi detur tantum baſis valor & logarithmus baſis: dato enim tantum baſis valore infinitimode variare poteſt ejus coefficiens, & protonumerus, ex quorum producto baſis conſtat. Verum

ſi habeatur vera forma protonumeri, nempe $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{0} \cdot a$, & logarithmus baſis; vel vera forma baſis nempe $\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\pm 1}\right)^{1} a$, & logarithmus baſis, ſyſtema integrum exponentiale neceſſario determinatur. Rectius igitur arbitramur dividi poſſe quodcumque ſyſtema exponentiale *integrum* in hæc duo ſyſtematum genera. Primi generis erit illud, in quo fluens exponentialis inter utroſque Logiſticæ aſcendentis ramos intercepta eſt ſumma fluens fluentium homologarum ſyſtematis ſimplicis SY, quæ fluentes cum ſint fluentes homologæ ad Hyperbolen (Lib: II. P. I.ª) jure dicetur a nobis *Syſtema hyperbolicum exponentiale*,

& ejus generalis formula $M = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} \cdot a$. Illud vero ſyſtema, cujus fluens exponentialis inter ramos Logiſticæ deſcendentis interjecta eſt differentia fluens fluentium homologarum ſyſtematis SA (quæ loco citato ſunt fluentes homologæ ad Circulum pertinentes) *ſyſtema exponentiale Circulare* appellavimus, cujus

for-

formula generalis $M = \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{\frac{x}{f}} . a$. Sed de his enucleatius, & ordine suo loco.

§. 40. Ratio vero cur in vulgata Analysi (ut Auctor asserit) statutum universim fuerit in systemate generis *hyperbolici*, posito $\omega$ numero infinitesimo, esse oportere hunc $\omega$ numerum infinitesimum æqualem incremento minimo numeri $1 + \omega$ infinite proximi protonumero, atque etiam ejus logarithmi vicem subire ( nempe $l\,1 + \omega) = \omega$) a male intellecta formula II.$^a$ $\frac{c\,dy}{y} = dx$ est repetenda. Nam cum in hac formula $c$ credatur subtangens, & $dy$ supponatur elementum minimum ordinatæ $y$ infinite proximæ, si in hac ponatur protonumerus æqualis subtangenti $c$, erit in hoc casu $\frac{c\,dy}{y} = \frac{c\,dy}{c} = dx$ : atque ideo minimus logarithmus $dx$ dicitur æqualis minimo incremento $dy$ (sive $\omega$ Auctoris) ordinatæ infinite proximæ protonumero $c$, cui æquatur subtangens. Verum jam satis superque superius, & præcipue §§. 31, 32, 33 demonstratum est, quid sit $dy$ formulæ II.$^a$, & quam longe distet a $dy$ incremento minimo cujusvis fluentis exponentialis: quæ elementa diversæ prorsus naturæ nullo modo inter se confundi possunt, neque comparari. Primum enim est $\frac{p}{qh} f$, quod nihil pendet a valore exponentialis $y = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{qh}\frac{f}{f}} . a$, quicumque sit coefficiens $\frac{\frac{m}{n}}{1}$, sed a situ in quo fluens ipsa consistit: estque revera $\frac{p}{qh} f$

$$= L\left(\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{o+\frac{p}{qh}} - \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{o}\right) a\right), \text{ vel } = L\left(\left(\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{o} - \left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)^{g+\frac{p}{qh}}\right) a\right),$$

sive æqualis differentiæ spatii, quod intercedit inter fluentem infinite proximam protonumero, & ipsum protonumerum: aliter $\frac{p}{qh} f$ tam esset æqualis

lis $\left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0+\frac{p}{qh}} - \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} \right) a$, quam $\left( \left(\frac{n}{m}\right)_{\bar{1}}^{0} - \left(\frac{n}{m}\right)_{\bar{1}}^{0+\frac{p}{qh}} \right) a$, quod repugnat. Quare reprobata æquatione Auctoris $l\,(1+\omega) = \omega$, tota ejus M.[a], quæ ut inveniat logarithmum per numerum hoc uno principio nititur, & ipsa corruat necesse est.

§. 41. Nihilo tamen minus ad hanc opinionem tanti Viri auctoritate suffultam penitus evellendam, quædam alia non minus gravia impedimenta in hac ipsa formulæ conformatione, quo minus legitima dici possit, breviter hîc perstringam. Ac

1.° Formula Auctoris ut nostris formulis comparetur, fac protonumerum $a = 1$; $p = 1$; $b = 1$ : $q = n$ infinito, & erit fluens exponentialis infinite proxima protonumero (ut vult Auctor) intra limites $\left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} a$, & $\left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{1} a$, $1+\omega$ $= \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} + \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{\frac{1}{q}\frac{f}{f}} - 1 \right) \right) a$, quæ est 1.[a] §. 31. ad Logisticam ascendentem: ideoque $\omega = \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} \left( \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{\frac{1}{q}} - 1 \right) a$ minimum incrementum hujusce fluentis supra protonumerum; $1 = \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} . a = \left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{0} . 1$, æquales quidem ambæ valore, sed non forma, quam 1 necessario assumat necesse est, ut mutatis limitibus ex: gr: $\left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{g} . a$, $\left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{g+1} . a$, 1 transmutari possit in $\left(\frac{m}{n}\right)_{\bar{1}}^{-g} a$, sitque

$1+\omega$

$1+\omega = \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}}_{\bar{1}} - 1 \right) \right) a$, in quo casu $\omega = \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}_{\bar{1}} - 1 \right) a$,

& $1 = \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} . a$. Ergo 1 non nisi sub hac forma $\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a$ legitime efferri potest.

2.° Ex §. 25. evincitur, quam male Auctor doceat, ut ab una fluente ad aliam infinite proximam & sic successive transitus fiat, formulam $1+\omega$ ad potestatem 1, 2, 3 . . . elevandam esse; cum illic ostenderimus in locum ex: gr: $(1+\omega)^{g}$ substituendam esse $1+g\omega$. ut veræ formulæ $\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{g}{q}}_{\bar{1}} - 1 \right) a$ exacte respondeat.

3.° Ut vero a fluente infinite proxima protonumero ad fluentem finita distantia dissitam perveniat, hoc est ab incremento minimo ad finitum transeat ( quod integrare vulgo dicitur ), Auctor utitur formula $(1+\omega)^{n} = y =$

$= \left( \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}_{\bar{1}} - 1 \right) \right) a \right)^{q}$ loco $\left( \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{q}{q}}_{\bar{1}} - 1 \right) \right) a$

$= \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\bar{1}} - 1 \right) \right) a$: a qua iterum, extracta radice $n$, pervenit

ad æquationem $\omega = y^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}_{\bar{1}} - 1 \right) a$ (quæ est vera), ut inde transeat ad $n\omega = x = ny^{\frac{1}{n}} - n = q \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} \left( \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}_{\bar{1}} - 1 \right) a$, quæ longe

a ve-

a veritate abludit: cum §§. 23, 24 demonstratum fuerit, esse revera $n\omega = x = y^{1} - 1 = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{q}{q}} - 1\right)a$. Ex quo iterum deducitur, quod si $n\omega = x$ logarithmum referret; esset etiam incrementum finitum basis $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1}a$ supra protonumerum æquale logarithmo basis quovis $f$, $g$, &c: quod repugnat mirum quantum!

4.° Reformata formula $n\omega = x = ny^{\frac{1}{n}} - n$, & ad legitimam traducta $n\omega = x = y^{1} - 1 = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} - 1\right)a$, si hæc dividatur, ut vult Auctor, per $n$, ut ad primam $\omega$ iterum te transferas, in hanc offendens $\omega = \frac{x}{n} = \frac{y^{1}-1}{n} = \frac{\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} - 1\right)}{q}a$ a nostra Theoria falsitatis damnata.

5.° Sumpta falsa æquatione $n\omega = x = ny^{\frac{1}{n}} - n$ (loco veræ $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} - 1\right)a$. ex doctrina vulgatæ Analyseos asserit Auctor hanc infinitis valoribus obnoxiam esse, ob $y^{\frac{1}{n}}$ infinitarum radicum capax, quarum tamen una tantum est realis, cæteræ imaginariæ. Verum a legitima $n\omega = x = y^{1} - 1 = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{1} - 1\right)a$

do-

docemur, manente eodem coefficiente $\frac{\frac{m}{n}}{1}$ sive eadem Logistica, $n\omega$ non nisi hunc valorem obtinere posse: quid igitur mirum si cæteri valores prorsus infiniti, qui non sunt, nec esse possunt in vera formula, imaginarii inveniantur.

§. 42. *6.°* Insuper sumpta ab Auctore tamquam legitima æquatione generali cujusvis fluentis $n\omega = x = ny^{\frac{1}{n}} - n$, ut hanc ad protonumerum significandum Auctor traducat, ponit $y = 1$, & æquationem generalem in hanc peculiarem convertit $n\omega = x = n.1^{\frac{1}{n}} - n$, quæ præter errorem eumdem, quo inficitur generalis, alio etiam laborat. Nam cum in vera formula $y = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{1}{q}}.a$, coefficiens $\frac{m}{n}$ in eodem systemate & in eadem Logistica semper constans maneat necesse sit (ut ostendimus) fluente tantum exponente; nequit $y$ protonumerum fieri, nisi exponens $\frac{1}{q}$ fiat $\frac{0}{q}$: quo facto formula Auctoris in hanc convertitur $n\omega = ny^{\frac{0}{n}} - n = ny^{0} - n$. Vera tamen æquatio in hoc casu est sequens $n\omega = x = y^{0} - 1 = \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0}\left(\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{0} - 1\right) a$, quæ non nisi valore $0$ affici potest: cæteri, qui a methodo nota comminiscuntur, non sunt nisi nostræ mentis a falsa æquatione $n\omega = x = n.1^{\frac{1}{q}} - n$ deceptæ commenta: quos si dicas imaginarios non renuo, dummodo hoc nomine intelligas a vera Calculi subducendi Theoria id proscribi, quod a male instituta methodo tamquam necessarium sed tamen imaginarium venditabatur.

7.° Ex sibi proposita æquatione $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} - 1 = 0$ deducit Auctor, proto-

nu-

numero 1 non nisi logarithmum *zero* realem respondere, cum in hac æquatione evoluta valores singuli infiniti exhibeantur imaginarii, excepto uno reali $o$: perinde ac si singulis istis valoribus imaginariis idem semper protonumerus respondere. Verum ex 6.° patet hanc æquationem sic efferendam esse $(1+\frac{x}{n})^{n} - y^{\frac{n}{n}}$

$\overset{\frac{n}{n}}{=} o$; sed $(1+\frac{x}{n})^{n} = 1 + n\omega = \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\bar{1}} - 1\right) a$;

& $y^{\frac{n}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{o+\frac{q}{q}}_{\bar{1}} . a = \left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\bar{1}} . a$; ergo $\left(1+\frac{x}{n}_{\bar{1}}\right)^{n} - y^{\frac{n}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}}$

$\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\bar{1}} - 1\right) a - \left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\bar{1}} a$: in qua $y$ non est amplius 1 sive protonumerus, sed $\left(\frac{m}{n}\right)^{1}_{\bar{1}} a$ sive basis: nec idem protonumerus $\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a$ manebit, nisi sit

æquatio superior $\left(1+\frac{x}{n}_{\bar{1}}\right)^{n} - y^{\frac{on}{n}} = \left(1+\frac{x}{n}_{\bar{1}}\right)^{n} - y^{o}$

$= \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a + \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} - 1\right) a\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^{o}_{\bar{1}} a$. Universim tamen ex

demonstratis est $1 + n\omega = \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}} a + \left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\bar{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{h}}_{\bar{1}} - 1\right) a$, & $y^{\frac{n}{n}}$

=

$= \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{p}{h}} . a$ : ergo universim $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} - y^{\frac{n}{n}} = \left( \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a + \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} \left( \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} - 1 \right) a \right)$

$- \left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g+\frac{p}{h}} . a = o$ : ex qua illud tantum recte concludi potest æquationem

$\left(1 + \frac{\frac{x}{n}}{1}\right)^{n} - y^{\frac{n}{n}} = o$ utpote absolute indeterminatam infinitis valoribus singillatim obnoxiam fieri, ac singulis realibus, prout mutatur exponens $g$ constantis $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{g} a$ limitis, & exponens fluens $\frac{p}{h}$ fluentis $\left(\frac{\frac{m}{n}}{1}\right)^{\frac{p}{h}} . a$. Hisce tamen mutatis non amplius eadem $y$ in æquatione perseverat, ut supponit Auctor. Cæterum hujusmodi æquatio substitutione veræ formæ, quæ singulis terminis absolute indeterminatis convenit (sine qua solutio, ut in toto hoc Opere ostendimus, obtineri nequit) æquatio quidem erit vera, sed frustranea, utpote identica.

8.° Cum vero Auctor a numeris positivis ad negativos transitum facit, æquationem sibi propositam $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} - 1 = o$ in hanc mutat $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} + 1 = o$, quæ numeris negativis legitime convenire autumat: ex qua cum singulos ex infinitis valoribus imaginarios invenerit, fidenter concludit numeris negativis logarithmos reales repugnare. Fateor equidem & ipse libens in hac ultima Auctoris æquatione repugnantiam vel maximam inesse, cum ipsa natura sua insanabilem contradictionem involvat: quid enim absurdius est quam duos terminos vere positivos, eo ipso tempore quo positivi ponuntur, negativos & identicos supponere, ut invicem subtracti omnino evanescant? si nostræ formulæ consulantur aperte ostendent repugnantiam hanc non in re ipsa, sed in pravitate methodi, qua abutimur, vere inesse. Nam in hoc casu erit $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} . - 1$

$$=\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\overline{1}}+\left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\overline{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{h}}_{\overline{1}}-1\right)\right).-a;\ \&\ -1.y^{\frac{n}{n}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{p}{h}}_{\overline{1}}.-a\text{, ergo}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}_{\overline{1}}.-1+y^{\frac{n}{n}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\overline{1}}.-a+\left(\frac{m}{n}\right)^{g}_{\overline{1}}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{h}}_{\overline{1}}-1\right).-a+\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{p}{h}}_{\overline{1}}.a$$

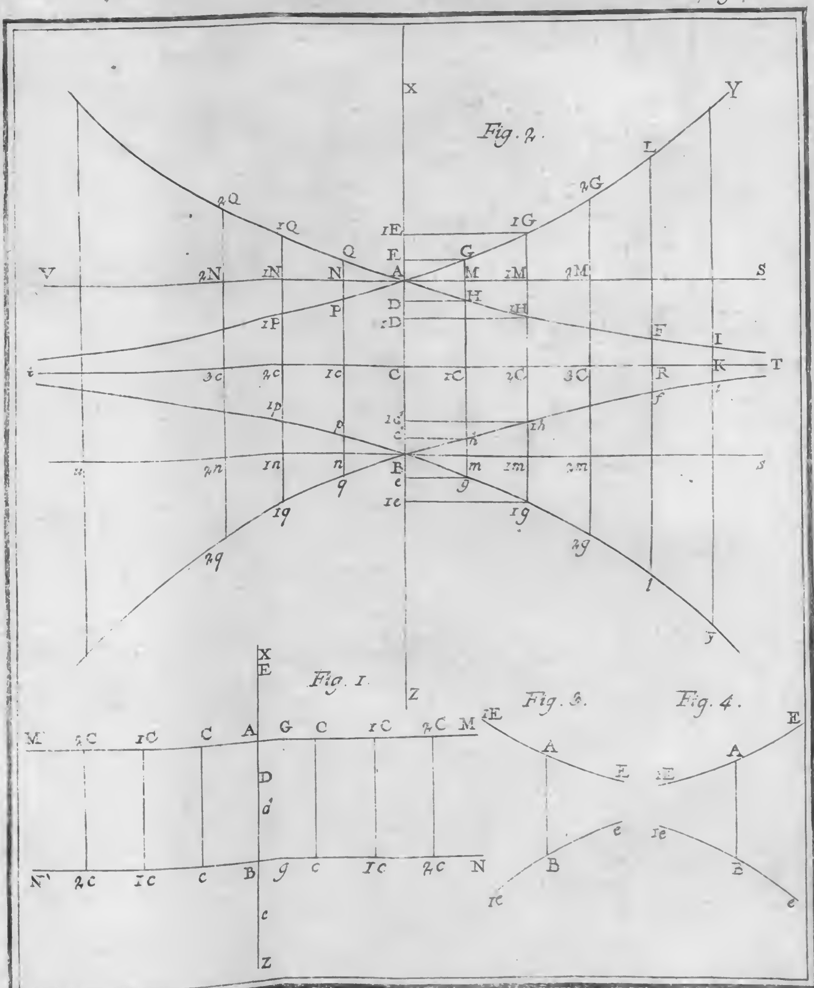
$$=-\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{p}{h}}_{\overline{1}}.a+\left(\frac{m}{n}\right)^{g+\frac{p}{h}}_{\overline{1}}.a=o,$$ in qua ſublata repugnantia eadem æquatio ac in ſuperiori caſu ſe ſe offert, mutata tantum protonumeri directione.

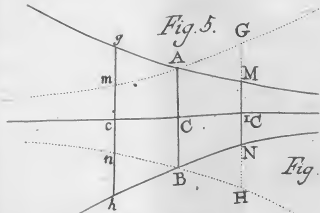
§. 43. Tandem a §. 21 docemur formulam Auctoris reducendam eſſe ad eam formam, in quam conformatas vides formulas §. 27., ut integræ Logiſticæ ex æquo reſpondeat. Ratione enim ea, ſub qua effertur Auctoris formula, non niſi ad unum tantum vel alterum ramum Logiſticæ aſcendentis pertinere jam §§. 24, 25 *Cap. ſuperior.* oſtendimus, quæ quomodo perficiatur cum illic demonſtratum fuerit, hîc dicere ſuperſedeo. Hoc nunquam animadverſum ab Analyſi communi, quam in arctum ſe compulerit jam in Capp: ſupp: demonſtravimus, cum nullam in forma danda fluentibus, pro diverſitate ſyſtematis & officii, curam inſtituerit, de valore tantum inter utraque æquationis membra ſervando ſollicita. Quod vero fluentibus ſimplicibus contigiſſe oſtendimus, idem omnino & in exponentialibus, ac in formula Euleriana evenire jam ſatis ſuperque, quantum hæc noſtra inſtituti ratio nunc poſtulat, hîc demonſtravimus. Ex quibus liquido conſtat, totum hoc clariſſimi Auctoris ædificium formula omnino indeterminata $1+\omega$ ſuperſtructum nihil omnino ad rem, quam ſibi propoſuerat, adſtruendam conducere: ac tantum abeſſe, ut ab hac erui poſſit exponentialium fluentium natura, atque quibus numeris logarithmorum applicatio conveniat, quin immo & ab alia formula ſtatutis legibus certis obſtricta a mea tantum Theoria repetendis, totum hoc negotium magnum ſane moderetur. Quid igitur mirum ſi irritum omnino atque nullum fuerit quicquid ad hanc quæſtionem tamdiu exagitatam dirimendam ab utraque parte hactenus productum fuit? quæ tamen ſi a veris principiis deducta fuiſſet ita Bernullianis favebat, ut nullo modo in controverſiam cadere potuiſſet.

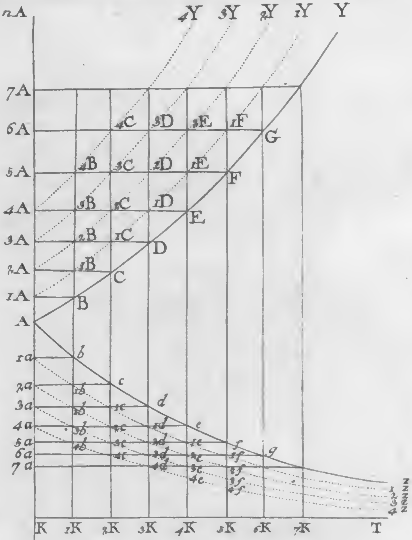
§. 44. Quamobrem ut finem tandem faciam, ſi quæ hactenus demonſtravimus vera ac neceſſaria ad prima totius Analyſeos fundamenta de integro jacienda æquis rerum æſtimatoribus videantur, non dubito quin fateantur, me non majorem, qua opus erat, in ipſis tradendis Operam inſumpſiſſe, cum cognoverint omnium antecedentium Analyſtarum ingenia hiſce ſubſidiis deſtituta, quo

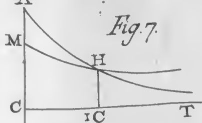
quo acutiora, eo longius a veritate aberrasse. Quod cum dico, non eo animo dico, ut tot tantisque Viris detraham magna nominis celebritate nunquam interitura claris, quos qua decet veneratione colo atque suspicio, sed ne veritati, quæ una cæteris est anteferenda, injurius sim. Utinam præclarissimi illi Viri quantum ingenio pollebant, tantum methodi, qua usi sunt, præsidio sustentati fuissent! Ex his enim quæ tanto ingenii acumine scripta reliquerunt, erui potest, quid sperandum fuisset, si veram hujusce Scientiæ tractandæ methodum in antecessum nacti fuissent. Ac tandem fidenter mihi videor pronuntiare posse nihil melius sperandum de calculis sublimioribus, in quos præcipue promovendos clarissimorum hujusce Sæculi Analystarum labor omnis, cura, & industria, posthabitis quasi finitis, adeo fuit, & est intenta, ut *differentialis* & *integralis Calculi* artificia sibi invicem succedentia ultra, quam dici possit, excreverint. Dolendum quod principiis Calculi finiti nimis fidenter se committentes ad hæc sublimiora tractanda iisdem male perceptis notionibus accesserint; de quibus proinde nihil melius sperandum est, nisi eadem remedia, quæ ad illa reformanda necessaria diximus, & in istis adhibeantur. Ego sane unus hoc ingenio, hisce viribus, hac ætate nullo modo tanto oneri sustinendo par esse possum: quantum potero tamen enitar, ut saltem ex pertinacissimo hoc meo labore Doctiorum & Æquiorum industriam tandem excitem, & evincam, totum hoc Analyseos cum Geometria consociatæ ædificium de integro in singulas suas partes instaurandum, si quid veri & certi sine erroris periculo consequi velimus; aut tamquam male fundatum, labile omnino negligendum.

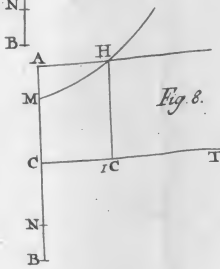
F I N I S.

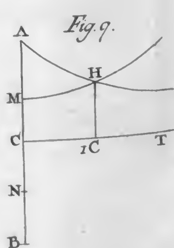

Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
X
Y
Z
V
S
T
A
B
C
L
I
K
R
1E
1G
2G
2Q
1Q
Q
N
1N
2N
M
1M
2M
H
1H
D
1D
P
1P
F
E
G
1C
2C
3C
1c
2c
3c
1p
p
1h
h
1d
1e
e
m
1m
2m
n
1n
2n
q
1q
2q
g
1g
2g
l
y
s
u
t
f
N
c
d
z

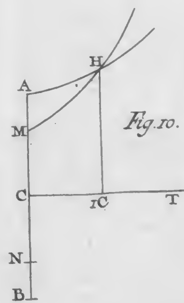

Fig. 5.
G
g
A
M
m
c
C
1C
n
N
B
H
h

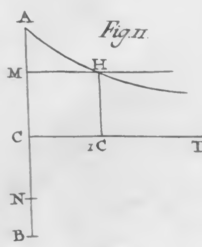

Fig. 6.
nA
4Y
3Y
2Y
1Y
Y
7A
6A
5A
4A
3A
2A
1A
A
G
F
E
D
C
B
1a
2a
3a
4a
5a
6a
7a
b
c
d
e
f
g
K
1K
2K
3K
4K
5K
6K
7K
T


Fig. 7.
A
M
H
C
1C
T


N
B
A
H
M
Fig. 8.
C
1C
T
N
B


Fig. 9.
A
H
M
C
1C
T
N
B


H
A
M
Fig. 10.
C
1C
T
N
B


A
Fig. 11.
M
H
C
1C
T
N
B

A.B. inc.



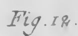


Fig. 12.

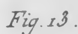


Fig. 13.

Fig. 15.

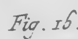


Fig. 16.

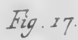


Fig. 17.

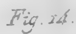


Fig. 14.

AB. inc.

